Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2007/08**

Foglio di esercizi 8

Serie a termini di segno alterno, serie di potenze e serie di Taylor.

Nota: Al foglio di esercizi 7 depositato in Didattica on line sono state aggiunte alcune soluzioni.

Esercizio 1
Per quali valori di p la serie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^p}$$

converge?
Soluzione.
Per $p > 1$, la serie converge assolutamente dato che la serie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ converge per $p > 1$. Per $0 < p \leq 1$, la serie converge per il criterio di Leibniz. Per $p \leq 0$, il termine generale non converge a 0, quindi la serie non converge.

Esercizio 2
Dopo aver stabilito, con il criterio di Leibniz, che le serie seguenti convergono stabilire quanti termini occorre sommare per avere un errore minore di 0.001.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{4^k}$$

Soluzione della prima parte.
Per $k > 2$, $\frac{2^k}{k!} > \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}$, e $\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{k!} = 0$, infatti dalla formula di Stirling otteniamo $\frac{2^k}{k!} < \frac{2^k e^k}{k^k} = (\frac{2e}{k})^k < (\frac{2e}{6})^k$ per $k > 6$, quindi la serie converge per il criterio di Leibniz. Per rispondere alla seconda domanda ricordare che l'errore che si compie sostituendo la somma s di una serie a segno alterno con la somma parziale s_n è $\leq$ del valore assoluto del primo termine che si trascura, quindi poichè il primo k per cui $\frac{2^k}{k!} < 0.001$ è $k = 8$, per avere un errore < 0.001, nella somma si dovrà sommare 7 termini.

Esercizio 3
Stabilire per quali valori di x le serie seguenti convergono:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{(k+1)^k}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 x^k}{6^k}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! x^k}{k^k}$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k 2^k}}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k^2 5^k}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} (\frac{x}{3})^k$
8. $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 (x-5)^k$
9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{4k-3} (2 - \ln x)^k$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} x^k$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k!}{(4k+1)!} x^k$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} k(x-3)^k$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{2k^3+5}(x-2)^k$

Soluzioni.

(1) Applicando il criterio del rapporto si ottiene:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{\sqrt{k}}{|x|^k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k}{k+1}} \cdot |x| = |x|$$

quindi per $|x| < 1$ la serie converge assolutamente. Per $x = 1$, la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, che è una serie armonica divergente, per $x = -1$, la serie è $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, che abbiamo già visto essere convergente.

(2) Insieme in cui la serie converge $(-\infty, +\infty)$.

(3) Insieme in cui la serie converge $(-6, 6)$.

(4) Insieme in cui la serie converge $(-e, e)$.

(5) Insieme in cui la serie converge $[-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(6) Insieme in cui la serie converge $[-5, 5]$.

(7) Insieme in cui la serie converge $(-3, 3)$.

(8) Insieme in cui la serie converge $(4, 6)$.

(9) Applicando il criterio del rapporto si ottiene:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|k+1+5|}{|4k+4-3|} \cdot \frac{|4k-3|}{|k+5|} \cdot |2 - \log x| = |2 - \log x|.$$

Si ha quindi convergenza per $-1 < 2 - \log x < 1$ e quindi per $e < x < e^3$; per $x = e$ la serie diventa: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+4}{4k-3}$ che non converge dato che $\lim_{k\to\infty} \frac{k+4}{4k-3} = \frac{1}{4}$, per $x = e^3$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+4)(-1)^k}{4k-3}$, che ancora non converge dato che il termine generale non tende a zero. (Si noti che questa non è una serie di potenze.)

(10) Insieme in cui la serie converge $[-2, 2)$.

(11) Insieme in cui la serie converge $(-\infty, +\infty)$.

(12) Insieme in cui la serie converge $(2, 4)$.

(13) Insieme in cui la serie converge $[1, 3]$.

