$$\left(\text{sen}\,(x^2)\right)' = g'(x^2) \cdot f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

E' arrivato il momento di introdurre due nuove funzioni che, insieme ai polinomi ed alle funzioni trigonometriche, sono l'asse portante del nostro corso.

Se scriviamo la tabella delle derivate delle potenze

$f(x)$	$f'(x)$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{x^4}{4}$	x^3
$\frac{x^3}{3}$	x^2
$\frac{x^2}{2}$	x
x	1
$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$
$-\frac{1}{2x^2}$	$\frac{1}{x^3}$
$-\frac{1}{3x^3}$	$\frac{1}{x^4}$
$\vdots$	$\vdots$

Salta subito all'occhio che nella colonna destra manca la funzione $\frac{1}{x}$. Questo è dovuto al fatto che nessuna funzione del tipo $f(x) = a x^p$, $a \in \mathbb{R}$, può avere come derivata $\frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$, infatti dovrebbe essere

$$(a x^p)' = p a x^{p-1} = x^{-1} \quad \forall x \neq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$p a x^p = 1 \quad \forall x \neq 0 \text{ , impossibile!}$$

Siamo quindi interessati a trovare una funzione $L(x)$ tale che

$$L'(x) = \frac{1}{x} \qquad (x>0)$$

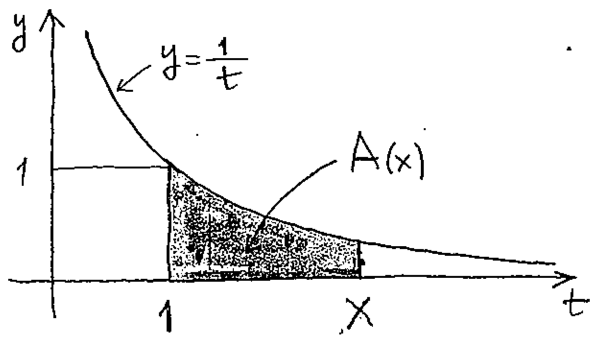
(cioè L è quello che abbiamo chiamato una <u>primitiva</u> di $\frac{1}{x}$)

Definiamo, per $x>0$,

$$L(x) = \begin{cases} \text{area}\left\{(t,y) : 1 \le t \le x \,,\ 0 \le y \le \frac{1}{t}\right\} & \text{per } x \ge 1 \\ -\text{area}\left\{(t,y) : x \le t \le 1 \,,\ 0 \le y \le \frac{1}{t}\right\} & \text{per } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

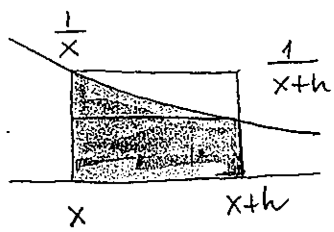
o, con scrittura più breve:

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$
$$(x>0)$$



Sia $x \ge 1$; per $h>0$ si ha

$$h \frac{1}{x+h} < L(x+h) - L(x) < h \frac{1}{x}$$



e quindi

$$\frac{1}{x+h} < \frac{L(x+h)-L(x)}{h} < \frac{1}{x} \quad , \text{ da cui}$$

$$\boxed{L'(x) = \frac{1}{x}}$$

(per $h<0$ e per $0<x<1$ si procede in modo analogo)

Studio della funzione $y = L(x)$, $x>0$.

