la strada da percorrere sarebbe quella di studiare la funzione

$$f(x) = 3\log x - 3x^2 - 1$$

per vedere se $G(f)$ incontra l'asse delle x. Facciamolo.

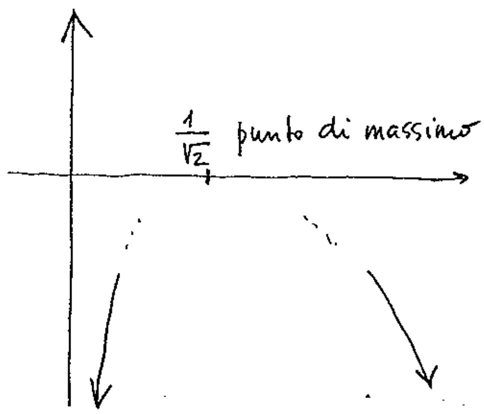
Intanto notiamo che f è definita solo per $x>0$ e che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-x^2\left(3+\frac{1}{x^2}-3\frac{\log x}{x^2}\right)\right] = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$$

Inoltre $f'(x) = \frac{3}{x} - 6x = \frac{3}{x}\left(1-2x^2\right)$ e quindi

$$f'(x)\begin{cases} >0 & \text{per } 0<x<\frac{1}{\sqrt{2}} \\ =0 & \text{in } x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ <0 & \text{per } x>\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



Quindi, risulta chiaro che

Se $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$ ci sono due soluzioni

Se $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$ c'è un unica soluzione

se $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$ non ci sono soluzioni

Ora $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\log\frac{1}{\sqrt{2}} - 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = -3\log\sqrt{2} - \frac{3}{2} - 1 < 0$

(perchè $\log\sqrt{2} > \log 1 = 0$)

Quindi $\nexists$ soluzione dell'equazione $3\log x = 3x^2+1$.

Conviene precisare che spesso in matematica è già molto importante sapere se un'equazione ha o meno soluzioni, e se ne ha, quante sono, prima di affrontare eventualmente il problema di trovare il loro valore numerico.

E' arrivato il momento di formalizzare un concetto che peraltro abbiamo già abbondantemente usato: il concetto di area e di integrale.

INTEGRAZIONE

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa, cioè

$$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$$

Vogliamo definire l'area dell'insieme

$$S(f) = \{(x,y): \ a \leq x \leq b, \ \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Siano x_i, $i=0,1,\dots,n$, punti in $[a,b]$ tali che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad ;$$

in questo modo $[a,b]$ risulta diviso in n intervallini

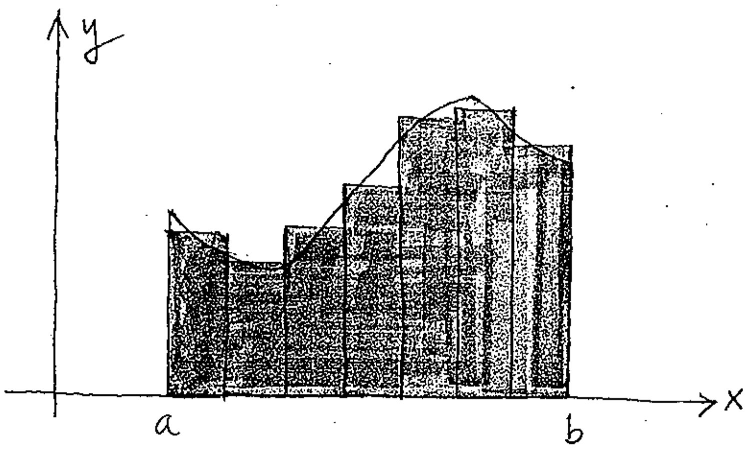
$$[x_{i-1}; x_i] \ , \quad i=1,2,\dots,n$$

Per ogni $i=1,2,\dots,n$ scegliamo un punto $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e consideriamo il rettangolo di base $[x_{i-1}, x_i]$ e altezza $f(\bar{x}_i)$, la cui area è evidentemente $f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$.

La somma

$$\boxed{R_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})}$$

si chiama <u>somma di Riemann</u>



E' del tutto ragionevole pensare che prendendo le lunghezze degli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ sempre più piccole (e quindi necessariamente prendendo n sempre più grande), le somme R_n approssimeranno sempre di più quella che dovrebbe essere l'area di $S(f)$. Se per semplicità prendiamo tutti gli intervallini $[x_{i-1}, x_i]$ della stessa lunghezza, e quindi

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \qquad \forall\, i = 1, \dots, n \;,$$

risulta

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)$$

Nelle pagine 11-14 abbiamo già usato questa idea per calcolare l'area sotto la parabola $y=x^2$, $0\le x\le b$. In quel caso abbiamo preso come $\overline{x}_i$ l'estremo destro dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, cioè $\overline{x}_i = x_i$, ottenendo così approssimazioni per eccesso dell'area cercata; risultava

$$R_n = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$= \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \overset{n}{\searrow} \frac{b^3}{3}$$

La freccia $\searrow$ sta a indicare che $\frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$ è decrescente

Se avessimo preso invece $\overline{x}_i = x_{i-1}$ avremmo ottenuto approssimazioni per difetto,

$$R_n = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 =$$

$$= \frac{b^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \overset{n}{\nearrow} \frac{b^3}{3},$$

dove adesso $\nearrow$ indica che $\frac{b^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$ è crescente.

