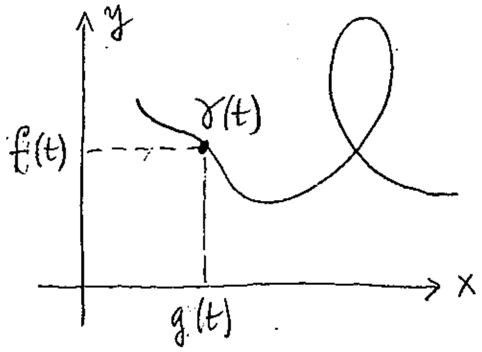
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabili con

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivate continue



Definiamo la lunghezza di γ mediante

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g'^2(t) + f'^2(t)}\; dt$$

Ad esempio, una circonferenza di raggio r può essere rappresentata in forma parametrica mediante

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

e quindi la sua lunghezza è data da

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r\,\mathrm{sen}\,t)^2 + (r\cos t)^2}\; dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} r\sqrt{\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t}\; dt = 2\pi r,$$

risultato a tutti ben noto.

E' chiaro che il grafico di una funzione f è un caso particolare di curva (è una curva che interseca al più una volta le rette $x = x_0$); una sua parametrizzazione naturale è

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad a \le t \le b$$

Ma cambiamo completamente argomento.

SUCCESSIONI E SERIE

Abbiamo già visto i concetti di successione e di limite di una successione.

Finora le successioni che abbiamo considerato erano espresse in forma "esplicita", cioè del tipo

$$a_n = \frac{1}{n}\ , \quad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad a_n = \sqrt[n]{n}\ , \quad \text{ecc. ecc.}\ ;$$

per ogni n il termine n-mo era chiaro esplicitamente.

Non sempre è così: a volte una successione può essere definita <u>per ricorrenza</u>, cioè ogni termine è definito a partire dai precedenti; ad esempio

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + b_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

E' chiaro che nelle successioni per ricorrenza è necessario definire esplicitamente il primo o i primi termini di modo che la ricorrenza possa cominciare. Nei due esempi precedenti si ha.

$$a_0 = 1\ , \quad a_1 = 1 + a_0 = 2\ , \quad a_2 = 1 + a_1 = 3\ , \quad a_3 = 1 + a_2 = 4\ , \ \ldots$$

e si capisce che $a_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (in questo caso a_n ha anche una formulazione esplicita), mentre

$$b_0 = 1\ , \quad b_1 = 1\ , \quad b_2 = b_0 + b_1 = 2\ , \quad b_3 = b_1 + b_2 = 3\ , \quad b_4 = b_2 + b_3 = 5\ ,$$

e così via ... (in questo caso b_n non ha una formulazione esplicita).

Un'altra successione che abbiamo incontrato in precedenza è la successione

$$S_n = S_n(q) = q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=1}^{n} q^k .$$

Questa formulazione non è esplicita, ma noi sappiamo che

$$S_n(q) = \begin{cases} \dfrac{q - q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n \text{ se } q = 1 \end{cases}$$

e quindi abbiamo anche una sua formulazione esplicita.

Un'altro esempio importante di successione è costituito dalle Somme di Riemann

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$$

L'integrale era definito come il limite della successione R_n.

Una successione che ha limite finito si dice <u>convergente</u>.

Riassumiamo definizioni e proprietà riguardanti le successioni:

1) a_n si dice <u>limitata</u> se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a_n è <u>crescente</u> se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   a_n è <u>decrescente</u> se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   Le successioni crescenti o decrescenti vengono dette <u>monotone</u>.

3) Se a_n è convergente, allora è limitata.

   Non vale il viceversa; ad esempio la successione $a_n = (-1)^n$ è limitata ma non è convergente.

4) Se a_n è limitata e monotona allora è convergente.

5) Se a_n è monotona ma non limitata allora $\lim_n a_n = \pm\infty$

Parliamo adesso di

SERIE

Le serie sono successioni molto particolari. Ne abbiamo già vista una:

$$S_n = S_n(q) = \sum_{k=1}^{n} q^k$$

In generale, data una successione a_n, si può considerare la <u>successione delle somme parziali di a_n</u>, cioè

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = S_1 + a_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La successione S_n si chiama <u>serie di termine generale a_n</u>.