$L(1)=0$, $L'(x) = \frac{1}{x} > 0$

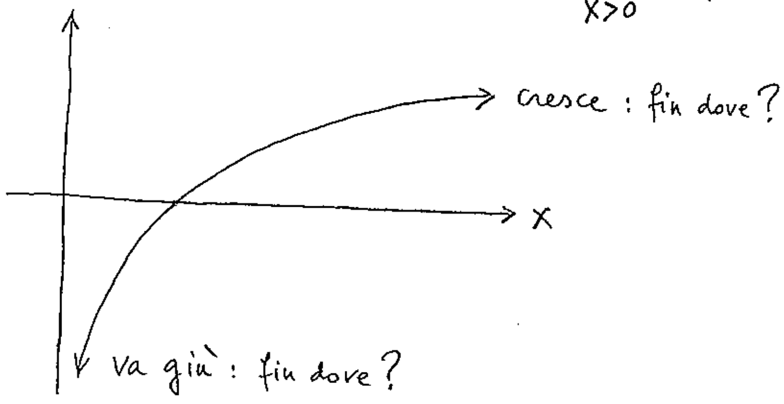
$L(x)>0$ per $x>1$

$L(x)<0$ per $0<x<1$

$L'(x) = \frac{1}{x}$ decresce

$L'(x) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

$L'(x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} +\infty$



Per rispondere a queste domande dimostriamo la proprietà fondamentale di questa funzione L.

TEOREMA (proprietà fondamentale della funzione L)

$$L(a.b) = L(a) + L(b) \quad \forall\, a>0,\, b>0$$

dimostrazione: Poniamo $G(x) = L(ax)$ e calcoliamo $G'(x)$:

$$\frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \frac{L\big(a(x+h)\big)-L(ax)}{h} = a\,\frac{L(ax+ah)-L(ax)}{ah} =$$

$$= a\,\frac{L(z+k)-L(z)}{k} \xrightarrow[\substack{h\to 0 \text{ e} \\ \text{quindi } k\to 0}]{} a\,L'(z) = a\frac{1}{z} = a\frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$

$ax = z$
$ah = k$

Quindi $G'(x) = L'(x)\ \forall\, x>0$. Ma allora (proprietà L4 a pagina 41) esiste una costante K tale che

$$G(x) = L(x) + K \quad \forall\, x>0\,,$$

cioè

$$L(ax) = L(x) + K \quad \forall\, x>0 \quad ;$$

prendendo $x=1$ si ottiene $L(a) = L(1) + K = K$ e quindi

$$L(ax) = L(x) + L(a)$$

#

Possiamo adesso dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} L(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} L(x) = -\infty$$

Infatti, reiterando la proprietà precedente, si ottiene

$$L(2^n) = n\,L(2) \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,,$$

e, poiché $L(2)>0$, si ha subito che $\lim_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$.

Notando poi che

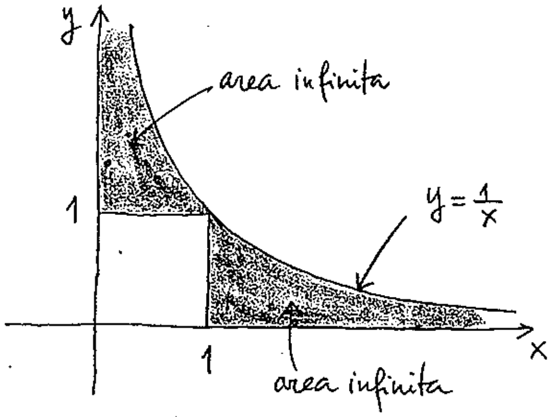
$$0 = L(1) = L(2^n\cdot 2^{-n}) = L(2^n) + L(2^{-n}) = n\,L(2) + L(2^{-n})$$

e quindi

$$L(2^{-n}) = -n\,L(2) \quad ,$$

si ottiene subito che $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} L(x) = -\infty$.

Il significato geometrico di questi due limiti è indicato nella figura seguente:



D'ora in poi useremo la notazione standard

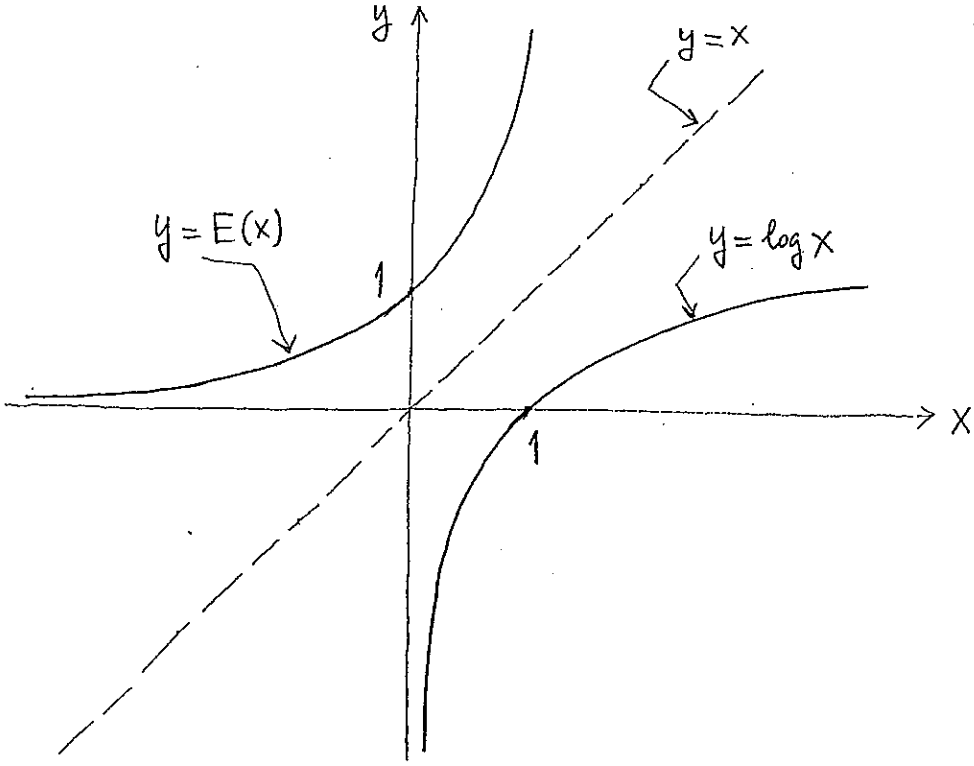
$$L(x) = \log x$$

e chiameremo la nostra funzione logaritmo di x.

Poiché $\log x$ è una funzione strettamente crescente e continua, sappiamo che è invertibile, con inversa continua. Denoteremo con E tale funzione, che è caratterizzata da

$$E(\log x) = x \quad \forall\, x > 0$$
$$\log(E(x)) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

I grafici delle funzioni $E(x)$ e $\log x$ sono, come sappiamo, simmetrici rispetto alla retta $y=x$ e quindi abbiamo la situazione in figura:



Calcoliamo la derivata di $E(x)$:

$$\frac{E(x+h)-E(x)}{h} = \frac{E(\log b)-E(\log a)}{\log b-\log a} = \frac{b-a}{\log b - \log} =$$

$x+h = \log b$
$x = \log a$ quindi $E(x+h)=b$
$E(x)=a$

$$= \frac{1}{\dfrac{\log b-\log a}{b-a}} \xrightarrow[\text{e quindi } b\to a]{h\to 0} \frac{1}{(\log)'(a)} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a = E(x),$$

quindi

$$E'(x) = E(x) \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

Ora, dalla proprietà fondamentale del logaritmo

$$\log(xy) = \log x + \log y \qquad \forall x>0, y>0$$

segue la proprietà fondamentale della funzione E:

PROPRIETA':

$$E(a+b) = E(a)\cdot E(b) \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

<u>dimostrazione</u>

Posto $a = \log x$, $b = \log y$, si ha

$$E(a+b) = E(\log x + \log y) = E(\log(xy)) = xy = E(a)\cdot E(b)$$

#

Reiterando questa proprietà si ottiene subito che

$$E(n) = [E(1)]^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e con qualche piccola fatica in più, si può dimostrare che

$$E(q) = [E(1)]^q \qquad \forall q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$$

Definiamo ora:

$$e^x = E(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

In particolare $e = E(1)$. La funzione e^x si chiama <u>funzione esponenziale</u>.