In generale, si ha il seguente

TEOREMA: Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua; allora esiste il limite

$$(*)\qquad \lim_n R_n$$

e tale limite è indipendente dalla scelta dei punti $\overline{x}_i$. Tale limite viene detto integrale da a a b della funzione f e si scrive

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

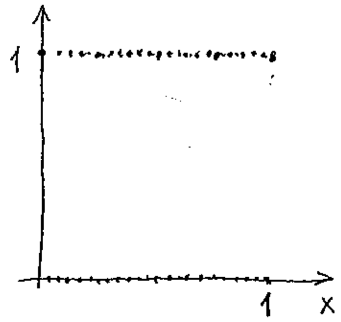
In realtà questo limite esiste ed è indipendente dalla scelta dei punti $\overline{x}_i$ anche in casi più generali. In questi casi diremo che f è integrabile. Ad esempio, se $a<c<b$ ed f è continua in $[a,c]$ e $[c,b]$, allora f è integrabile in $[a,b]$.

Osserviamo che il limite $(*)$ esiste anche se f cambia segno in $[a,b]$. In questo caso l'integrale corrisponde alla somma algebrica delle aree sopra e sotto l'asse delle x.

NOTA: non vogliamo qui addentrarci nel dettaglio della questione, ma è interessante notare che se la funzione non è continua le cose non vanno sempre così lisce, cioè ci sono funzioni per le quali il comportamento delle somme di Riemann non è indipendente dalla scelta degli $\overline{x}_i$ e quindi si possono ottenere limiti diversi a seconda della scelta di tali punti. In questo caso non si può parlare di integrale.

Per fare un esempio introduciamo una funzione diabolica, la funzione di DIRICHLET in $[0,1]$:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{se } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$



Poichè in ogni intervallo ci sono sia punti razionali che irrazionali, già tentare di disegnare il grafico di questa funzione crea dei problemi.

La funzione di DIRICHLET è un esempio di funzione discontinua in ogni punto. Per quanto riguarda le relative somme di Riemann, vediamo che se si prende $\overline{x}_i \in \mathbb{Q} \ \forall i$, si ha

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{n}\cdot n = 1 \xrightarrow{n} 1$$

mentre se si prende $\overline{x}_i \notin \mathbb{Q} \ \forall i$, risulta

$$R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 0 = 0 \xrightarrow{n} 0$$

Quindi, non è possibile parlare di integrale di $f(x)$. La funzione di DIRICHLET non è integrabile.

Come per i limiti e le derivate, vediamo un elenco di proprietà anche per l'integrale:

PROPRIETÀ: Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue; allora

1) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2) $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3) Se $c \in (a,b)$ allora $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4) $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$; in particolare

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) ,$$

dove m ed M sono rispettivamente il valore minimo e massimo di f in $[a,b]$.

5) $\int_a^b f(x)g(x)dx$ è in generale diverso da $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$;

ad esempio, se $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$, si ha

$$\int_0^b f(x)g(x)dx = \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} ,$$ mentre

$$\int_0^b f(x)dx \cdot \int_0^b g(x)dx = \frac{b^3}{3} \cdot b = \frac{b^4}{3} \neq \frac{b^3}{3} \quad \text{se } b \neq 1$$

Per comodità, definiamo

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Dimostriamo ora il

TEOREMA del VALOR MEDIO INTEGRALE

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua ; allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$

<u>dimostrazione</u> : Abbiamo visto in 4) che

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) , \quad \text{cioè}$$

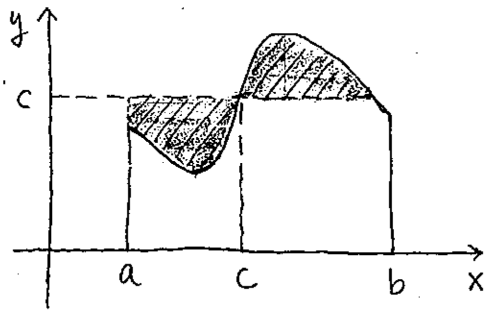
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M .$$

Poiché, grazie al teorema dei valori intermedi, f assume tutti i valori tra m ed M, esiste $c \in (a,b)$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

✱

Il significato geometrico di questo teorema è immediato ed è illustrato nella figura a lato.