Vediamo alcuni esempi:

1) $a_n = q$; si ha $S_n = nq$

2) $a_n = q^n$; si ha $S_n = S_n(q)$.

Questa serie si chiama <u>serie geometrica di ragione q</u>

3) $a_n = \frac{1}{n}$; si ha $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Questa serie si chiama <u>serie armonica</u>.

Interessante è cercare di capire quando queste particolari successioni che sono le serie hanno limite, e quando tale limite è finito.

DEFINIZIONI

1) Una serie si dice convergente se esiste $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$.

Scriveremo in maniera suggestiva

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

e diremo che S è la somma della serie.

Abbiamo così dato un senso alla somma di un numero infinito di termini.

Spesso si usa il simbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ non solo per indicare la somma della serie (ossia il limite della successione S_n), ma anche per indicare la serie stessa (ossia la successione S_n). Questo non crea in generale confusione.

2) Una serie si dice divergente se esiste $\lim_n S_n = +\infty$ (o $-\infty$).

Scriveremo anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \quad (-\infty)$$

Se il termine generale a_n è positivo, si osserva immediatamente che la serie ha sempre limite, finito o $+\infty$ (quindi la serie converge o diverge). Nel primo caso scriveremo anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

3) Una serie si dice indeterminata se $\nexists \lim_n S_n$;

ad esempio

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1+1-1+1- \cdots \quad ; \quad \text{si ha}$$

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases},$$

Cioè $S_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$, che non ha limite.

NOTA IMPORTANTE:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R} \text{ (cioè, la serie converge)} \implies a_n \xrightarrow{n} 0$$

(detto a parole, il termine generale di una serie convergente tende a zero). Infatti, sia

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad ; \text{ si ha}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \xrightarrow{n} S - S = 0 \quad .$$

Questa condizione <u>è necessaria</u> ma <u>non sufficiente</u> affinchè una serie converga (vedremo tra poco esempi di serie non convergenti il cui termine generale tende a zero). Quindi può essere utile solo per dimostrare la non convergenza di una serie. Ad esempio

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = +\infty \quad \text{perchè } a_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n} 1 \neq 0$$

$$\text{e } a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ non converge, perchè $a_n = (-1)^n$ non tende a zero (non ha limite)

Questa utilità non è da sottovalutare. Siccome le serie, a parte qualche raro caso, non si riescono a calcolare, quello che in generale si fa è utilizzare vari criteri per lo studio della convergenza o meno e quindi, se accade che il terme generale non tende a zero, già si sa come la serie si comporta.

Prima di cominciare a vedere i vari criteri per lo studio della convergenza delle serie, vediamo un paio di esempi particolarmente importanti che ci saranno di aiuto in seguito.

1) Il primo esempio sarà una delle poche serie di cui si riesce a calcolare la somma; la conosciamo già: è la <u>serie geometrica</u> di ragione q. Si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \lim_n \sum_{k=1}^{n} q^k = \begin{cases} \lim_n \dfrac{q-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{q}{1-q} & \text{se } |q|<1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \\ +\infty & \text{se } q>1 \end{cases} \\ \lim_n n = +\infty \quad \text{se } q=1 \end{cases}$$

NOTA: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1+\sum_{k=1}^{\infty} q^k = 1+\frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ se $|q|<1$

Se vi ricordate, questa serie è stata fondamentale per il calcolo degli sviluppi decimali periodici.

2) La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ si chiama <u>serie armonica generalizzata</u>

Questa serie è divergente per $p\leq 1$ e convergente per $p>1$. Quindi, questa serie con $0<p\leq 1$ mostra che una serie può essere divergente anche se il termine generale tende a zero.