Vediamo che effettivamente $e = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, come preannunciato a pagina 33. Si ha

$$1+\frac{1}{n} = e^{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \quad \text{e quindi}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left[e^{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]^n = e^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= e^{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log 1}{\frac{1}{n}}} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{n\to+\infty} e^{(\log)'(1)} = e^1 = e$$

NOTA: La funzione $\log x$ si chiama anche <u>logaritmo in base e</u> di x o <u>logaritmo naturale</u> di x e si denota a volte con $\log_e x$ o $\ln x$.

Riassumendo, abbiamo introdotto due nuove funzioni

$$\log x \quad \text{ed} \quad e^x ,$$

con le seguenti proprietà:

$\log : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$	$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$
$\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$e^{\log x} = x \quad \forall x > 0$
$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$	$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
$(\log x)' = \frac{1}{x}$	$(e^x)' = e^x$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log^p x}{\sqrt[n]{x}} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}$

Le ultime due proprietà riguardanti i limiti di forme indeterminate date dal rapporto tra logaritmo e radici e tra esponenziale e potenze sono molto importanti e con pazienza si potrebbero dimostrare con disuguaglianze opportune e con l'uso del teorema dei carabinieri. Noi invece le dimostreremo usando un teorema estremamente utile, anche in molte altre occasioni, per il calcolo delle forme indeterminate

$$\frac{0}{0} \quad e \quad \frac{\infty}{\infty} .$$

TEOREMA DI de L'HÔPITAL

Siano f, g due funzioni derivabili in un intorno di x_0.

Supponiamo che sia $g'(x) \neq 0$ in tale intorno e che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Se esiste (finito o infinito) il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

allora esiste anche il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

e si ha

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Il torema è vero anche se $x_0 = \pm\infty$.

Non dimostreremo questo teorema, ma lo applichiamo per dimostrare, ad esempio, che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

Si ha $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Se volessimo dimostrare che, ad esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 , \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^2}{x^{\frac{1}{10}}} = 0 ,$$

basterà applicare due volte il teorema di de L'HÔPITAL ; si ha infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^2}{x^{\frac{1}{10}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 \log x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{10} x^{\frac{1}{10}-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{20 \log x}{x^{\frac{1}{10}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{20 \frac{1}{x}}{\frac{1}{10} x^{\frac{1}{10}-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{200}{x^{\frac{1}{10}}} = 0$$

Calcoliamo $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x(\log x)^2$, $n\in\mathbb{N}$; scrivendo questo limite nella forma $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{(\log x)^2}{\frac{1}{x}}$, siamo ricondotti ad una forma $\frac{\infty}{\infty}$ e possiamo applicare la regola di de L'HÔPITAL ; risulta

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(\log x)^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\log x)^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\log x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= -2\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = -2\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$$

Per concludere il discorso su logaritmo ed esponenziale, definiamo un'altra funzione, detta <u>esponenziale generale</u> o <u>esponenziale di base a</u>.

Sia $a>0$; poichè $a=e^{\log a}$, risulta naturale definire

$$\boxed{a^x = \left(e^{\log a}\right)^x = e^{x\log a}}$$

Le seguenti proprietà sono conseguenza immediata della definizioni e delle proprietà di e^x:

1) $\log(a^x) = \log\left(e^{x\log a}\right) = x\log a$

2) $a^{x+y} = a^x\cdot a^y$

3) $(a^x)^y = a^{xy}$

4) $(a^x)' = a^x\log a$

dimostriamo la 4): per $a\neq 1$ abbiamo

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = a^x\,\frac{a^h-1}{h} = a^x\,\frac{e^{h\log a}-e^0}{h} =$$

$$= a^x \log a\,\frac{e^{h\log a}-e^0}{h\log a} \xrightarrow[h\to 0]{} a^x \log a\,(e^x)'\Big|_{x=0} =$$