Abbiamo già visto che anche per una funzione semplice come $f(x) = x^2$, il calcolo del suo integrale mediante le somme di Riemann non è molto agevole (vedi pagine 11-14). Per giungere ad un metodo che spesso permette di calcolare in modo semplice un integrale, introduciamo il concetto di <u>primitiva</u> o <u>antiderivata</u>.

DEFINIZIONE: Si dice che una funzione $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva in $[a,b]$ di $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ se e solo se

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Conoscendo molte funzioni con le loro derivate è immediato ricondursi a molte funzioni con le loro primitive. Ad esempio, x^2 è una primitiva di $2x$,

$$\frac{x^{p+1}}{p+1} \text{ è una primitiva di } x^p \quad \text{per } p \neq 1,$$

$\log x$ è una primitiva di $\frac{1}{x}$, e^x è una primitiva di e^x,

$-\cos x$ è una primitiva di $\operatorname{sen} x$, ecc. ecc. In realtà durante il corso abbiamo già affrontato il problema delle primitive nella ricerca dell'area del sottografico di x^2 e nella definizione del logaritmo.

E' immediato notare che se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, anche

$$G(x) = F(x) + K \qquad (K \text{ costante})$$

lo è; infatti

$$G'(x) = F'(x) + K' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Quindi, quando conosciamo una primitiva di f, in realtà ne conosciamo infinite. Più interessante è il viceversa, e cioè che se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora ogni altra primitiva di $f(x)$ è della forma $F(x) + K$, K costante (e quindi, trovata una primitiva di $f(x)$, le abbiamo trovate tutte).

Precisamente, si ha il seguente

TEOREMA: Se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di $f(x)$, allora

$$G(x) - F(x) = \text{costante}$$

<u>dimostrazione</u>: E' immediata, in quanto

$$\left(G(x)-F(x)\right)' = G'(x)-F'(x) = f(x)-f(x) = 0 \quad \forall\, x$$

#

LA FUNZIONE INTEGRALE

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile; la <u>funzione integrale</u> associata è definita mediante

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad a \leq x \leq b$$

$F(x)$ rappresenta l'area con segno da a ad x, la variabile è l'estremo superiore di integrazione.

C'è da notare l'uso del simbolo t per la variabile di integrazione; è chiaro che si può usare un simbolo qualunque (meglio non x per evitare confusione); tali simboli, come l'indice i in una sommatoria $\sum_{i=1}^{3} a_i$, si dicono muti proprio perchè la scelta del nome non cambia nulla.

Siamo ora in grado di dimostrare un teorema estremamente importante, che, tra le altre cose, darà anche una ricetta utilissima per il calcolo di integrali:

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile, sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

la funzione integrale associata; si ha

1) Se f è continua in $[a,b]$, allora F è derivabile in $[a,b]$ e si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

2) Se $G(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$, si ha

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$$

dove $G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$ è semplicemente una notazione.

<u>dimostrazione</u>

1) Sia $x \in [a,b]$; si ha

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} =$$

$$= \frac{h\,f(c_x)}{h} = f(c_x) \xrightarrow{h \to 0} f(x)$$

c_x è un punto opportuno fra x ed $x+h$, vedi il teorema del valor medio integrale

$h \to 0 \Rightarrow c_x \to x$ e f è continua

2) Sia $G(x)$ una primita di $f(x)$; per 1) anche $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ e quindi esiste una costante K tale che

$$F(x) = G(x) + K \quad \forall x \in [a,b]$$

Poichè $F(a) = 0$, risulta $K = -G(a)$ e quindi

$$F(x) = G(x) - G(a) \;;$$

In particolare, per $x=b$, otteniamo

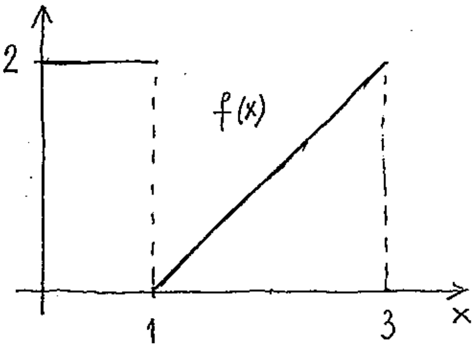
$$F(b) = \int_a^b f(t)dt = G(b)-G(a)$$

#

E' interessante notare che, anche se $f(x)$ ha dei punti di discontinuità (ma rimane limitata), la funzione $F(x)$ è una funzione continua.

