# INTRODUZIONE - LE IDEE FONDAMENTALI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE

Il nostro mondo sarà l'insieme dei numeri reali, denotato con $\mathbb{R}$. Non mi dilungherò nel racconto della costruzione di tali numeri, cominciando dai naturali, passando agli interi ed ancora ai razionali fino a raggiungere gli irrazionali, nè mi dilungherò nelle varie descrizioni di tali numeri, anche se devono essere ben chiare le loro proprietà e la loro rappresentazione decimale. Chi ha dei dubbi sulla veridicità o falsità di affermazioni come

$$(*) \qquad 0,\overline{9} < 1 \quad ; \quad 0,\overline{9} > 1 \quad ; \quad 0,\overline{9} = 1$$

deve assolutamente aggiornarsi. In generale in questo corso non sono ben accette regolette mnemoniche prive di giustificazione, ma sono sempre apprezzate idee, ragionamenti e conti, anche se informali.

Ma diamo una risposta a $(*)$.

Nella notazione decimale il numero $0,\overline{9}$ significa

$$0,\overline{9} = 0,99999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots = 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right)$$

Cerchiamo di trovare un'espressione generale per il calcolo di somme di questo tipo (cominciamo con una somma finita e affrontiamo dopo il problema della somma con infiniti addendi). Sia

$$S_K(q) = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^K = \sum_{n=1}^{K} q^n$$

Abbiamo

$$q\,S_K(q) = q^2 + q^3 + \cdots + q^K + q^{K+1} = \sum_{n=2}^{K+1} q^n \qquad \text{e quindi}$$

$$S_K(q) - q S_K(q) = (1-q) S_K(q) = q - q^{K+1},$$

da cui, per $q \neq 1$,

$$\boxed{S_K(q) = \frac{q - q^{K+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q} - \frac{q^{K+1}}{1-q}}$$

Nel nostro caso $q = \frac{1}{10}$. Abbiamo

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^K} = \frac{1/10}{1 - 1/10} - \frac{(1/10)^{K+1}}{1 - 1/10} = \frac{1}{9} - \frac{(1/10)^K}{9}$$

e quindi

$$9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^K}\right) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^K$$

Resta da capire che cosa succeda quando $K$ diventa sempre più grande (diremo: quando $K$ tende all'infinito).
Osservando che il termine $\left(\frac{1}{10}\right)^K$ si fa sempre più piccolo con l'aumentare di $K$, cioè che

$$\lim_{K \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^K = 0$$

(formalizzeremo questo concetto in seguito), avremo

$$0,\overline{9} = \lim_{K \to +\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^K\right] = 1$$

Notiamo che questi conticini ci fanno anche capire che i numeri decimali finiti o periodici sono numeri razionali, cioè del tipo

$$\frac{a}{b}, \quad a, b \text{ interi}, \quad b \neq 0$$

Il viceversa è facile: basta fare la divisione tra a e b e osservare che i resti ad un certo punto devono per forza ripetersi.

Bene, introduciamo ora un concetto che ci accompagnerà lungo tutto il corso: il concetto di funzione. Fissati due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$, chiameremo <u>funzione f da A in B</u> una qualunque relazione che associa ad ogni elemento $x \in A$ uno ed un solo elemento $y \in B$. Scriveremo

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

L'insieme A si chiama <u>dominio</u> di f, l'insieme B <u>codominio</u>.
L'insieme $f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in B : \exists\, x \in A \text{ con } f(x) = y\}$ si chiama <u>immagine</u> di f.
L'insieme $\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ x \in A\}$ si chiama <u>grafico di f</u>.

Ci sono più modi per descrivere una funzione: spiegandola verbalmente o tramite una tabella o ancora tramite un'espressione analitica. Non sempre sarà possibile passare da una descrizione all'altra, ma spesso sarà utile ed interessante.

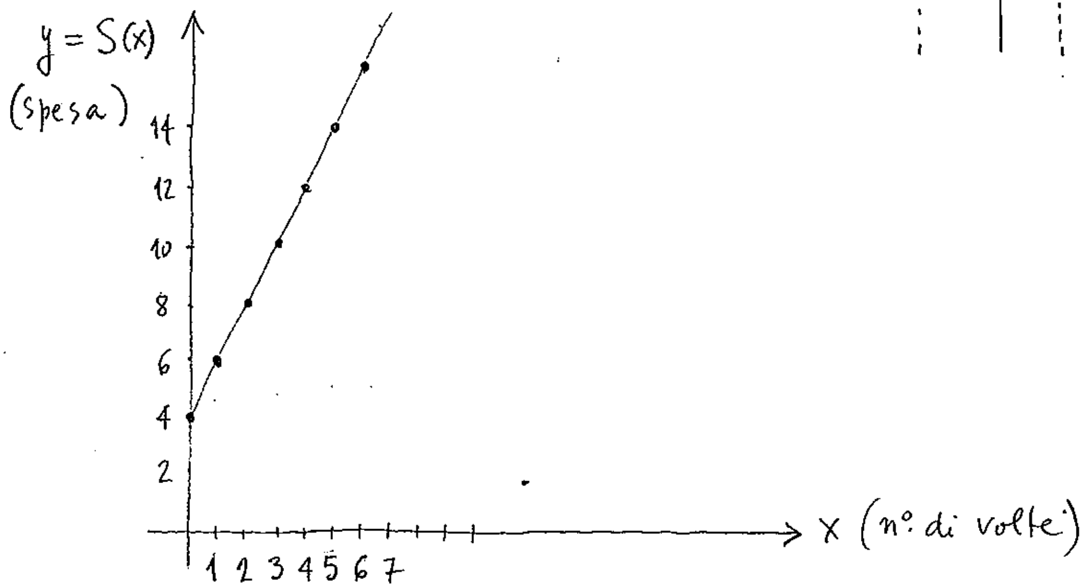
Per fare un semplice esempio, consideriamo la seguente situazione, espressa verbalmente: Genoveffa ha speso 4 euro per una tessera che le permette di spendere solo 2 euro ogni volta che va a vedere un film. Lei vorrebbe sapere quanto avrà speso dopo un certo numero di films. E' chiaro che la spesa è una funzione del numero di volte $x$ che Genovetta andrà al cinema. L'espressione algebrica di tale funzione è

$$\text{Spesa} = S(x) = 4 + 2x$$

Una tabella della spesa è riportata a lato:

| numero di volte $x$ | Spesa $S(x)$ |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 6 |
| 2 | 8 |
| 3 | 10 |
| ⋮ | ⋮ |

Se si vuole vedere graficamente l'andamento della spesa, si può fare il grafico



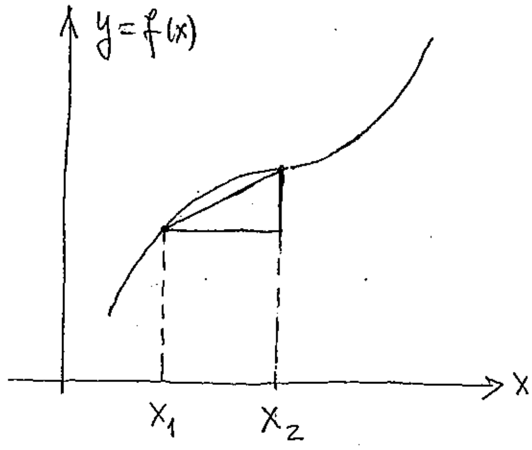

Ci sono molte domande interessanti che si possono porre riguardo alle funzioni. Farò adesso una chiacchierata piuttosto informale, lasciando per dopo una trattazione più rigorosa.