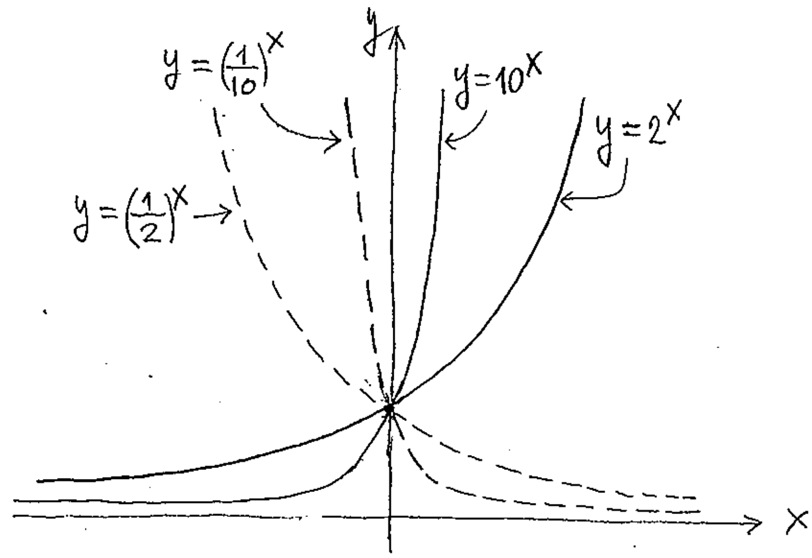
$$= a^x \log a$$

Se invece $a=1$ abbiamo $a^x = 1 \ \forall x$ e la 4) è banale.

Notiamo che

$a>1 \implies a^x$ è strettamente crescente

$a<1 \implies a^x$ è strettamente decrescente



Se $a>0$, $a\neq 1$, la funzione a^x è invertibile; la sua inversa si chiama <u>logaritmo in base a</u> di x e si indica con $\log_a x$

Bene, ora che abbiamo a disposizione una buona quantità di funzioni con le loro proprietà (polinomi, trigonometriche, logaritmo e le loro inverse), ed abbiamo fatto una considerevole mole di conti, osservazioni et similia, possiamo scrivere qui di seguito un piccolo vademecum per lo studio di una qualsiasi funzione costruita sommando, moltiplicando, componendo tali funzioni.

Prima di fare questo schemino, introduciamo i concetti di massimo e minimo relativi (o locali)

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$; un punto $x_0\in(a,b)$ si dice di <u>massimo relativo</u> per f se esiste un intorno I_{x_0} di x_0 tale che

$$f(x)\leq f(x_0)\quad \forall\, x\in I_{x_0}$$

Il valore $f(x_0)$ si dice un <u>massimo relativo</u> di f

Analogamente si definiscono punti di minimo relativo e minimo relativo.

Quando in futuro studieremo una funzione, saremo interessati alla ricerca del suo massimo e del suo minimo assoluti o globali, dei suoi massimi e minimi relativi o locali, della sua "curvatura" (convessità o concavità), dei suoi eventuali asintoti, ecc. ecc.

Cominciamo con lo studiare una funzione continua definita in un intervallo chiuso $[a,b]$,

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

Il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza del massimo e del minimo assoluti. Se ci sono punti dove la funzione non è derivabile, tali punti vanno studiati a parte, assieme agli estremi $x=a$ e $x=b$. Per quanto riguarda gli altri punti, si cercheranno quelli dove $f'(x)=0$, detti <u>punti critici</u>. Lo studio del segno della derivata dirà se sono punti di massimo o minimo relativi oppure se sono punti cosiddetti di <u>sella</u>, cioè punti dove cambia la curvatura. La curvatura sarà data dalla crescenza (convessità) o decrescenza (concavità) della derivata.

Una osservazione utile: la crescenza o decrescenza della derivata è data a sua volta del segno della sua derivata, cioè dal segno di quella che si chiama <u>derivata seconda</u>, che si denota con $f''(x)$.

Riassumendo, possiamo dire

$$f'(x_0)=0\ ,\ f''(x_0)>0 \implies x_0 \text{ è punto di minimo relativo}$$

$$f'(x_0)=0\ ,\ f''(x_0)<0 \implies x_0 \text{ è punto di massimo relativo}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0 \\ f'''(x_0)=(f'')'(x_0)\neq 0 \end{array}\right| \implies \begin{array}{l} x_0 \text{ è punto di sella} \\ \text{(a tangente orizzontale).} \end{array}$$

Una volta individuati tali punti, non rimane che il confronto con gli eventuali punti di non derivabilità e con gli estremi $x=a$, $x=b$ dell'intervallo.