Il comportamento della serie armonica generalizzata segue immediatamente dal

CRITERIO DEL CONFRONTO INTEGRALE

Sia $f \geq 0$, continua e decrescente in $[1,+\infty)$; allora

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \implies \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < +\infty$$

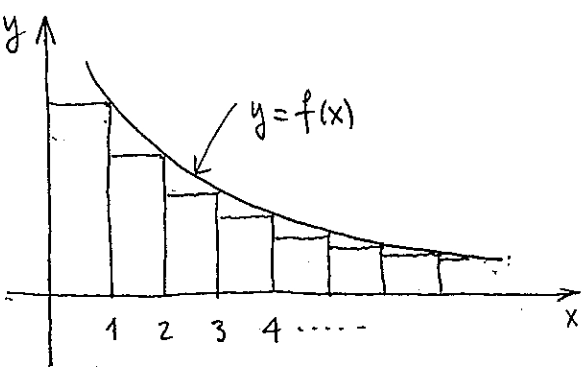
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \implies \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = +\infty$$

Quindi, quanto detto per la serie armonica generalizzata segue ricordando che

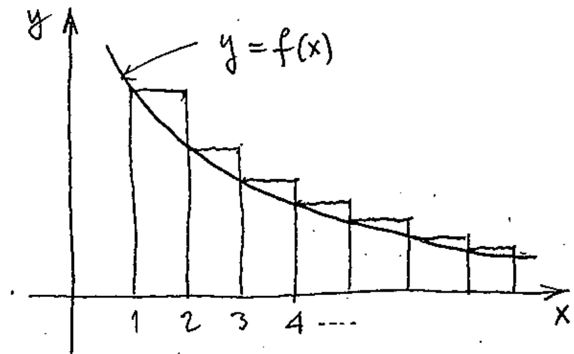
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx < +\infty \quad \text{per } p>1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty \quad \text{per } p \leq 1$$

Non dimostriamo questo criterio: è facile farsene una ragione guardando le seguenti figure:



$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$



$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

Conoscendo ora il comportamento della serie geometrica e della serie armonica generalizzata, siamo in grado di studiare il comportamento di moltissime altre serie, semplicemente usando due criteri molto naturali ma molto potenti:

CRITERIO del CONFRONTO

$$\left.\begin{array}{l} a_n \geq 0,\ b_n \geq 0 \\ a_n \geq b_n \end{array}\right. \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

CRITERIO del CONFRONTO ASINTOTICO

$$\left.\begin{array}{l} a_n \geq 0,\ b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_n \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0 \\ L \in \mathbb{R} \end{array}\right. \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hanno lo stesso comportamento}$$

Facciamo un paio di esempi:

ESEMPIO 1: Studiare la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{3^n}$

Si ha

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n} 0 \quad ;$$

è verificata la condizione necessaria e quindi la serie potrebbe convergere. Ora

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n < +\infty, \text{ perchè è}$$

una serie geometrica con ragione $\frac{2}{3} < 1$. Quindi, per il criterio del confronto, anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{3^n}$ è convergente

ESEMPIO 2:
Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{4n^4+3n^2}$.

Si ha $a_n = \frac{n^2+1}{4n^4+3n^2} \xrightarrow{n} 0$; è verificata la condizione necessaria e pertanto la serie potrebbe convergere.

Ad occhio a_n sembra comportarsi come $b_n = \frac{1}{4n^2}$; calcolo quindi $\lim_n \frac{a_n}{b_n}$. Si ha

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{4n^2(n^2+1)}{4n^4+3n^2} = 1 > 0.$$

Allora, poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$ è convergente, per il criterio del confronto asintotico lo sarà anche la serie di partenza.

Ci sono altri due criteri importanti per lo studio delle serie a termini positivi:

CRITERIO del RAPPORTO

$$\left.\begin{array}{l} a_n > 0 \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n} L \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{se } L<1 \text{ allora } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \\ \text{se } L>1 \text{ allora } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \\ \text{se } L=1 \text{ nulla può dirsi in generale} \\ \left(\text{vedi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \end{array}\right.$$

CRITERIO della RADICE

$$a_n > 0, \quad \sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n} L \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{se } L<1 \text{ allora } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \\ \text{se } L>1 \text{ allora } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \\ \text{se } L=1 \text{ nulla può dirsi in generale} \\ \quad \left(\text{vedi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \end{cases}$$

Facciamo anche qui un paio di esempi:

ESEMPIO 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\,3^n} \ ; \quad a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n . \quad \text{Si ha}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{2}{3} \xrightarrow{n} \frac{2}{3} < 1$$

e quindi la serie converge

ESEMPIO 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \ ; \quad a_n = \frac{1}{n!} . \quad \text{Si ha}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n} 0 < 1$$

e quindi la serie converge.