AD ESEMPIO,

1. Se $x$ indica il tempo ed $f(x)$ la posizione di un punto mobile all'istante $x$, la velocità media di questo punto tra $x_1$ ed $x_2$

$$\text{Velocità media} = \frac{\Delta \text{spazio}}{\Delta \text{tempo}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

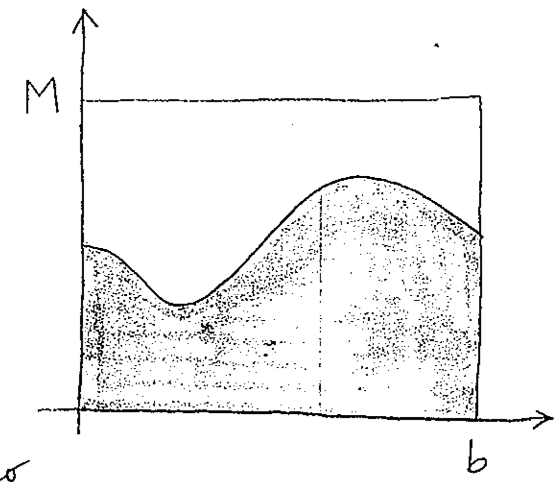
Questa quantità è chiamata <u>rapporto incrementale</u>.




Ci si può allora chiedere come ottenere la velocità istantanea $V(x)$ al tempo $x = x_1$. Essa sarà ottenuta prendendo la sua velocità media tra $x_1$ ed $x_2$ e cercando di capire che cosa succede man mano che $x_2$ si avvicina ad $x_1$. Si calcolerà quindi

$$V(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Chiameremo tale valore <u>derivata di $f$ in $x_1$</u> e lo denoteremo con $f'(x_1)$.



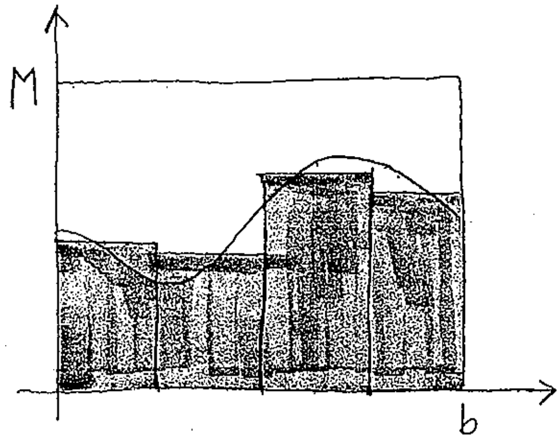

(2) Se invece la parte di piano

$0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq M$

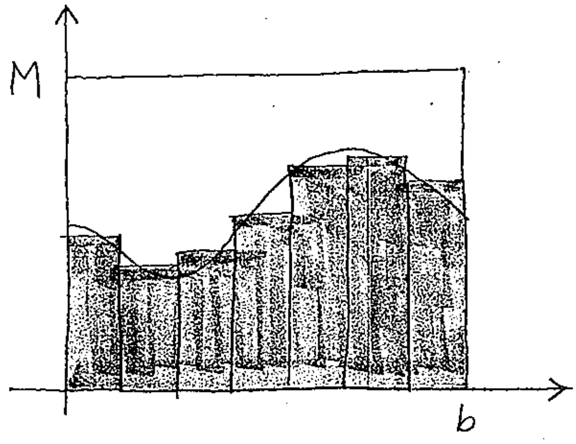
è un muro ed il grafico di $f$ crea una decorazione che divide il muro in due zone che si vogliono colorare diversamente, prima di comperare il colore ci si deve chiedere quanto misurino le due aree. Supponiamo di voler determinare l'area del sottografico di $f(x)$, cioè la zona

$$S(f) = \{(x,y) : 0 \le x \le b,\ \ 0 \le y \le f(x)\}$$

Definiremo l'area di $S(f)$ (che denoteremo con $A(b)$) mediante approssimazioni successive con aree di opportuni rettangoli, migliorando via via l'approssimazione riducendo le basi di tali rettangoli ed aumentandone quindi il loro numero $n$ come in figura:




$n = 4$




$n = 7$

Sarà

$$A(b) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\frac{b}{n},$$

dove $x_k$ è un punto nella base del $k$-mo rettangolino.

E ancora: se $A(x)$ è l'area quando ci si ferma ad un livello $x < b$, ci si può chiedere che relazione c'è fra $f(x)$ ed $A(x)$. Questa a prima vista parrebbe una domanda meno pratica, ma in realtà vedremo che non è così. Dimostreremo che

$$A'(x) = f(x).$$

Notiamo che già da subito risce evidente che un concetto chiave è il concetto di limite. In effetti tale concetto fa parte delle fondamenta dell'analisi matematica.

Ma continuiamo con le domande. Nel primo esempio ci si può chiedere in quale tempo il punto raggiunga la sua quota massima e nel secondo esempio ci si può chiedere in che parti il decoro è convesso. A tutte queste domande cercherà di dare una risposta la prima parte del corso, ma prima di formalizzare meglio tutti questi concetti, facciamo una panoramica di queste problematiche con una funzione particolare nota a tutti: $f(x) = x^2$. Tale panoramica sarà d'aiuto anche per recuperare conticini magari caduti nel dimenticatoio o forse mai fatti.

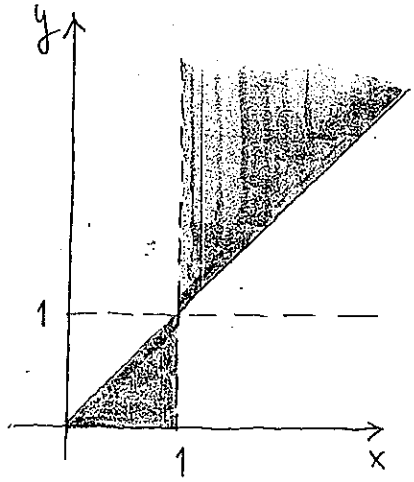
## La funzione $f(x) = x^2$

Osserviamo innanzitutto che $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ e quindi il grafico di $f$ è simmetrico rispetto all'asse $y$ (si dice che la funzione è pari).

Ci possiamo quindi limitare a studiare questa funzione per $x \geq 0$.

Poichè $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$, $f(x)$ è strettamente crescente per $x \geq 0$; notiamo anche che

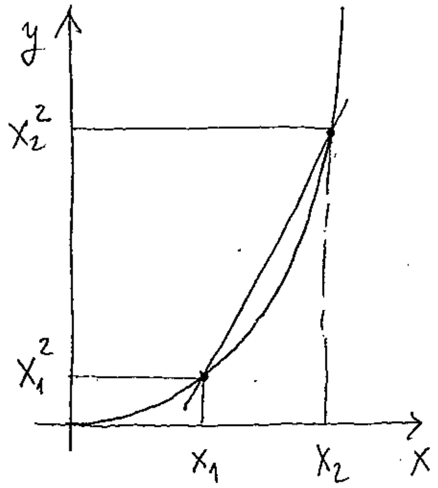
$$0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$$
$$x > 1 \Rightarrow x^2 > x$$




e quindi il grafico di $f(x) = x^2$ è contenuto nella zona ombreggiata in figura.

Siamo abituati a disegnare il grafico di $f(x) = x^2$ come una <u>curva convessa</u> (parabola). Vediamo di giustificare questo fatto, cioè di vedere che $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, si ha

$$r(x) > f(x) \quad \forall\, x \in (x_1, x_2),$$




dove $y = r(x)$ è la retta passante per i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ (questa è la condizione di convessità).