Chiaramente se la funzione è definita in un intervallo che non è chiuso e limitato, il teorema di Weierstrass non è più applicabile e non è detto che la funzione abbia massimo e/o minimo assoluto: potrebbe essere superiormente o inferiormente illimitata. Supponiamo ad esempio di avere f definita in $(a,b]$ (o in $(-\infty,b]$); per verificare la limitatezza o meno di f bisogna studiare

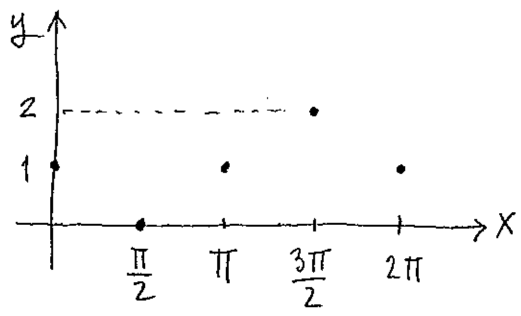
$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) \qquad \left(\text{o } \lim_{x\to -\infty} f(x)\right)$$

Facciamo un paio di esempi

ESEMPIO 1

Sia $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=1-\operatorname{sen}x$.

Si ha $f(0)=1$, $f(2\pi)=1$



In generale, se ci sono punti in cui è facile calcolare il valore della funzione, vale la pena farlo. Qui ad esempio si ha

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \quad f(\pi)=1, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2$$

Calcoliamo i punti dove $f'(x)=0$; deve essere

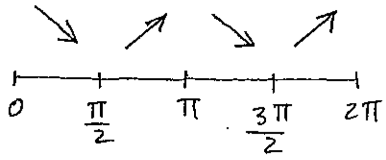
$$-\cos x=0 \quad \text{e quindi} \quad x=\frac{\pi}{2}, \; x=\frac{3\pi}{2}$$

Questi sono punti candidati ad essere di massimo o minimo locale. Studiamo il segno di $f'(x)$.

$$f'(x)>0 \iff -\cos x>0 \iff \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2},$$

$f'(x) < 0 \iff 0 < x < \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Questo significa che f decresce in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e cresce in $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; se ne deduce che



$\frac{\pi}{2}$ è punto di minimo relativo, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\frac{3\pi}{2}$ è punto di massimo relativo, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$.

Poichè non ci sono punti di non derivabilità, resta solo da confrontare questi valori con $f(0)$ ed $f(2\pi)$; si ha

$0 < f(0) = 1 < 2$ ed $0 < f(2\pi) = 1 < 2$

e quindi $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ sono punti di minimo e massimo assoluto per la funzione f, valore minimo $= 0$, valore massimo $= 2$.

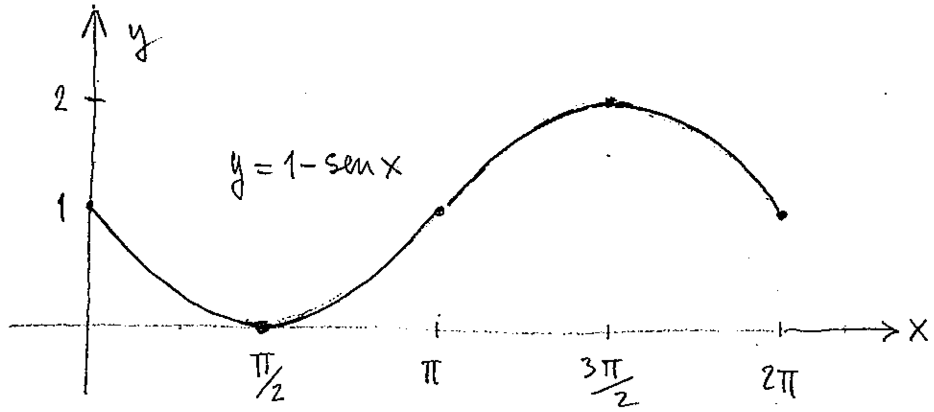
Per finire, studiamo la curvatura di $G(f)$: si ha