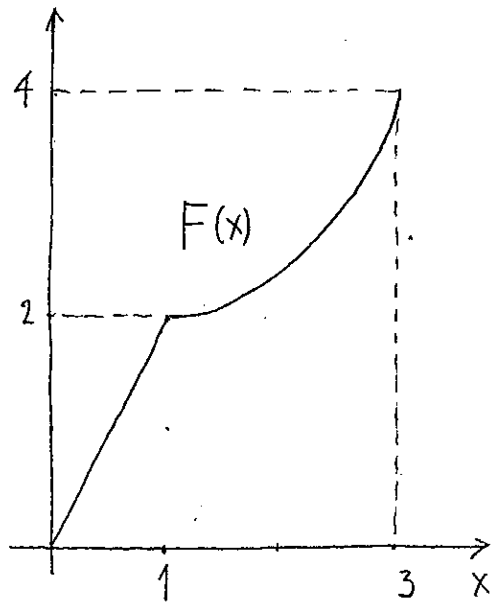
Facciamo un esempio: sia

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$



Posto $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, si ottiene facilmente che

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 + \dfrac{(x-1)(x-1)}{2} & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases},$$



cioè

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{5}{2} & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Si ha $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} F(x) = 2 = F(1)$

e quindi $F(x)$ è continua anche in $x=1$.

Si osservi che tuttavia F non è derivabile in $x=1$.

Osserviamo che, per quanto riguarda la parte 2) del teorema, essa ci assicura che, se conosciamo una primitiva $G(x)$ della funzione $f(x)$, per calcolare l'integrale di quest'ultima non dovremo più calcolare le somme di Riemann e farne il limite, ma basterà semplicemente calcolare $G(x)$ nei due estremi dell'intervallo.

La parte 1) del teorema ci assicura che ogni funzione $f(x)$ continua ha una primitiva. E' suggestivo scrivere

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Questa scrittura esplicita il legame tra integrazione e derivazione, mostrando come, in un certo senso, esse siano una l'operazione inversa dell'altra. Proprio per questo storicamente si è usata la notazione dell'integrale anche per indicare le primitive. Precisamente, si usa la nozione di integrale indefinito:

DEFINIZIONE: Si dice <u>integrale indefinito</u> di f e si scrive

$$\int f(x)\,dx \qquad \left(\text{o anche semplicemente } \int f\right)$$

una primitiva arbitraria di $f(x)$.

Quindi, mentre $\int_a^b f(x)dx$ è un numero, $\int f(x)dx$ è una funzione scelta in un insieme di funzioni che differiscono per una costante.

Ad esempio

$$\int e^x dx = e^x\,, \quad \int \frac{1}{x} = \log|x|\,,\ (x\neq 0)\,, \quad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\,, \quad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Tenendo conto delle proprietà delle derivate, si vede immediatamente che per l'integrale indefinito vale:

$$\int (f+g) = \int f + \int g \quad , \quad \int kf = k \int f \quad (k \text{ costante})$$

NOTA: La parte 1) del teorema fondamentale del calcolo ci assicura l'esistenza di $\int f(x)\,dx$ per ogni funzione $f(x)$ continua.

Questo non significa che $\int f(x)\,dx$ si possa sempre calcolare esplicitamente mediante combinazioni di funzioni elementari (polinomi, radici, logaritmi, esponenziali e funzioni trigonometriche). Ad esempio

$$\int e^{x^2} dx \quad , \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \quad , \quad \int \cos(x^2)\, dx$$

non sono calcolabili esplicitamente.

Nonostante conosciamo le primitive delle funzioni più importanti, non è immediato come trovare le primitive di funzioni anche dall'aspetto molto semplice come ad esempio $\log(3x)$ o $x \operatorname{sen} x$. Per questo vedremo adesso due tecniche molto utili:

l'integrazione per parti

l'integrazione per sostituzione

INTEGRAZIONE PER PARTI

La formula della derivata di un prodotto dice che

$$f'g = (fg)' - fg' \quad ; \quad \text{ne segue che}$$

$$\int f'g = \int (fg)' - \int fg' \ , \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{\int f'g = fg - \int fg'}$$

Ovviamente, questa formula è comoda quando $\int fg'$ risulta più semplice di $\int f'g$ e chiaramente sta a noi decidere, quando abbiamo l'integrale di un prodotto, quale dei due fattori considerare come f' e quale come g.

Facciamo un esempio:

$\int x e^x dx$ si può vedere come

$\int \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^x dx$ oppure come $\int x (e^x)' dx$.