Passiamo adesso alle serie il cui termine generale è di segno variabile. A questo proposito introduciamo un nuovo concetto di convergenza

DEFINIZIONE (Convergenza assoluta)

Diremo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, <u>converge assolutamente</u> se e soltanto se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

La cosa più importante da notare è la seguente

PROPRIETA'

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

A parole questo significa che se una serie converge assolutamente, allora converge (si dice anche <u>semplicemente</u>).

Quindi, il primo passo da fare quando si vuole studiare una serie il cui termine generale è di segno variabile è quello di vedere se converge assolutamente (per la convergenza assoluta abbiamo visto un sacco di criteri). Se non c'è convergenza assoluta, non abbiamo molte risorse. L'unico criterio che desidero presentare qui riguarda serie con termine generale di segno variabile ma di un tipo speciale:

SERIE A TERMINI DI SEGNO ALTERNO

Una serie del tipo

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad , \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

si dice <u>serie a segni alterni</u>.

Per queste serie c'è il seguente importante

CRITERIO DI LEIBNIZ

$$\left.\begin{array}{l} a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ a_n \text{ decrescente}; \quad a_n \downarrow 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \in \mathbb{R}$$

Non dimostriamo qui questo criterio, ma facciamo un

ESEMPIO: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

Questa serie non converge assolutamente; infatti

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, che è una serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p = \frac{1}{2} < 1$ e quindi divergente.

Poiché $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_n \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, il criterio di Leibniz si applica e quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}$.

SERIE DI POTENZE

L'ultima parte sulle serie riguarderà serie in cui i termini non sono numeri ma funzioni di una variabile, ad esempio

$$a_n = a_n(x) = \frac{1}{n^8} \cos(nx);$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\left| \frac{1}{n^8} \cos(nx) \right| \leq \frac{1}{n^8}$$

e quindi, per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} \cos(nx)$

converge assolutamente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Noi studieremo in particolare serie il cui termine generale sarà della forma

$$a_n = a_n(x) = c_n (x - x_0)^n \quad ,$$

dove c_n è una successione data e x_0 è un numero fissato.

Una serie di questo tipo si chiama <u>serie di potenze</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = c_0 + c_1 (x-x_0) + c_2 (x-x_0)^2 + c_3 (x-x_0)^3 + \cdots \quad ;$$

Le serie di potenze si possono pensare come la naturale generalizzazione dei polinomi.

<u>Facciamo qualche esempio</u>:

1) $c_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad x_0 = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ è la serie geometrica di ragione x. Sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{per } |x| < 1 \quad \text{e non si ha convergenza per } |x| \geq 1.$$

2) $c_n = \frac{1}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad x_0 = 0 \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Applicando il criterio del rapporto si trova

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x|^n}{n!} = \frac{1}{n+1} |x| \xrightarrow{n} 0 < 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e di conseguenza la serie è convergente (assolutamente) $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vedremo più avanti che la somma di questa serie è una funzione molto importante e ben nota, cioè che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

3) $c_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0$; $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$.

Applicando il criterio della radice, si trova

$$\sqrt[n]{n|x|^n} = \sqrt[n]{n} \cdot |x| \xrightarrow{n} |x|$$

Quindi, la serie converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$. Per $|x| = 1$ il termine generale della serie non tende a zero (e quindi anche per $|x| = 1$ la serie non converge)

NOTA

In generale, se $a_n = c_n (x - x_0)^n$, si ha

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|c_{n+1}| \, |x - x_0|^{n+1}}{|c_n| \, |x - x_0|^n} = \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} |x - x_0|$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n| \, |x - x_0|^n} = \sqrt[n]{|c_n|} \, |x - x_0|$$

Da quest'osservazione e da quanto fatto negli ultimi due esempi si capisce che i criteri del rapporto e della radice sono particolarmente utili nello studio della convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$. Infatti, si può facilmente dimostrare che vale il seguente