Cominciamo con lo scrivere l'equazione della retta per $(x_1, x_1^2)$, $(x_2, x_2^2)$; tale equazione è del tipo

$$y - y_1 = m\,(x - x_1),$$

dove $m$ è il coefficiente angolare della retta ed $(x, y)$ un generico punto di essa. Nel nostro caso

$$m = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{\cancel{(x_2 - x_1)}(x_2 + x_1)}{\cancel{x_2 - x_1}} = x_2 + x_1$$

e quindi l'equazione della nostra retta $y = r(x)$ è data da

$$y - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x - x_1)$$

In definitiva la nostra retta è il grafico della funzione

$$y = r(x) = (x_1 + x_2)(x - x_1) + x_1^2$$

Dobbiamo verificare che $r(x) > f(x)$ $\forall\, x \in (x_1, x_2)$ (ovviamente $r(x_1) = f(x_1)$, $r(x_2) = f(x_2)$). Deve essere

$$(x_1+x_2)(x-x_1)+x_1^2 > x^2 \quad \forall\, x \in (x_1,x_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$(x_1+x_2)(x-x_1) > x^2-x_1^2$$

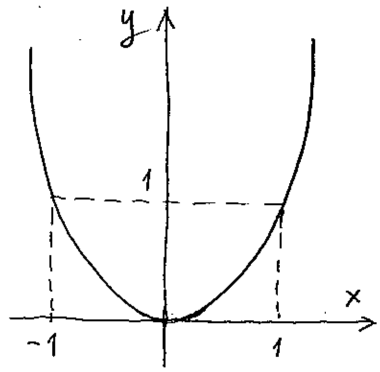
$$\Updownarrow \leftarrow \text{perché } x>x_1$$

$$x_1+x_2 > x+x_1$$

$$\Updownarrow$$

$$x_2 > x \quad , \ \underline{\text{vera}}$$

Quindi, il grafico di $f(x)=x^2$ ha ragionevolmente l'aspetto nella figura a lato.




Ritorniamo ora alla pendenza della retta $y=r(x)$, che era

$$m = x_1+x_2 \quad ;$$

se facciamo ora $x_2$ tendere ad $x_1$ (tenendo $x_1$ fermo) otteniamo

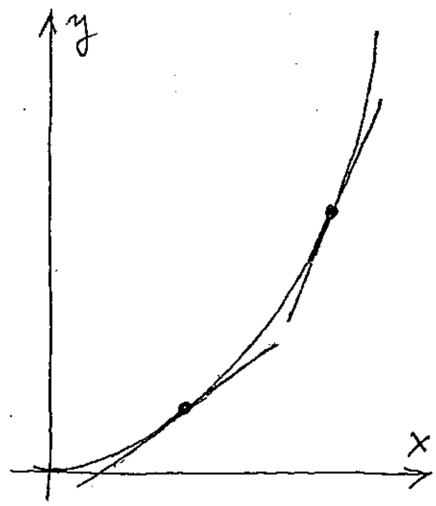
$$\lim_{x_2\to x_1} m = 2x_1$$

La retta passante per il punto $(x_1, x_1^2)$ di pendenza $m=2x_1$ si chiama <u>retta tangente al grafico</u> di $f(x)=x^2$ per il punto $(x_1, x_2^2)$ ; la sua equazione è

$$y-x_1^2 = 2x_1(x-x_1)$$

e viene denotata con $y=T(x)$ , cioè

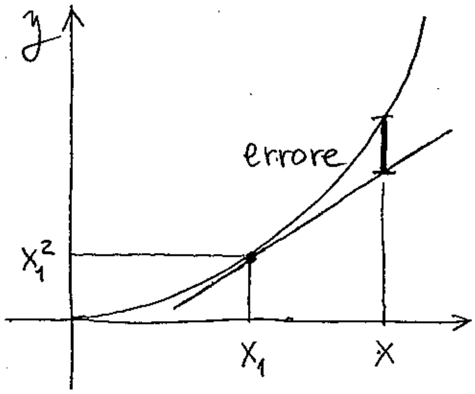
$$T(x) = 2x_1(x-x_1)+x_1^2 = 2x_1x - x_1^2$$




Notiamo che la pendenza $m = 2x_1$ della retta tangente crescerà al crescere di $x_1$ e quindi la tangente si va verticalizzando al crescere di $x_1$; questo è coerente con quanto abbiamo visto riguardo la convessità di $f(x) = x^2$.

In generale, quando si può parlare di retta tangente, si dimostra che la condizione di convessità si può anche esprimere dicendo:

> $f$ è convessa se $\mathcal{G}(f)$ sta sempre sopra ogni sua retta tangente.




Valutiamo ora l'errore

$$E(x-x_1) = f(x) - T(x) \quad ;$$

si ha

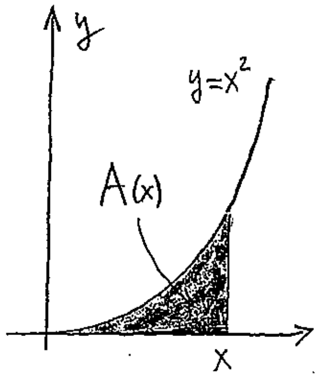
$$E(x-x_1) = x^2 - \left(2x_1 x - x_1^2\right) =$$
$$= (x-x_1)^2 .$$

Tale errore gode della seguente importante proprietà:

$$\lim_{x \to x_1} \frac{E(x-x_1)}{x-x_1} = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x)-T(x)}{x-x_1} = \lim_{x \to x_1} (x-x_1) = 0 \quad ,$$

proprietà che vedremo essere valida in generale ogni volta che approssimeremo una funzione $f(x)$ con la sua retta tangente (sempre che di retta tangente si possa parlare ...)

Siamo adesso interessati a calcolare $A(b)$, dove in generale $A(x)$, $x \geq 0$ è l'area indicata nella figura a lato.

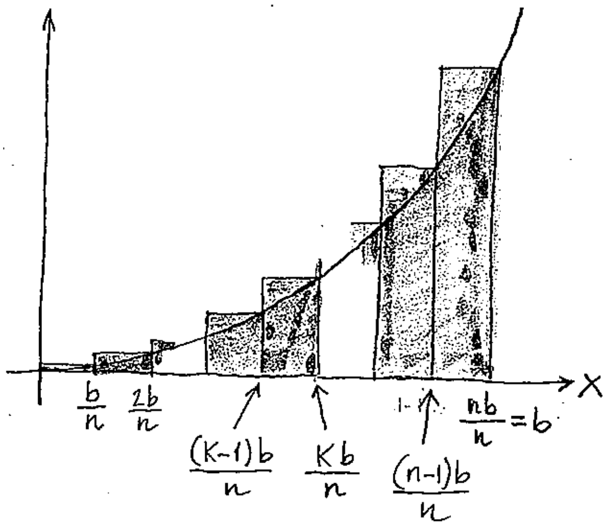



Useremo prima un modo elementare, già noto agli antichi greci, e lo confronteremo con un metodo molto interessante e utile, estremamente più pratico, soprattutto quando lo applicheremo in casi di funzioni più generali.