Qui non ci sono dubbi: nel primo caso l'integrazione per parti addirittura complicherebbe le cose, mentre nel secondo caso sembra che le cose migliorerebbero. Proviamo:

$$\int (e^x)' x\, dx = e^x . x - \int e^x (x)' dx = e^x . x - \int e^x dx =$$

$$= e^x x - e^x = e^x (x-1)$$

Negli integrali $\int P(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx$; $\int P(x)\cos x\,dx$, dove $P(x)$ è un polinomio, conviene scegliere $\mathrm{sen}\,x$ e $\cos x$ come $f'(x)$; negli integrali $\int P(x)\,e^x\,dx$ conviene scegliere come $f'(x)$ la funzione e^x. L'esperienza è comunque molto importante. Vediamo un caso particolare: il calcolo della primitiva di $\log x$ (anche se $\log x$ non sembra essere un prodotto...). Trucchetto :

$$\int \log x\,dx = \int 1.\log x\,dx = \int (x)'\log x\,dx =$$

$$= x\log x - \int x\,(\log x)'\,dx = x\log x - \int 1.dx =$$

$$= x\log x - x = x(\log x - 1).$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Dalla formula di derivazione di una funzione composta si ha che, se $G(t)$ è una primitiva di $g(t)$ (cioè $G'(t) = g(t)$), allora $G(f(x))$ è una primitiva di $g(f(x)).f'(x)$; infatti

$$\left(G(f(x))\right)' = G'(f(x)).f'(x) = g(f(x))\,f'(x)$$

Quindi, posto $t = f(x)$, da $G(f(x)) = G(t) = \int g(t)\,dt$, risulta

$$\boxed{\int g(t)\,dt = \int g(f(x))\,f'(x)\,dx}$$

Un modo semplice per ricordare questa regola è il seguente:

Se $t = f(x)$, allora $\frac{dt}{dx} = f'(x)$ e, trattando dt e dx come entità a sé stanti, ricaviamo

$$dt = f'(x)\,dx$$

Se adesso consideriamo $\int g(t)\,dt$, possiamo passare a $\int g(f(x))\,f'(x)\,dx$ semplicemente sostituendo

$$t \text{ con } f(x) \quad \text{e} \quad dt \text{ con } f'(x)dx \,.$$

Sembra tutto un pò magico, però funziona.
Anche con l'integrazione per sostituzione conta molto l'esperienza e l'allenamento.

Facciamo un esempio: calcoliamo

$$\int \log(5t)\,dt$$

Se fosse $\int \log t\,dt$, lo sapremo fare; l'idea è quindi quella di "cambiare variabile", ponendo $5t = x$, cioè

$$t = \frac{x}{5}\,, \quad \text{quindi} \quad dt = \frac{1}{5}\,dx \,.$$

Risulta così

$$\int \log(5t)\,dt = \int \log x \cdot \frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int \log x\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\,x\left(\log x - 1\right) = \frac{1}{5}\,5t\left(\log(5t) - 1\right) =$$

$$= t\left(\log(5t) - 1\right)$$

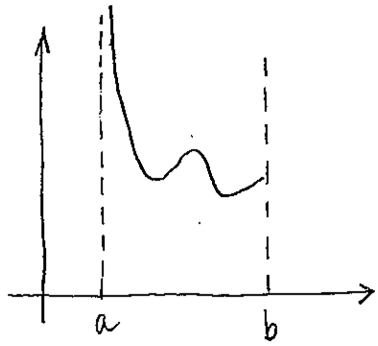
INTEGRALE IMPROPRIO

Torniamo ora all'integrale definito. Sinora abbiamo considerato

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

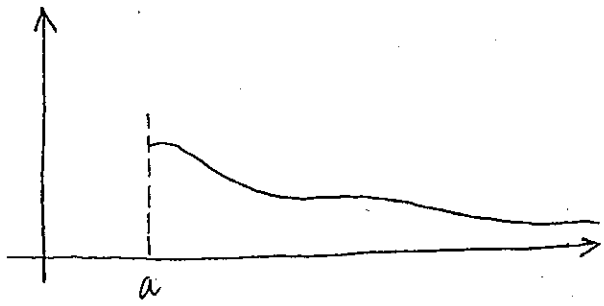
quando f è continua in $[a,b]$. Vogliamo considerare ora i due casi seguenti:

1) $\int_a^b f(x)\,dx$ quando f è continua in $(a,b]$



2) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$,

f continua in $[a,+\infty)$



(analogamente, i casi f continua in $[a,b)$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$).

Integrali di questo tipo vengono detti <u>impropri</u>.

L'estensione è del tutto naturale:

1) $$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Notiamo che con l'integrale $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ non ci sono problemi, in quanto f è continua in $[a+\varepsilon,b]$ per $\varepsilon>0$.

Se il precedente limite esiste finito diremo che l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ è <u>convergente</u>; se il limite esiste infinito diremo che l'integrale è <u>divergente</u>; se invece il limite non esiste non si potrà parlare di $\int_a^b f(x)dx$.