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(-\cos x\right)' = \operatorname{sen} x,$$

quindi f' cresce dove $\operatorname{sen} x > 0$, cioè in $0 < x < \pi$, e decresce dove $\operatorname{sen} x < 0$, cioè in $\pi < x < 2\pi$.

Si avrà dunque che f è convessa in $[0, \pi]$ e concava in $[\pi, 2\pi]$. Possiamo disegnare adesso il grafico di f in maniera accurata, magari dopo aver anche guardato a che cosa tende la sua derivata quando x si avvicina agli estremi dell'intervallo :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-\cos x) = -1 \quad , \quad \lim_{\substack{x\to 2\pi\\ x<2\pi}} (-\cos x) = -1$$



ESEMPIO 2 : Sia $f:[-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}+\frac{1}{2} & \text{in } -1\leq x\leq 0 \\ x & \text{in } 0<x\leq 1 \\ -x^2+4x-2 & \text{in } x>1 \end{cases}$$

La prima cosa da fare è guardare dove si raccordano le tre diverse espressioni di f, cioè i punti $x=0$ ed $x=1$.
Si vede subito che

$$\frac{1}{2} = f(0) \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0 \quad ,$$

quindi f non è continua in $x=0$ (e a maggior ragione non è derivabile in $x=0$). Si vede anche subito che

$$1 = f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (-x^2+4x-2) = 1$$

e quindi f è continua in $x=1$. Poi vedremo che in $x=1$ la f non è derivabile.

In ognuno degli intervalli $[-1,0]$ e $(0,1]$ il grafico di f è costituito da segmenti di retta, quindi non ci sono da cercare punti critici ma solo da osservare che

$$f(-1)=1, \quad f(0)=\frac{1}{2}, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0, \quad f(1)=1$$

Studiamo $f(x)$ in $(1,+\infty)$:

$$f'(x)=-2x+4 \begin{cases} >0 & \text{per } x<2 \\ =0 & \text{in } x=2 \\ <0 & \text{per } x>2 \end{cases};$$

se ne deduce che $x=2$ è un punto di massimo relativo, $f(2)=2$.

Vediamo ora se la funzione è derivabile in $x=1$. Si ha, usando la regola di de l'HÔPITAL,

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = 1 \quad ,$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(-2x+4\right) = 2 \neq 1$$

e quindi $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ non esiste, cioè, f non è derivabile in $x=1$.

Vediamo come si comporta la f quando $x \to +\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^2+4x+2\right) = \lim_{x \to +\infty} \left[-x\left(x+4+\frac{2}{x}\right)\right] = -\infty$$

Vediamo dove $G(f)$ interseca l'asse delle x; deve essere

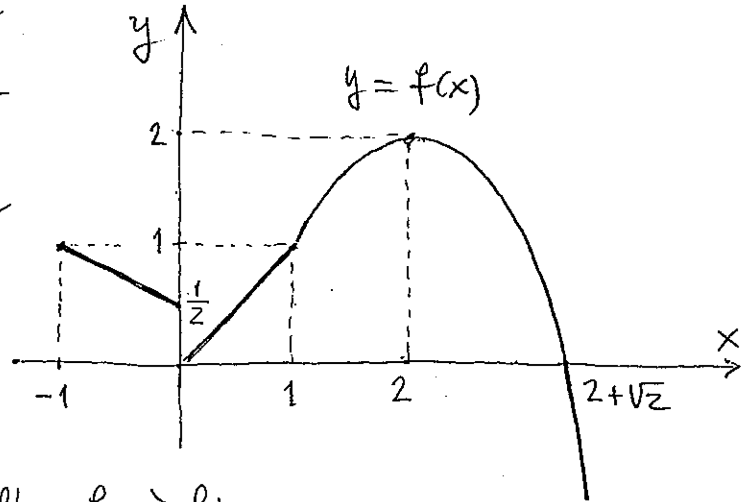
$$-x^2+4x-2 = 0 \quad \text{e quindi} \quad x = 2 \pm \sqrt{2},$$

e poichè deve essere $x > 1$, avremmo $x = 2+\sqrt{2}$.