PRIMO MODO: Dividiamo $[a,b]$ in $n$ intervallini uguali

$$\left[\frac{(k-1)b}{n}, \frac{kb}{n}\right], \quad k=1,2,\dots,n$$

ed approssimiamo $A(b)$ (per eccesso) con l'area della scaletta in figura; poiché l'area del $k$-mo scalino è




$$\text{base} \times \text{altezza} = \frac{b}{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{k^2 b^3}{n^2},$$

l'area totale della scaletta sarà

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 b^3}{n^3} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Il problema è quindi quello di calcolare la somma

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

Per fare ciò avremo bisogno di calcolare anche

$$(**) \quad \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n \, .$$

Useremo in tutti i due casi un ingegnoso trucchetto. Cominciamo con il calcolare (**). Partiamo dall'uguaglianza

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \; ;$$

sommando le $n$ uguaglianze che si hanno al variare di $k$,

$$k = 1, 2, 3, \dots, n-1, n \; ,$$

otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \; ,$$

il che è equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n \; ,$$

cioè

$$(n+1)^2 - 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n \, .$$

Da quest'ultima si ricava $2\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)^2 - n - 1 = n^2 + n = n(n+1)$ e quindi

$$\bullet \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Ora, per calcolare (*) (pagina 11) ripercorriamo la stessa strada:

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \, .$$

e quindi, come prima

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\ ,$$

Cioè, ricordando la • nella pagina precedente

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{n}k^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\,\frac{n(n+1)}{2}+n\ ,$$

il che è equivalente a

$$(n+1)^3-1=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3n(n+1)+2n}{2}\ .$$

Da quest'ultima si ricava

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-1-\frac{3n^2+5n}{2}=\frac{2n^3+6n^2+6n+\cancel{2}-\cancel{2}-3n^2-5n}{2}=$$

$$=\frac{2n^3+2n^2+n^2+n}{2}=\frac{2n^2(n+1)+n(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}$$

e quindi

$$\bullet\bullet\quad\boxed{\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Tornando ora alla nostra approssimazione per eccesso dell'area $A(b)$, abbiamo che

$$A(b)<\frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{b^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .$$

E' intuitivo che l'approssimazione si potrà far diventare tanto accurata quanto vogliamo prendendo $n$ sufficientemente grande; notiamo che

$$\frac{b^3}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n} =$$

$$= \frac{b^3}{6}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{b^3}{6}\cdot 2 = \frac{b^3}{3}$$

Concludiamo così che

$$A(b) = \frac{b^3}{3}.$$

Vediamo ora di ricavare $A(b)$ percorrendo una strada meno faticosa e senz'altro più stimolante. Ci proponiamo di determinare la funzione $A(x)$, $x \geq 0$. Ovviamente $A(0) = 0$. Per determinare $A(x)$ calcoliamo la sua velocità di variazione in funzione di $x$ (che per facilitare l'interpretazione fisica può essere pensata come tempo). Abbiamo già visto che la velocità media della quantità $A(x)$ nell'intervallo $(x, x+h)$ è data dal rapporto

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

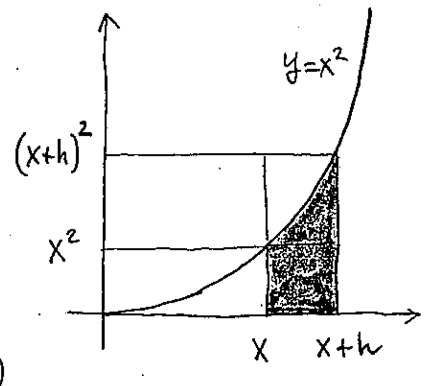
e che è ragionevole pensare che la velocità istantanea di $A(x)$ nell'istante $x$ sia data da

$$(*) \qquad A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

(notiamo che numeratore e denominatore tendono a zero).

Per calcolare $(*)$ osserviamo che $(h>0)$

$$h\,x^2 \leq A(x+h)-A(x) \leq h\,(x+h)^2$$




e quindi

$$x^2 \leq \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq (x+h)^2$$

(analogo conto lasciato al lettore per $h<0$)

Pertanto

$$x^2 \leq \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq x^2 \,, \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{A'(x) = x^2}$$

A questo punto, della funzione $A(x)$ sappiamo che

$$\begin{cases} A(0)=0 \\ A'(x) = x^2 \quad \forall\, x \geq 0 \end{cases}$$

L'intuizione fisica ci dice che quello che sappiamo dovrebbe determinare completamente la funzione $A(x)$ (tutto questo però dovrà essere in seguito giustificato rigorosamente).

Consideriamo la funzione $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ ; ovviamente

$F(0) = 0 = A(0)$. Calcoliamo la velocità $F'(x)$ di $F(x)$.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{3h} =$$

$$= \lim_{z \to x} \frac{z^3 - x^3}{3(z-x)} = \lim_{z \to x} \frac{z^2 + xz + x^2}{3} = x^2$$

$x + h = z$

$$\begin{array}{lll|l}
z^3 & & -x^3 & z - x \\
\cline{4-4}
z^3 - z^2x & & & z^2 + xz + x^2 \\
\cline{1-3}
/ \quad z^2x & & -x^3 & \\
\quad z^2x - x^2z & & & \\
\cline{1-3}
\quad / & x^2z & -x^3 & \\
 & x^2z & - x^3 & \\
\cline{2-3}
 & / & & 
\end{array}$$

Quindi

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

Abbiamo così che

$$\begin{cases} F(0) = A(0) = 0 \\ F'(x) = A'(x) = x^2 \quad \forall x \geq 0 \end{cases}$$

Se la nostra modellizzazione della velocità istantanea è corretta, dobbiamo concludere che

$$A(x) = F(x) \quad \forall x \geq 0,$$

cioè che

$$\boxed{A(x) = \frac{x^3}{3} \quad \forall x \geq 0}$$

In particolare $A(b) = \frac{b^3}{3}$, risultato che avevamo già ottenuto con il primo metodo.

La quantità $A(b)$ si indica usualmente con

$$A(b) = \int_0^b x^2\,dx$$

e si chiama <u>integrale</u> di $f(x) = x^2$ nell'intervallo $(0, b)$.

La funzione $A(x)$ verifica $A'(x) = f(x)$ $\forall x$ : una funzione con questa proprietà si dice una <u>primitiva</u> di $f(x)$.

Dopo aver fatto questa lunga introduzione ed alla luce di quanto visto nelle esercitazioni (le funzioni più semplici, $x^p$, $|x|$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, ecc., i loro movimenti e le loro proprietà) è arrivato il momento di introdurre il concetto di limite, derivata e quant'altro in maniera più formale e generale.

## IL CONCETTO DI LIMITE

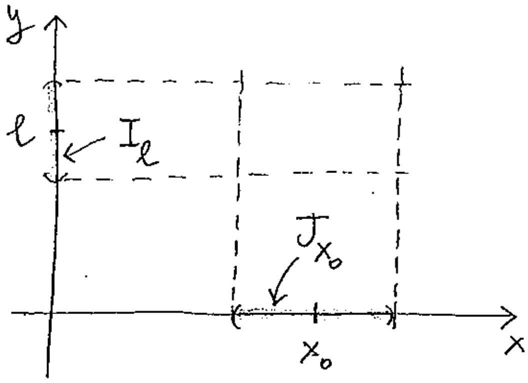
La scrittura

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}, \quad \text{analogamente la scrittura} \quad \boxed{f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell},$$

esprime il fatto che, se si prende $x$ sufficientemente vicino ad $x_0$ (ma $x \neq x_0$), il valore $f(x)$ diventa arbitrariamente vicino al numero $\ell$. Osserviamo che non è affatto necessario che la funzione $f$ sia definita in $x_0$. In maniera più precisa:

DEFINIZIONE: Sia $f$ una funzione definita in un intorno di $x_0$. Diciamo che

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$




se e soltanto se, comunque scegliamo un intervallo $I_\ell$ centrato in $\ell$, piccolo quanto vogliamo, è possibile trovare un intervallo $J_{x_0}$ centrato in $x_0$ tale che

$$f(x) \in I_\ell \quad \text{per ogni } x \in J_{x_0} \quad , \quad x \neq x_0$$

Ponendo $I_\ell = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ e $J_{x_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ la definizione è del tutto equivalente ad una più amata/odiata, comunque più usata, che è la seguente

DEFINIZIONE: Sia $f$ una funzione definita in un intorno di $x_0$. Diciamo che

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

se e soltanto se, per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile trovare $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Valgono alcune proprietà dei limiti che sono molto naturali e che si riveleranno utilissime. Elenchiamo tali proprietà di seguito.