Un caso in cui il limite $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ esiste sicuramente (finito o $+\infty$) è quando $f(x)\geq 0$ $\forall x\in(a,b]$; infatti, in questo caso $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ cresce quando $\varepsilon\downarrow 0$.

2) $\int_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$; come prima, con l'integrale $\int_a^t f(x)dx$, $t\in\mathbb{R}$, non vi sono problemi perchè f è continua in $[a,t]$ $\forall t\in\mathbb{R}$, $t>a$.

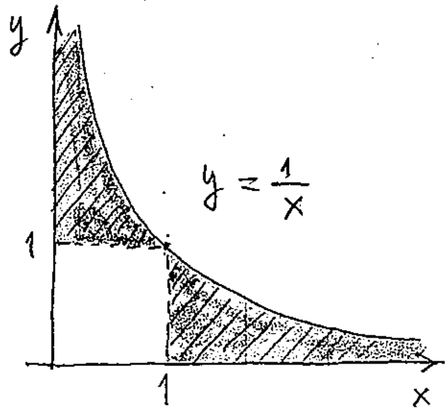
Come prima, se il limite precedente esiste finito diremo che l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è <u>convergente</u>, se esiste infinito che l'integrale è <u>divergente</u> e se non esiste non parleremo di $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Se $f(x)\geq 0$ $\forall x\geq a$ l'integrale $\int_a^t f(x)dx$ è una quantità che cresce al crescere di t e quindi in questo caso il limite $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ esiste sicuramente (finito o infinito).

Notiamo che in realtà abbiamo già incontrato due integrali di questo tipo quando abbiamo introdotto il logaritmo, da noi definito da

$$\log x \overset{\text{def}}{=} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad (x>0)$$

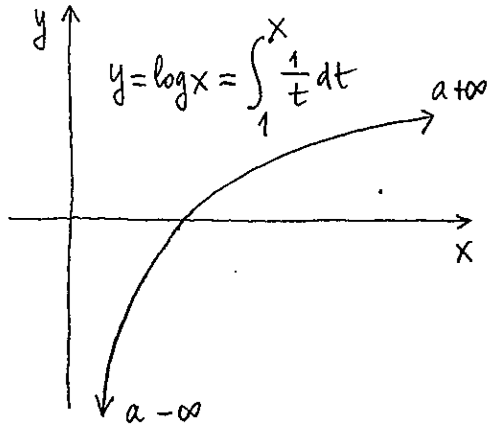
(anche se non avevamo dato ancora la definizione formale di integrale). Studiando questa funzione abbiamo visto che



$$\lim_{x\to+\infty} \log x = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = +\infty,$$

cioè che

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt = +\infty}$$



e che

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(-\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt\right) = -\infty,$$

cioè che

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = +\infty}$$

Vediamo ora che

$$\bullet \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \leq 1 \quad (\text{cioè, l'integrale è divergente}) \\ \dfrac{1}{p-1} & \text{se } p > 1 \quad (\text{" , " " " convergente}) \end{cases}$$

$$\bullet\bullet \int_0^{1} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \geq 1 \quad (\text{" , " " " divergente}) \\ \dfrac{1}{1-p} & \text{se } p < 1 \quad (\text{" , " " " convergente}) \end{cases}$$

Il caso $p=1$ è stato già visto nella pagina precedente.
Per $p \neq 1$ si ha

$$\int_1^{t} \frac{1}{x^p}\,dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^t = \frac{t^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{t\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{se } -p+1<0, \text{ cioè se } p>1 \\ +\infty & \text{se } -p+1>0, \text{ cioè se } p<1 \end{cases}.$$

$$\int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^p}\,dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_\varepsilon^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{\varepsilon^{-p+1}}{-p+1} =$$

$$= \frac{1}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} \xrightarrow[\varepsilon>0]{\varepsilon\to0} \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} & \text{se } 1-p>0, \text{ cioè } p<1 \\ +\infty & \text{se } 1-p<0, \text{ cioè } p>1 \end{cases}$$

Gli integrali $\bullet$, $\bullet\bullet$ sono molto importanti perchè spesso la convergenza o meno di integrali di altre funzioni invece di essere studiata direttamente con la definizione usando primitive e limite, viene dedotta per confronto con integrali del tipo • o ••.

Un esempio estremamente interessante è lo studio della convergenza di

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$$

(interessante perchè questo integrale è molto importante nella teoria delle probabilità e perchè e^{-t^2} è una funzione la cui primitiva non è calcolabile esplicitamente).

Sappiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$$

e quindi esiste x_0 tale che $\frac{x^2}{e^{x^2}} \leqslant 1 \quad \forall\, x \geqslant x_0$, cioè

$$\frac{1}{e^{x^2}} \leqslant \frac{1}{x^2} \quad \forall\, x \geqslant x_0$$

Si ottiene

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\Big[\underbrace{\int_0^{x_0} e^{-t^2}dt}_{\text{finito}} + \int_{x_0}^x e^{-t^2}dt\Big] =$$

$$= \int_0^{x_0} e^{-t^2}dt + \lim_{x\to+\infty}\int_{x_0}^x e^{-t^2}dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{x_0} e^{-t^2}dt + \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{t^2}dt =$$

$$= \int_0^{x_0} e^{-t^2} dt + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt < +\infty$$

ATTENZIONE: quando si ha un integrale da calcolare, bisogna sempre accertarsi se è improprio o meno, altrimenti si rischia di prendere grosse cantonate. Ad esempio, affrontando con leggerezza

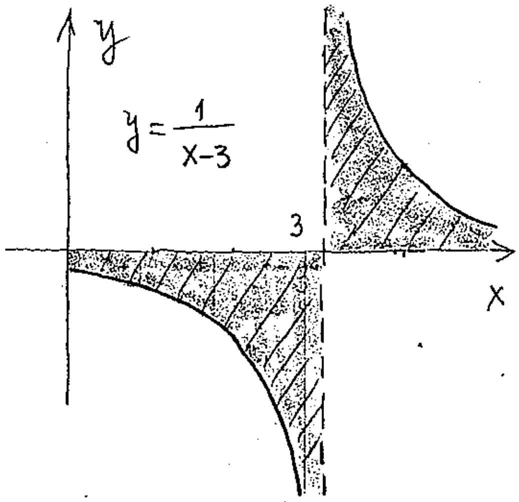
$$\int_0^4 \frac{dx}{x-3}$$

si ricava scorrettamente

$$\int_0^4 \frac{dx}{x-3} = \log|x-3|\Big|_0^4 = \log 1 - \log 3 = -\log 3 ,$$

mentre, osservando che $\frac{1}{x-3}$ è discontinua in $x=3$, un'analisi più attenta mostra che l'integrale

$$\int_0^4 \frac{dx}{x-3} = \int_0^3 \frac{dx}{x-3} + \int_3^4 \frac{dx}{x-3}$$



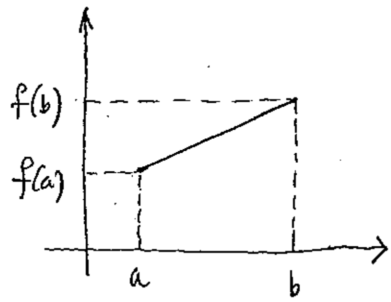
è improprio. In questo caso si ha

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-3} = -\infty , \quad \int_3^4 \frac{dx}{x-3} = +\infty$$

e l'integrale $\int_0^4 \frac{dx}{x-3}$ non esiste.

Concludiamo l'argomento sull'integrale rispondendo ad una domanda molto interessante. Finora ci siamo occupato di misurare l'area del sottografico di una funzione continua $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Ci chiediamo adesso quanto sia la lunghezza del grafico

$$G(f) = \{ (x, f(x)) \ , \ a \leq x \leq b \}$$



di una tale funzione.

Se $f(x) = mx + q$ la risposta è semplice; grazie al teorema di PITAGORA tale lunghezza, che indicheremo con

$$\ell_{[a,b]}(f) \ ,$$

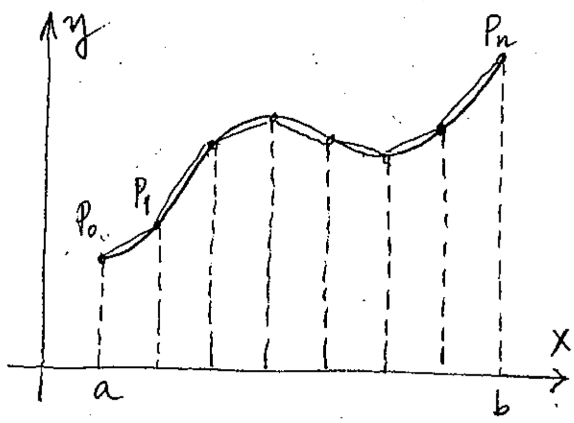
è data da

$$\ell_{[a,b]}(f) = \sqrt{[f(b)-f(a)]^2 + (b-a)^2} =$$

$$= \sqrt{(mb + \cancel{q} - ma - \cancel{q})^2 + (b-a)^2} =$$

$$= \sqrt{m^2(b-a)^2 + (b-a)^2} = (b-a)\sqrt{1+m^2}$$

Ma già se $f(x) = x^2$, la risposta tarda ad arrivare. Come fare? L'idea è molto intuitiva. Cercare di approssimare la funzione con segmenti (di cui si sa calcolare la lunghezza) e poi vedere che succede alla somma delle lunghezze di questi segmenti via via che l'approssimazione si fa più fine, facendo crescere all'infinito il numero dei segmenti approssimanti. Facciamo una figura e vediamo di scrivere in maniera precisa quello che si vuol fare. Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in n parti (uguali per semplicità) mediante i punti



