MODALITÀ SECONDO COMPITINO

NON SONO CONSENTITI:

APPUNTI, LIBRI, CALCOLATRICI e TELEFONINI

Il secondo compitino di Analisi consterà di alcuni esercizi pratici (ad esempio serie numeriche e di potenze, polinomi di Taylor, equazioni differenziali, integrali doppi ecc.) e di alcune domande un po' più teoriche.
È necessario sapere tutte le definizioni e gli enunciati fatti a lezione.
È necessario inoltre sapere le seguenti dimostrazioni:

1) Sia $L = \lim_n \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_n \sqrt{|c_n|}$. Dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(x-x_0)^n$ converge per $|x-x_0| < \frac{1}{L}$

2) Sia f tre volte derivabile in (a,b), sia $x_0 \in (a,b)$. Dimostrare che il polinomio di Taylor di grado due, $P_2(x)$, di $f(x)$, centrato in x_0, verifica
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$$

3) Dimostrare che la funzione $y(t) = e^{-A(t)}F(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare del primo ordine $y'(t)+a(t)y(t) = b(t)$, dove $a(t)$, $b(t)$ sono funzioni continue e $A(t)$, $F(t)$ sono primitive delle funzioni $a(t)$, $b(t)e^{A(t)}$ rispettivamente

4) Dimostrare che le funzioni $y(t) = c_1e^{k_1t}+c_2e^{k_2t}$, $c_1, c_2 \in R$, sono soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti $y''(t)+ay'(t)+b(t)y(t) = 0$, nel caso k_1 , k_2 siano le soluzioni reali distinte dell'equazione $k^2 + ak + b = 0$

5) Dimostrare che se $f : R^2 \to R$ è differenziabile nel punto (x_0, y_0), allora è continua in tale punto

6) Sia $F(x, y)$ una funzione derivabile in un intorno del punto (x_0, y_0), con derivate continue in tale intorno. Sia $F(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Sia $\varphi(x)$ la funzione derivabile verificante $F(x, \varphi(x)) = 0$ in un intorno di (x_0, y_0). Dimostrare che
$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$$