Supponendo $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = q$, si ha

$\ell_1$) $\lim_{x\to x_0} \left[f(x)+g(x)\right] = \ell + q$

$\ell_2$) $\lim_{x\to x_0} \left[f(x)\cdot g(x)\right] = \ell \cdot q$

$\ell_3$) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{q}$ (supposto $q \neq 0$)

$\ell_4$) TEOREMA DEI CARABINIERI: Siano $f, g, h$ tre funzioni definite in un intorno di $x_0$ tali che

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

in tale intorno e tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$; allora

esiste $\lim_{x\to x_0} h(x)$ e vale $\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$.

$\ell_5$) Se $\phi(x)$ è limitata in un intorno di $x_0$ (cioè, se $|\phi(x)| \leq M \quad \forall x \in I_{x_0}$) e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,\phi(x) = 0$$

Avendo a disposizione il concetto di limite possiamo introdurre quello di funzione continua:

**DEFINIZIONE** Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$; diciamo che $f$ è <u>continua</u> in $x_0 \in [a,b]$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se $f$ è continua in ogni punto del suo dominio diciamo semplicemente che $f$ è continua.

Usando un linguaggio informale si potrebbe dire che una funzione è continua in $x_0$ quando $f(x)$ diventa arbitrariamente vicina ad $f(x_0)$ a patto di prendere $x$ sufficientemente vicino ad $x_0$.

Oppure: $f(x)$ "cambia di poco" quando si "cambia di poco" il valore di $x$.

Con già in mano le proprietà dei limiti è banale osservare che somma, prodotto e quoziente (dove è definito) di funzioni continue sono ancora funzioni continue. Inoltre si può dimostrare che la composizione di funzioni continue è anch'essa una funzione continua, cioè se

$$g:[a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{ed} \quad f: g([a,b]) \to \mathbb{R}$$

sono funzioni continue, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) \qquad \forall\, x_0 \in [a,b]$$

Detto tutto questo, si osserva facilmente che le potenze (e quindi i polinomi) sono funzioni continue

Anche le funzioni trigonometriche sono funzioni continue. Vediamo ad esempio $\operatorname{sen} x$. Ad esercitazioni avete visto che

$$0 < \operatorname{sen} x \leq x \quad \forall\, x \in (0, \pi/2)$$

e, poichè la funzione seno è dispari, si ha anche

$$x \leq \operatorname{sen} x < 0 \quad \forall\, x \in (-\pi/2, 0) \;;$$

basta quindi applicare il teorema dei carabinieri per avere

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 = \operatorname{sen} 0$$

e dimostrare così la continuità di $\operatorname{sen} x$ in $x = 0$. Analogamente, da

$$1 - x < \cos x < 1 \quad \forall\, x \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

si ricava che

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos 0$$

Per verificare la continuità di $\operatorname{sen} x$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ basta ora osservare che

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\big(x_0 + (x - x_0)\big) =$$

$$= \operatorname{sen} x_0 \cdot \underbrace{\cos(x - x_0)}_{\substack{\downarrow\, x \to x_0 \\ 1}} + \cos x_0 \cdot \underbrace{\operatorname{sen}(x - x_0)}_{\substack{\downarrow\, x \to x_0 \\ 0}} \xrightarrow{x \to x_0} \operatorname{sen} x_0$$

In modo analogo si procede per il coseno.

## OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Dalle disuguaglianze $\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, viste ad esercitazioni, si ottiene che

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1 \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ x \neq 0 \quad ;$$

dal teorema dei carabinieri otteniamo allora un limite fondamentale:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

Osserviamo ora che

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{\cos x - 1}{x^2} \, \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} = \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} \, \frac{1}{\cos x + 1} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \, \frac{1}{\cos x + 1} = -\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \frac{1}{\cos x + 1} \xrightarrow{x \to 0} -\frac{1}{2} ,$$

cioè

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}}$$

Da questo segue immediatamente che

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0} \quad ;$$

infatti, $\dfrac{\cos x - 1}{x} = x \cdot \dfrac{\cos x - 1}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

## DUE TEOREMI FONDAMENTALI SULLE FUNZIONI CONTINUE.

Un primo risultato fondamentale sulle funzioni continue è il

**TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI.**

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua, siano $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$, tali che $f(x_1) < 0$ ed $f(x_2) > 0$ (oppure $f(x_1) > 0$ ed $f(x_2) < 0$). Allora esiste un punto $c \in (x_1, x_2)$ tale che $f(c) = 0$.

L'aria innocua di questo teorema non deve nascondere la sua grande utilità. Ad esempio, consideriamo la funzione continua

$$f(x) = x^2 - a \qquad (a > 0)$$

Poiché $f(0) = -a < 0$ ed $f(a+1) = a^2 + a + 1 > 0$, il teorema assicura l'esistenza di un punto $c \in (0, a+1)$ tale che $c^2 - a = 0$, cioè $c^2 = a$. Abbiamo così dimostrato che esiste la radice quadrata di $a$. Tale radice è unica fra i reali nonnegativi perchè $f(x)$ è strettamente crescente per $x \geq 0$.

Una conseguenza immediata del teorema di esistenza degli zeri è il seguente

**COROLLARIO:** (teorema dei valori intermedi)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, siano $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$. Allora $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ ed $f(x_2)$.

<u>Dimostrazione</u>:

Posto $\lambda$ un valore compreso fra $f(x_1)$ ed $f(x_2)$, basta applicare il teorema dell'esistenza degli zeri alla funzione continua

$$g(x) = f(x) - \lambda$$

Da questo corollario segue immediatamente che se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e strettamente crescente (e quindi iniettiva), allora $f$ è suriettiva sull'intervallo $[f(a), f(b)]$ e quindi esiste la funzione inversa $f^{-1}: [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$, caratterizzata da

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in [a,b]$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in [f(a), f(b)]$$

Questo risultato assicura l'esistenza di radici, delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche e di altre funzioni che vedremo in seguito. E' importante sapere che se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e invertibile, allora la funzione inversa $f^{-1}$ è anch'essa continua.

Un altro risultato fondamentale sulle funzioni continue è il

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua; allora esistono $x_m$, $x_M$ in $[a,b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

$x_m$ si dice un <u>punto di minimo</u> di $f$, $f(x_m)$ è il <u>valore minimo</u> della $f$; analogamente, $x_M$ si dice un <u>punto di massimo</u>,

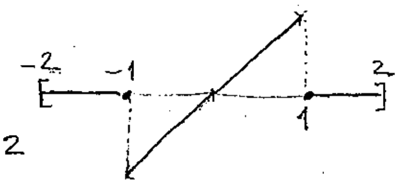
$f(x_M)$ è il <u>valore massimo della</u> $f$.

**ATTENZIONE!!** E' essenziale che il dominio della $f$ sia un intervallo chiuso e limitato e che la funzione sia continua. Senza queste ipotesi la tesi può essere falsa: <u>ad esempio</u>

$f(x) = \frac{1}{x}$ non ha massimo in $(0,1]$

non ha minimo in $(1,+\infty)$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{se } -2 \leq x < -1 \text{ oppure } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$




non ha né massimo né minimo in $[-2,2]$.