$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}, \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

Siano $P_k = (x_k, f(x_k))$, $k=0,1,\dots,n$ i punti corrispondenti sul grafico della funzione. Se uniamo con segmenti questi punti otteniamo quello che si chiama poligonale iscritta nel grafico di f, e che indicheremo con $\mathcal{P}_n$. Grazie al teorema di PITAGORA abbiamo

$$\ell_{[a,b]}(\mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} \overline{P_k P_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left[f(x_k)-f(x_{k-1})\right]^2 + (x_k - x_{k-1})^2}$$

Supponiamo f derivabile, con derivata f' continua; grazie al teorema di LAGRANGE esistono punti $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tali che

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

e quindi

$$\ell_{[a,b]}(\mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 \left(1 + f'^2(c_k)\right)} =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(c_k)}$$

Ma questo non è altro che una somma di Riemann relativa alla funzione continua $\sqrt{1+f'^2(x)}$ e quindi

$$\lim_n \ell_{[a,b]}(\mathcal{P}_n) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$$

Questo giustifica la seguente

DEFINIZIONE di lunghezza $\ell_{[a,b]}(f)$ di $\mathcal{G}(f)$:

$$\ell_{[a,b]}(f) \stackrel{def}{=} \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$$

Purtroppo, il calcolo di integrali di questo tipo, anche per funzioni molto semplici, non è in generale particolarmente agevole.
Ad esempio, se $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$, si ha

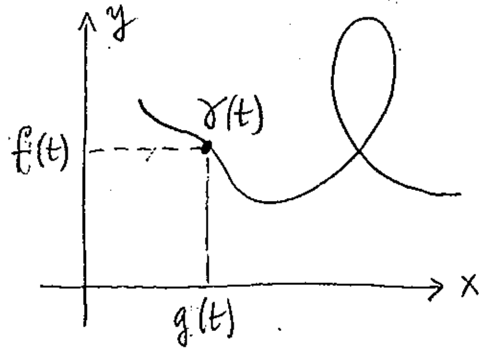
$$\ell_{[0,1]}(x^2) = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx .$$

Vi sfido a calcolare quest'integrale: vi consiglio l'integrazione per sostituzione ponendo $\sqrt{1+4x^2} = 2x+t$.
Buon lavoro!

Consideriamo infine non un grafico, ma una curva piana γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}, \quad a \le t \le b ,$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabili con
$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivate continue



Definiamo la lunghezza di γ mediante

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g'^2(t) + f'^2(t)}\, dt$$

Ad esempio, una circonferenza di raggio r può essere rappresentata in forma parametrica mediante

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad , \; 0 \le t \le 2\pi$$

e quindi la sua lunghezza è data da

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r\,\mathrm{sen}\,t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} r\sqrt{\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt = 2\pi r ,$$

risultato a tutti ben noto.

E' chiaro che il grafico di una funzione f è un caso particolare di curva (è una curva che interseca al più una volta le rette $x = x_0$); una sua parametrizzazione naturale è

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad , \; a \le t \le b$$

Ma cambiamo completamente argomento.

SUCCESSIONI E SERIE

Abbiamo già visto i concetti di successione e di limite di una successione.

Finora le successioni che abbiamo considerato erano espresse in forma "esplicita", cioè del tipo

$$a_n = \frac{1}{n}\ , \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad a_n = \sqrt[n]{n}\ , \quad \text{ecc. ecc.}\ ;$$

per ogni n il termine n-mo era chiaro esplicitamente.

Non sempre è così: a volte una successione può essere definita <u>per ricorrenza</u>, cioè ogni termine è definito a partire dai precedenti; ad esempio

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + b_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

E' chiaro che nelle successioni per ricorrenza è necessario definire esplicitamente il primo o i primi termini di modo che la ricorrenza possa cominciare. Nei due esempi precedenti si ha

$$a_0 = 1,\quad a_1 = 1 + a_0 = 2\ ,\quad a_2 = 1 + a_1 = 3,\quad a_3 = 1 + a_2 = 4, \ldots$$

e si capisce che $a_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (in questo caso a_n ha anche una formulazione esplicita), mentre

$$b_0 = 1,\quad b_1 = 1\ ,\quad b_2 = b_0 + b_1 = 2,\quad b_3 = b_1 + b_2 = 3,\quad b_4 = b_2 + b_3 = 5,$$

e così via ... (in questo caso b_n non ha una formulazione esplicita).

Un'altra successione che abbiamo incontrato in precedenza è la successione