Esercizio 4

Si supponga che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ converga in $x = 4$ e diverga in $x = 6$. Cosa è possibile dire sulla convergenza o sulla non convergenza delle serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k (1)^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k 8^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k (-3)^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k 9^k$

Esercizio 5

Scrivere le serie di Taylor con punto iniziale 0, almeno fino al secondo ordine (usando, se possibile, gli sviluppi in serie già noti, oppure procedendo direttamente) delle seguenti funzioni .

$$e^{x^2}, \quad x^2 e^{-x}, \quad \sin(x^4), \quad e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$\cos(\sin x) - \ln(1+2x), \quad \sqrt{1+e^x}, \quad \ln(1+\sin(4x)),$$

Alcune soluzioni.
La serie di e^{-x} si ottiene da quella di e^x sostituendo al posto di x nella serie di Taylor di e^x $-x$, si ottiene quindi $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + E_3(x)$.
La serie di x^2e^{-x} si ottiene da quella di e^{-x}, moltiplicando ciascun termine per x^2, si ottiene quindi $x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{3!} + E_5(x)$.
La serie di $\cos(\sin x) - \ln(1+2x)$ si ottiene direttamente, cioè calcolando le varie derivate della funzione in 0. La serie richiesta è quindi $\cos(\sin x) - \ln(1+2x) = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 + E_2(x)$.

Esercizio 6
Utilizzare la serie di Mac Laurin di e^{-x} e di $\sin x$ per calcolare $e^{-0.2}$ e $sin(3^0)$ correttamente fino alla quinta cifra decimale.
Soluzioni.
Dalla serie di Taylor di e^{-x} si ottiene $e^{-0.2}$ si ottiene $e^{-0.2} = 1 - 0.2 + \frac{(0.2)^2}{2} - \frac{(0.2)^3}{3!} + \dots$. Per stabilire a quale indice fermarsi si può ricorrere alla stima dell'errore data dal criterio di Leibniz, cioè $R_n < \frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)!}$ dato che la serie è a termini di segno alterno. Si deve quindi scegliere il primo n per cui $\frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)!} < 0.5 \cdot 10^{-5}$ e questo è $n = 4$, quindi $e^{-0.2} = 1 - 0.2 + \frac{(0.2)^2}{2} - \frac{(0.2)^3}{3!} + \frac{(0.2)^4}{4!} = 0.819334$.
Per $sin(3^0)$, si osserva che $3^0 = \frac{\pi}{60}$, quindi $\sin(\frac{\pi}{60}) = \frac{\pi}{60} - (\frac{\pi}{60})^3 \cdot \frac{1}{3!} + (\frac{\pi}{60})^5 \cdot \frac{1}{5!} - \dots$. Dalla stima del resto della formula di Taylor si ottiene $R_n < (\frac{\pi}{60})^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}$, il primo n per cui succede questo è $n = 4$ quindi con 5 cifre decimali esatte si ha $\sin(\frac{\pi}{60}) = \frac{\pi}{60} - (\frac{\pi}{60})^3 \cdot \frac{1}{3!}$.

Esercizio 7
Stimare l'errore che si compie approssimando $\sin \frac{1}{100}$ con $\frac{1}{100}$ usando il polinomio di Taylor di punto iniziale $x = 0$.
Soluzione.
Poichè la serie di Taylor di $\sin x$ $\sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, è a termini di segno alterno approssimando $\sin \frac{1}{100}$ con $\frac{1}{100}$, si considerano i primi tre termini della serie di Taylor (il primo e il terzo sono nulli), quindi dal criterio di Leibniz si ottiene che l'errore compiuto è minore del valore assoluto del primo termine trascurato, cioè $R < \frac{1}{3!} \cdot (\frac{1}{100})^3 \sim 0.000000167$.

Esercizio 8
Calcolare l'integrale $\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$, con un errore $<$ di 0.001.

Esercizio 9
Calcolare i seguenti limiti usando lo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni opportune:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{x(2 + x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{e^{2x} - 1}$$