Dal teorema di Weierstrass e dal teorema dei valori intermedi segue che se $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora, detti

$m$ = valore minimo di $f$ in $[a,b]$

$M$ = valore massimo di $f$ in $[a,b]$,

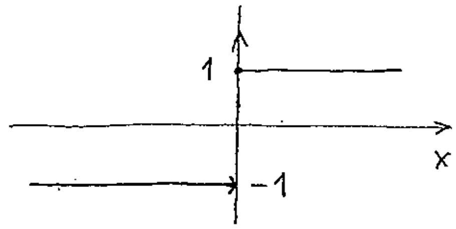
risulta

$$f([a,b]) = [m,M]$$

Torniamo ai limiti.

Non l'abbiamo ancora osservato esplicitamente, ma è evidente che il limite non sempre esiste. Un esempio banale è fornito dalla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} ;$$




è chiaro che $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste.

Non abbiamo parlato finora di <u>limite destro</u> e <u>limite sinistro</u>, ma il concetto è del tutto naturale. La funzione $f$ dell'esempio precedente, pur non avendo limite in $0$, possiede un limite destro

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$$

ed un limite sinistro

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$$

E' evidente che se limite destro e limite sinistro esistono e sono uguali, allora esiste il limite.

Se consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è facile notare che non esistono $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x)$.

Ad esempio, $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \overset{t = \frac{1}{x}}{=} \lim_{t \to +\infty} \operatorname{sen} t$, e quando $t \to +\infty$

sen t continua ad oscillare fra $-1$ ed $1$.

Invece per la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

si ha, grazie al teorema dei carabinieri, che $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$; poichè $g(0) = 0$, $g$ è continua anche in $x=0$.

Introduciamo adesso qualche altra nozione sul tema "limite" per avere così una panoramica abbastanza esauriente sull'argomento: vediamo i concetti di limiti all'infinito e limiti infiniti.

DEFINIZIONE: Diremo che

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty}$$

se e soltanto se $\forall M>0 \ \exists \delta>0$ tale che

$$0 < |x-x_0| < \delta \implies f(x) > M$$

(il significato di $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ è lasciato al lettore)

Quando siamo in questa situazione diremo che $f$ ha un asintoto verticale in $x_0$.

Ad esempio, se $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$; se invece

$f(x) = \frac{1}{x}$ si ha $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$.

DEFINIZIONE: Diremo che

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}}$$

se e soltanto se $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, a\in\mathbb{R}$ tale che

$$x>a \implies |f(x)-\ell| < \varepsilon$$

(analogamente si definisce $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$)

Ad esempio, se $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

Analogamente si definiscono

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \quad \text{ecc. ecc.}$$

Quando si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, diciamo che la retta orizzontale $y=\ell$ è un <u>asintoto orizzontale</u> di $f$ per $x\to+\infty$

Ad esempio, la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale di $f(x) = \frac{1}{x}$ sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$. (mentre la retta $x=0$ è un asintoto verticale per $f$).

In generale, diremo che la retta

$$y = ax + b$$

è un asintoto di $f$ per $x \to +\infty$ se si ha che

$$(*) \quad \lim_{x \to +\infty} \left[ f(x) - (ax+b) \right] = 0$$

Da $(*)$ segue immediatamente che

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \left[ f(x) - (ax+b) \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - a \right]$$

e quindi, se vale $(*)$, deve essere

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Calcolato $a$, il valore di $b$ è $\quad b = \lim_{x \to +\infty} \left[ f(x) - ax \right]$

(analogamente si parla di asintoti per $x \to -\infty$)

ESEMPIO: Cerchiamo gli asintoti della funzione

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1} \qquad (\text{definita per } |x| \geq 1)$$

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{1}{x}\sqrt{x^2-1} = \begin{cases} 2 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} & \text{se } x \geq 1 \\[2ex] 2 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad ; \text{ ora}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-3x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0$$

e quindi la retta $y=3x$ è un asintoto di $f$ per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-x+\sqrt{x^2-1}}=0$$

e quindi la retta $y=x$ è un asintoto di $f$ per $x\to-\infty$

## SUCCESSIONI

Questo è un buon momento per porre l'attenzione su un tipo particolare di funzioni: le funzioni

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\ ,$$

cioè le <u>funzioni definite sui numeri naturali</u>. Tali funzioni si chiamano <u>successioni</u> ed è molto più frequente vederle denotate con la scrittura

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\ ,$$

dove $a_n=f(n)$.

E' evidente che per tali funzioni l'unico limite su cui si può investigare è il limite all'infinito; scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty}a_n \quad \text{o semplicemente} \quad \lim_n a_n$$

Facendo l'opportuna traduzione della definizione di limite in questo particolare caso, si vede che

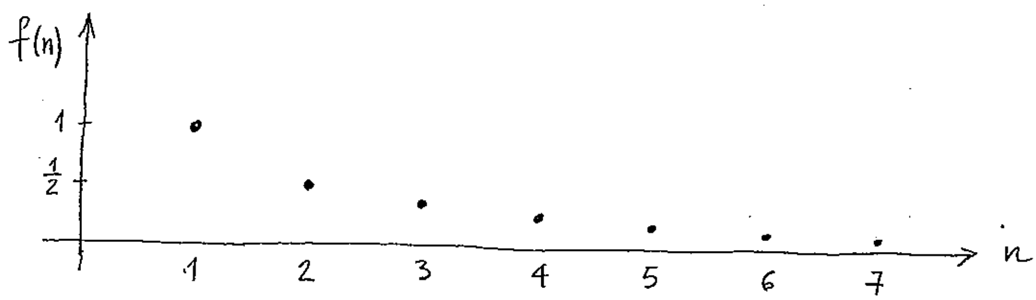
$$\lim_n a_n = \ell \in \mathbb{R}$$

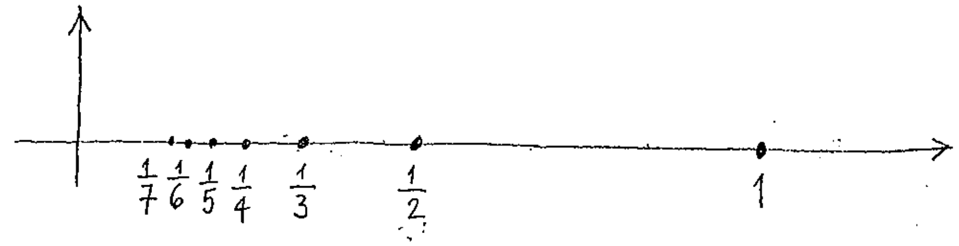
se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

(analogamente, $\lim_n a_n = +\infty$ se e solo se ...)

