MODALITÀ COMPITO COMPLETO

**NON SONO CONSENTITI**:

APPUNTI, LIBRI, CALCOLATRICI e TELEFONINI

Il compito completo di Analisi consterà di alcuni esercizi pratici (ad esempio studi di funzioni, serie, equazioni differenziali, serie numeriche e di potenze, polinomi di Taylor, equazioni differenziali, integrali doppi ecc.) e di alcune domande od esercizi un po' più teorici.
È necessario sapere tutte le definizioni e gli enunciati fatti a lezione.
È necessario inoltre sapere le seguenti dimostrazioni:

1) $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ è strettamente crescente in $(a,b)$

2) $f : (a,b) \to R$ derivabile in $x_0 \in (a,b) \Longrightarrow f$ è continua in $x_0$

3) regola della derivata di un prodotto di funzioni derivabili

4) $$\left.\begin{array}{l}\text{sia } f : (a,b) \to R \text{ derivabile} \\ x_0 \in (a,b) \text{ un punto di max (o di min) di } f\end{array}\right] \Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

5) teorema del valor medio integrale

6) teorema fondamentale del calcolo integrale (solo la parte 1))

7) formula di integrazione per parti

8) Sia $L = \lim_n \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_n \sqrt{|c_n|}$. Dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(x-x_0)^n$ converge per $|x-x_0| < \frac{1}{L}$

9) Sia $f$ tre volte derivabile in $(a,b)$, sia $x_0 \in (a,b)$. Dimostrare che il polinomio di Taylor di grado due, $P_2(x)$, di $f(x)$, centrato in $x_0$, verifica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$$

10) Dimostrare che la funzione $y(t) = e^{-A(t)}F(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare del primo ordine $y'(t)+a(t)y(t) = b(t)$, dove $a(t)$ , $b(t)$ sono funzioni continue e $A(t)$ , $F(t)$ sono primitive delle funzioni $a(t)$ , $b(t)e^{A(t)}$ rispettivamente

11) Dimostrare che le funzioni $y(t) = c_1e^{k_1t}+c_2e^{k_2t}$ , $c_1, c_2 \in R$, sono soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti $y''(t)+ay'(t)+b(t)y(t) = 0$, nel caso $k_1$ , $k_2$ siano le soluzioni reali distinte dell'equazione $k^2 + ak + b = 0$

12) Dimostrare che se $f : R^2 \to R$ è differenziabile nel punto $(x_0, y_0)$, allora è continua in tale punto

13) Sia $F(x, y)$ una funzione derivabile in un intorno del punto $(x_0, y_0)$, con derivate continue in tale intorno. Sia $F(x_0, y_0) = 0$ , $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Sia $\varphi(x)$ la funzione derivabile verificante $F(x, \varphi(x)) = 0$ in un intorno di $(x_0, y_0)$. Dimostrare che

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$$