Infine, studiamo la curvatura di $G(f)$ in $(1,+\infty)$;

$$f''(x) = (-2x+4)' = -2 < 0 \;; \quad G(f) \text{ è concavo.}$$

Riassumendo lo studio fatto si ricava che $x=2$ è punto di massimo assoluto, valore massimo $f(2)=2$, e poichè $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, la f



non ha minimo. Inoltre f è lineare à tratti in $[-1,1]$ e concava per $x>1$. Possiamo adesso disegnare il grafico di f (vedi figura).

OSSERVAZIONE: Lo studio di funzioni è importante anche per la ricerca di soluzioni di equazioni. Se volessimo sapere quante soluzioni ha ad esempio l'equazione

$$3 \log x = 3x^2+1,$$

la strada da percorrere sarebbe quella di studiare la funzione

$$f(x) = 3\log x - 3x^2 - 1$$

per vedere se $G(f)$ incontra l'asse delle x. Facciamolo.

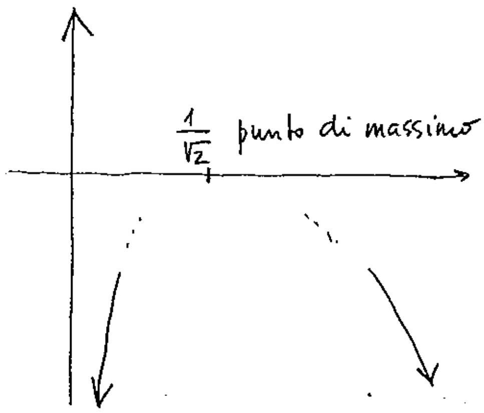
Intanto notiamo che f è definita solo per $x>0$ e che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-x^2\left(3+\frac{1}{x^2}-3\,\frac{\log x}{x^2}\right)\right] = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$$

Inoltre $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 6x = \dfrac{3}{x}\left(1-2x^2\right)$ e quindi

$$f'(x)\begin{cases} >0 & \text{per } 0<x<\frac{1}{\sqrt{2}} \\ =0 & \text{in } x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ <0 & \text{per } x>\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



Quindi, risulta chiaro che

Se $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$ ci sono due soluzioni

Se $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$ c'è un unica soluzione

se $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$ non ci sono soluzioni

Ora $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\log\frac{1}{\sqrt{2}} - 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = -3\log\sqrt{2} - \frac{3}{2} - 1 < 0$

(perchè $\log\sqrt{2} > \log 1 = 0$)

Quindi $\nexists$ soluzione dell'equazione $3\log x = 3x^2+1$.

Conviene precisare che spesso in matematica è già molto importante sapere se un'equazione ha o meno soluzioni, e se ne ha, quante sono, prima di affrontare eventualmente il problema di trovare il loro valore numerico.

E' arrivato il momento di formalizzare un concetto che peraltro abbiamo già abbondantemente usato: il concetto di area e di integrale.

INTEGRAZIONE

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa, cioè

$$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Vogliamo definire l'area dell'insieme

$$S(f) = \{(x,y) : \ a \leq x \leq b, \ \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Siano x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, punti in $[a,b]$ tali che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad ;$$

in questo modo $[a,b]$ risulta diviso in n intervallini

$$[x_{i-1} ; x_i] \ , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Per ogni $i = 1, 2, \dots, n$ scegliamo un punto $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e consideriamo il rettangolo di base $[x_{i-1}, x_i]$ e altezza $f(\bar{x}_i)$, la cui area è evidentemente $f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$.