Le successioni sono oggetti molto importanti in analisi matematica. Può essere comodo (ma questo dipende dalla sensibilità di ognuno) immaginare o descrivere i termini di una successione sull'asse delle x invece che come punti di un grafico; ad esempio, $a_n = \frac{1}{n}$ si può rappresentare in due modi:



ESEMPI

1) $a_n = \frac{1}{n}$ ; $\lim_n a_n = 0$

2) $a_n = n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$ ; $\lim_n a_n = +\infty$

3) $a_n = n^p$ ($p \in \mathbb{N}$ fissato) ; $\lim_n a_n = +\infty$

4) $a_n = q^n$ $(q>0)$ ; $\lim_n q^n = \begin{cases} 0 \text{ se } q<1 \\ 1 \text{ se } q=1 \\ +\infty \text{ se } q>1 \end{cases}$

5) $a_n = \sqrt[n]{q}$ $(q>0)$ ; $\lim_n a_n = 1$

6) $a_n = \sqrt[n]{n}$ ; $\lim_n a_n = 1$

7) $a_n = \dfrac{q^n}{n!}$ ; $\lim_n a_n = 0$

8) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ATTENZIONE: qui nel cercare il limite si rischia di fare un errore grossolano, cioè di dire che al crescere di $n$ la quantità $1+\frac{1}{n}$ tende a 1 e quindi si ha $1^n$, che è sempre 1. Sbagliato! E' vero che $1+\frac{1}{n}$ tende decrescendo a 1 quando cresce $n$, ma bisogna tener conto anche del fatto che mentre $1+\frac{1}{n}$ decresce il numero di fattori

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \dots \cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ fattori}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

cresce e quindi il risultato non è scontato. Questa è una di quelle che si chiamano "forme indeterminate" di cui parleremo più in dettaglio fra poco. Nel caso di $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ si può dimostrare che

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente. Questo permette di avere la certezza che esiste $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Tale limite viene chiamato <u>numero di NEPERO</u> e sarà denotato

$$e = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Il numero $e$ ci farà compagnia per tutto il corso.

Ma torniamo alle nostre funzioni ed ai limiti. Osserviamo che il calcolo di limiti di rapporti, prodotti e somme diventa complicato in alcuni casi particolarmente delicati, dette <u>forme indeterminate</u>.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$, è facile convincersi che $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$,

ma se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ non è più così chiaro che cosa succeda con

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \quad \left(\text{forma indeterminata } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Lo stesso si dica del $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ quando $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

$$\left(\text{forma indeterminata } \frac{0}{0}\right)$$

Infatti, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

può essere qualunque cosa, o addirittura non esistere.

<u>Ad esempio</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty ,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{8x+x^2}{x} = 8 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \text{ non esiste,}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} \text{ non esiste}$$

Abbiamo visto che il rapporto incrementale è una tipica forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Altre forme indeterminate (cioè situazioni come quella appena vista, in cui la sola conoscenza del limite delle funzioni $f$ e $g$ non permette di stabilire quanto fa il limite di $\frac{g}{f}$, $f\cdot g$, $f+g$ oppure $g^f$) sono $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$)

Vediamo qualche esempio importante:

1) Siano $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , $a>0$

$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ , $b>0$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}+\infty & \text{se } n>m\\ 0 & \text{se } n<m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n=m\end{cases}$$

(il risultato si ottiene facilmente dividendo numeratore e denominatore per $x^n$)

2) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

3) $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1\ ,\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\ ,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$ (vedi pagina 22)

Quando ne sapremo di più sulle derivate, avremo in mano uno strumento molto utile per le forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. E' arrivato quindi il momento di introdurre in maniera precisa e approfondire il concetto di

## DERIVATA

Se guardiamo il grafico di una funzione (continua e senza spigoli) ci accorgiamo che sarebbe in generale estremamente utile saper identificare i tratti "in salita" e i tratti "in discesa", ma per questo abbiamo bisogno di una definizione di "pendenza del grafico in un punto".

Se la funzione è un polinomio di primo grado, cioè se

$$f(x) = mx + q \ ,$$

il grafico è una retta e la risposta è facilissima: la pendenza del grafico (in senso "stradale": rapporto tra quanto si sale e quanto ci si sposta in orizzontale) è data dal <u>coefficiente angolare $m$</u>. In sostanza, per chi si sposta da sinistra verso destra, se $m > 0$ il grafico è in "salita", se $m = 0$ è "piano" e se $m < 0$ è in "discesa".

Se prendiamo però una funzione il cui grafico non sia una retta, la pendenza non sarà più costante ma potrà cambiare da punto a punto.

Se prendiamo sulla retta reale due punti $x_0$ ed $x_0 + h$ abbastanza vicini, è ragionevole pensare che la "pendenza" del grafico di $f$ in $x_0$ sia vicina alla pendenza della retta che passa per i due punti corrispondenti sul grafico $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Tale pendenza è data dall'espressione

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

detta <u>rapporto incrementale</u>.

E' ragionevole pensare che prendendo $h$ sempre più piccolo (e quindi i due punti sempre più vicini) avremo un'approssimazione sempre migliore della pendenza del grafico di $f$ nel punto

$(x_0, f(x_0))$.

DEFINIZIONE: La pendenza del grafico di $f$ per $x = x_0$ si chiama derivata di $f$ in $x_0$ e si indica con $f'(x_0)$ oppure con $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ oppure $\frac{df}{dx}(x_0)$. Tale pendenza è definita da

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

(purchè il limite esista e sia finito)

Se il limite non esiste o è infinito, non è definita la pendenza e diciamo che la funzione non è derivabile in $x_0$.

Se $f'(x_0)$ esiste, la retta tangente al grafico di $f$ per $x = x_0$ sarà la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ la cui pendenza coincide con quella del grafico stesso: essa avrà dunque equazione

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Vediamo subito con un esempio l'utilità (e la potenza) della nozione di derivata. Consideriamo la funzione

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1 \; ;$$

si tratta di un polinomio di terzo grado, che non è di per se stesso troppo complicato, ma il cui grafico non è semplice da indovinare.

Calcoliamo il rapporto incrementale di $f$ tra $x_0$ ed $x_0 + h$:

troviamo

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{4(x_0+h)^3 - 6(x_0+h)^2 + 1 - (4x_0^3 - 6x_0^2 + 1)}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{4x_0^3} + 12x_0^2 h + 12x_0 h^2 + 4h^3 - \cancel{6x_0^2} - 6h^2 - 12x_0 h + \cancel{1} - \cancel{4x_0^3} + \cancel{6x_0^2} - \cancel{1}}{h} =$$

$$= \frac{12x_0^2 h + 12x_0 h^2 + 4h^3 - 6h^2 - 12x_0 h}{h} =$$

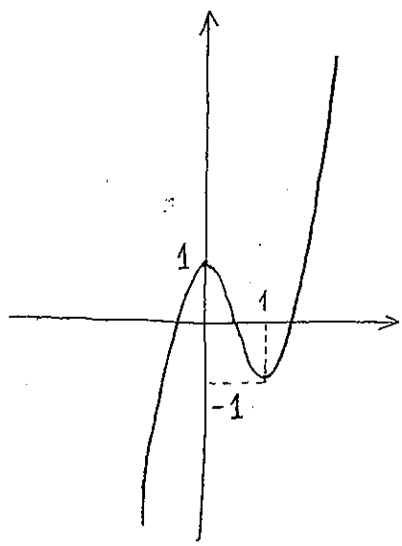
$$= 12x_0^2 + 12x_0 h + 4h^2 - 6h - 12x_0$$ e quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 12x_0^2 - 12x_0 = 12x_0(x_0-1) \,,$$

cioè
$$f'(x_0) = 12x_0(x_0-1) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Studiando il segno di questa derivata scopriamo che il grafico di $f$ è in "salita" per $x_0<0$, in "discesa" tra $0$ e $1$ e di nuovo in salita per $x_0>1$.

Se calcoliamo
$$f(0)=1, \quad f(1)=-1$$
e osserviamo che
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \,,$$
possiamo tracciare un grafico ragionevolmente preciso di $f$.



Vediamo di formalizzare queste idee, dimostrando che

$f'(x)=0 \ \forall x\in(a,b)$ implica $f$ costante in $(a,b)$

e che

$f'(x)>0 \ \forall x\in(a,b)$ implica $f$ strettamente crescente in $(a,b)$.

