Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2007/08**

Foglio di esercizi 7

Limiti di successioni, studio di serie.

Esercizio 1
Stabilire se le seguenti successioni sono convergenti:

$$a_n = n, \quad a_n = (-1)^n, \quad a_n = (-1)^n n^2, \quad a_n = n^2 + n$$

Esercizio 2
Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$$

Esercizio 3
Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

1. $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
2. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^{2n}$
3. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{5n}$
4. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{7}{6n}\right)^{\pi n}$
5. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n^2+n^4}\right)^n$
6. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + \frac{1}{n}}$
7. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{7^n}\right)$
8. $\lim_{n\to\infty} (3^n - 4^n)$
9. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{3^n+1}$
10. $\lim_{n\to\infty} \frac{10^n-2^n}{3^n-4^n}$
11. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$
12. $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n \log n}$
13. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n!}$
14. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n}$
15. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}$

Suggerimento:.
Per la risoluzione dei precedenti esercizi ricordare i seguenti limiti e le seguenti disuguaglianze:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{se } a > 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Formula di Stirling:

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n} ne$$

Alcuni risultati.

(1) $R = \frac{1}{e}$

(2) $R = e^{14}$

(8) $R = -\infty$

(11) $R = +\infty$

(12) $R = 1$

(13) $R = +\infty$

Esercizio 4
Mostrare che la successione definita da:

$$a_1 = 2 \qquad a_n = \frac{1}{3 - a_{n-1}}$$

soddisfa $0 < a_n \leq 2$ ed è decrescente. Dedurne che è convergente e trovarne il limite.
Cenno di soluzione.
Si dimostra usando il principio di induzione matematica che la successione verifica le condizioni $0 < a_n \leq 2$ ed è decrescente, questi fatti assicurano l'esistenza del limite finito della successione. Per trovare il limite, si passa al limite per $n \to \infty$ in $a_n = \frac{1}{3-a_{n-1}}$, detto L questo limite, si ottiene che esso verifica l'equazione $L = \frac{1}{3-L}$, la cui soluzione fornisce $L = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $L = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, l'ultima soluzione è da scartare in quanto essendo $a_n \leq 2$ deve risultare anche $L \leq 2$.

Esercizio 5
Mostrare che le seguenti serie non sono convergenti:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^2 + k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} 5^{k+1}2^{-k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$$

Soluzione.
Si verifica che non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie (se una serie $\left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k \right\}$ converge, il limite $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$), quindi se il limite precedente non esiste o è diverso da zero la serie non è sicuramente convergente. Per dimostrare la non convergenza delle serie precedenti basterà quindi osservare che

$$\lim_{k\to\infty} (k^2 + k) = +\infty$$

$$\lim_{k\to\infty}(5^{k+1}2^{-k}) = 5\lim_{k\to\infty}(\frac{5}{2})^k = +\infty$$
$$\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{k}{k+1}\Big)^k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} = \frac{1}{e}$$

Esercizio 6
Esprimere i numeri decimali periodici $0,\bar{3}$ e $0,15\bar{3}$ in frazione usando la serie geometrica.
Soluzione della seconda parte.
$0.15\bar{3} = \frac{1}{10} + \frac{53}{10^3} + \frac{53}{10^5} + \cdots = \frac{1}{10} + \frac{53}{10^3}(1 + \frac{1}{10^2} + \dots) = \frac{1}{10} + \frac{53}{10^3}\frac{10^2}{99} = \frac{1043}{990}$
Esercizio 7

1. Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

2. Usando il punto precedente, calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k(k+1)})$$

3. Dedurne che
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \infty$$

Domanda 8
Calcolare la somma della seguente serie ($a \in \mathbb{R}$):
$$1 + \frac{1}{a^4+7} + \frac{1}{(a^4+7)^2} + \frac{1}{(a^4+7)^3} + \frac{1}{(a^4+7)^4} + \dots$$

Esercizio 9
Stabilire se le seguenti serie convergono assolutamente o meno usando il teorema del confronto o il criterio del rapporto

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{sin(2k)}{k^2}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k^3}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{3^k}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{10^k}{4^{2k+1}(k+1)}$

Esercizio 10
Stabilire se le serie seguenti convergono o meno usando i criteri fatti o la condizione necessaria per la convergenza di una serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k}} \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^2+5} \tag{2}$$

(3) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k(k+1)}$$

(4) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^k}$$

(5) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$$

(6) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$$

(7) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2(k+1)}}$$

(8) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$$

(9) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$$

(10) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+1}{5^k+2}$$

(11) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}+7}{k^2-8}$$

(12) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)}$$

Alcuni cenni di soluzione.

(2) la serie converge per il criterio del confronto perchè $\frac{\sqrt{k}}{k^2+5} \leq \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$

(2) la serie diverge per il criterio del confronto perchè $\frac{k-1}{k^2+k} \geq \frac{k-\frac{k}{2}}{k^2+k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1}$, oppure si può usare il criterio asintotico.

(3) la serie converge per il criterio del confronto perchè $\frac{1}{3+2^k} \leq \frac{1}{2^k}$

(4) la serie converge per il criterio del confronto, applicato dopo aver moltiplicato numeratore e denominatore per $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$

(9) la serie diverge per il criterio di non convergenza

(11) la serie converge per il criterio del confronto asintotico

(12) la serie non converge per il criterio integrale