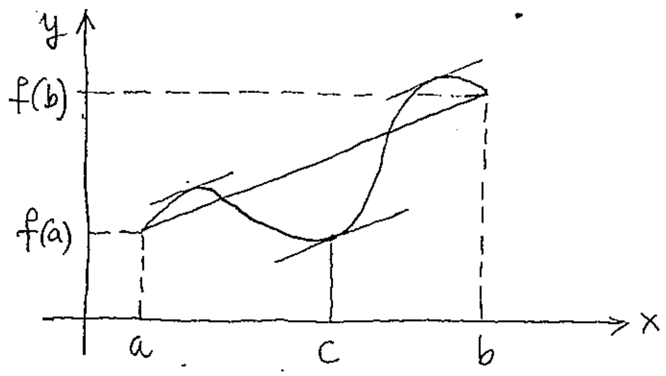
Sono fatti molto naturali, ma non di semplice dimostrazione. Per fare ciò premettiamo un risultato molto importante:

TEOREMA DEL VALORE MEDIO DIFFERENZIALE (o di LAGRANGE)

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, $f$ derivabile in $(a,b)$. Allora esiste almeno un punto $c\in(a,b)$ tale che

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)}$$

L'idea geometrica del teorema è semplice: afferma l'esistenza di un punto $c\in(a,b)$ dove $f$ ha pendenza uguale alla pendenza della retta che congiunge i punti $(a,f(a))$, $(b,f(b))$:




Noi dimostreremo il seguente caso particolare del teorema di LAGRANGE:

TEOREMA DI ROLLE

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, $f$ derivabile in $(a,b)$ e tale che $f(a)=f(b)$. Allora $\exists\, c\in(a,b)$ tale che $f'(c)=0$

<u>dimostrazione</u>:

Il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di massimo $M$ e minimo $m$ di $f$ in $[a,b]$.

Se $M=m$ allora $f$ è costante e quindi $f'(x)=0 \ \forall x \in (a,b)$.

Se $m<M$ e $f(x_m)=m$, $f(x_M)=M$, allora almeno uno dei punti $x_m, x_M$ è interno ad $(a,b)$. Supponiamo ad esempio che sia $x_m$ interno ad $(a,b)$ e vediamo che allora $f'(x_m)=0$.

Infatti, poichè $f(x_m) \leq f(x_m+h)$ $\forall h$ abbastanza piccolo, risulta

$$h>0 \Rightarrow \frac{f(x_m+h)-f(x_m)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_m+h)-f(x_m)}{h} \geq 0$$

$$h<0 \Rightarrow \frac{f(x_m+h)-f(x_m)}{h} \leq 0 \Rightarrow \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x_m+h)-f(x_m)}{h} \leq 0$$

e quindi

$$0 \leq f'(x_m) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_m+h)-f(x_m)}{h} \leq 0 ,$$

da cui $f'(x_m)=0$. Basta quindi prendere $c=x_m$ e si ha la tesi.

Il caso $x_M$ interno ad $(a,b)$ si affronta in modo analogo.

COROLLARIO DEL TEOREMA DI LAGRANGE

L1) $f'(x)=0 \ \forall x\in(a,b) \Rightarrow f(x)$ è costante in $(a,b)$

L2) $f'(x)>0 \ \forall x\in(a,b) \Rightarrow f(x)$ è strettamente crescente in $(a,b)$

L3) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ è crescente in $(a,b)$.

L4) $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x) - g(x)$ è costante in $(a,b)$

<u>dimostrazione</u>

L1) $\forall x_1, x_2 \in (a,b) \quad \exists\, c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0 \qquad \text{e quindi}$$

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \quad \forall x_1, x_2 \in (a,b), \text{ cioè}$$

$$f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in (a,b)$$

e quindi $f$ è costante in $(a,b)$

L2) Siano $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ ; sia $c \in (x_1; x_2)$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$$ ; ma allora, poiché $x_2 - x_1 > 0$,

deve essere anche $f(x_2) - f(x_1) > 0$, cioè $f(x_2) > f(x_1)$.

L3) allo studente

L4) Risulta $\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$ ;

quindi, per L1), $f(x) - g(x) = K$ (costante) $\forall x \in (a,b)$,

cioè $f(x) = g(x) + K \quad \forall x \in (a,b)$

Calcoliamo ora la derivata di alcune funzioni. Al momento l'unico strumento che abbiamo a disposizione è la definizione, ma tra poco, quando avremo visto le principali proprietà della derivazione, molti calcoli risulteranno più semplici.

1) La derivata di $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

2) La derivata di $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)\left[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2\right] = 3x^2$$

3) In generale, si ha

$$(x^p)' = p x^{p-1} \quad \forall\ p \text{ intero}$$

4) La derivata di $f(x) := \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \, \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall\ x>0$$

5) In generale si ha

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1} \qquad \forall\ x>0$$

6) Le derivate di $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[ \operatorname{sen} x \underbrace{\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)}_{\substack{\downarrow\, h\to 0 \\ 0}} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\substack{\downarrow\, h\to 0 \\ 1}} \cos x \right] = \cos x \quad ,$$

Cioè $$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

Analogamente si calcola

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

7) Sia $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

Calcoliamo $f'(0)$ ; si ha

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \,\mathrm{sen}\frac{1}{h} = 0 \quad , \text{ cioè}$$

$f'(0) = 0$. Per il calcolo di $f'(x)$ per $x \neq 0$ aspettiamo di avere qualche strumento in più.

Vediamo ora un risultato semplice ma importante e di seguito un elenco di proprietà relative all'operazione di derivazione (una sorta di algebretta, come abbiamo fatto per i limiti)

**TEOREMA**

Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b)$, allora $f$ è anche continua in $x_0$.

<u>dimostrazione</u>

Dobbiamo vedere che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, cioè che

$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ ; basta osservare che

$$\lim_{h\to 0} \left[f(x_0+h)-f(x_0)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

#

Osserviamo che il viceversa non è vero; $f(x) = |x|$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$ ma non è derivabile in $x=0$.

PROPRIETA': Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in (a,b)$.
Allora:

1) $f+g$ è derivabile in $x_0$ e si ha $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $f \cdot g$ è derivabile in $x_0$ e si ha

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

3) Se inoltre $g(x_0) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in $x_0$ e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Dimostriamo la 2), la 1) e la 3) sono lasciate al lettore.
Si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) - (fg)(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)\left[g(x_0+h) - g(x_0)\right] + g(x_0)\left[f(x_0+h) - f(x_0)\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x_0+h) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x_0) \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= f(x_0)\, g'(x_0) + g(x_0)\, f'(x_0)$$ #

ESEMPIO: Usiamo la proprietà 3) per calcolare la derivata di

$\mathrm{tg}\, x = \dfrac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}$ ; si ha

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \mathrm{sen}\, x(-\mathrm{sen}\, x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ cioè}$$

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$$

C'è un'altra proprietà molto importante perchè insieme alle 1), 2), 3) precedenti permette di calcolare miriadi di derivate senza usare la definizione.

DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA. Regola della catena

Sia $f$ definita in un intorno di $x$, derivabile in $x$, e sia $g$ una funzione definita in un intorno di $y = f(x)$, derivabile in $y$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in $x$ e si ha

$$(\ast) \quad \boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

Ad esempio, calcoliamo la derivata di $\mathrm{sen}(x^2)$:
Ponendo $f(x) = x^2$ e $g(y) = \mathrm{sen}\, y$, risulta

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \mathrm{sen}(x^2)$$

Applicando quindi $(\ast)$ si ottiene