TEOREMA

Sia $\lim_n \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_n \sqrt[n]{|c_n|} = L$; allora

$L = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$

$L = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ non converge per alcun $x \neq x_0$

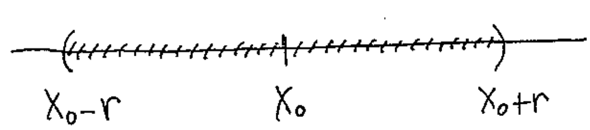
$0 < L < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ converge assolutamente per $|x-x_0| < \frac{1}{L}$
non converge per $|x-x_0| > \frac{1}{L}$

DEFINIZIONE

$$r = \begin{cases} +\infty & \text{se } L = 0 \\ \frac{1}{L} & \text{se } 0 < L < +\infty \\ 0 & \text{se } L = +\infty \end{cases}$$

si chiama <u>raggio di convergenza</u>. Il teorema precedente ci dice che una serie di potenze converge assolutamente in un intervallo aperto centrato in x_0, e precisamente nell'intervallo

$(x_0 - r,\ x_0 + r)$



Osserviamo che il teorema non ci dice nulla su come si comporta la serie nei punti $x = x_0 - r$ ed $x = x_0 + r$, cioè negli estremi dell'intervallo di convergenza (ciò non è stupefacente poichè i punti $x_0 - r$ ed $x_0 + r$ sono quelli in cui i limiti dei criteri del rapporto e della radice applicati alla serie sono uguali ad 1 e quindi non significativi). Negli estremi $x_0 - r$, $x_0 + r$ la convergenza va studiata caso per caso, essendo possibili tutte le seguenti situazioni:

$$\text{Zona di convergenza} = \begin{cases} (x_0-r,\ x_0+r) \\ [x_0-r,\ x_0+r) \\ (x_0-r,\ x_0+r] \\ [x_0-r,\ x_0+r] \end{cases}$$

(la convergenza negli estremi può essere anche solo semplice)

ESEMPIO

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$; $r=1$. In $x=1$ la serie diverge a $+\infty$

In $x=-1$ la serie è indeterminata

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; $r=1$. In $x=1$ la serie diverge a $+\infty$

In $x=-1$ la serie converge semplicemente (criterio di LEIBNIZ)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; $r=1$ In $x=\pm 1$ la serie converge assolutamente

NOTA

Osserviamo che si potrebbe definire il raggio di convergenza anche se i limiti del teorema precedente non esistessero, ma ciò esula dalle possibilità del nostro corso.

Enunciamo ora, senza dimostrarlo, un teorema molto importante ed utile sulle serie di potenze:

TEOREMA: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ convergente per $|x|<r$; allora esiste $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)'$ e vale

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad \forall\, x\in(-r,r)$$

(cioè, le serie di potenze si possono derivare termine a termine)

ESEMPI

1) Da $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$, ricaviamo

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)', \text{ cioè}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \forall\, x: |x|<1$$

2) Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$; allora

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \underset{K=n-1}{=} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{x^K}{K!} = f(x)$$

Abbiamo così scoperto che $\begin{cases} f'(x) = f(x) & \forall x\in\mathbb{R} \\ f(0)=1 \end{cases}$;

quindi $f(x) = e^x \quad \forall x\in\mathbb{R}$, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

3) Integrando l'uguaglianza

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \quad , \qquad |t|<1$$

fra 0 ed x , $-1<x<1$, si ottiene

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n\,dt = \int_0^x \left(1-t+t^2-t^3+\cdots\right)dt =$$

$$= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots\cdots \Big]_0^x =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} .$$

Poichè

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \log(1+t)\Big]_0^x = \log(1+x) - \log 1 = \log(1+x) \; ,$$

risulta

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} .$$

4) Analogamente, a partire da

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n \quad , \qquad |t|<1 \quad ,$$

si ottiene

$$\operatorname{arctg} x = \cdots\cdots \qquad \text{Provate a farlo!}$$

Dopo questi esempi viene abbastanza naturale domandarsi se ogni funzione si può scrivere come una serie di potenze e, se sì, se c'è un modo sistematico per farlo.

Facciamo un conto:

Supponiamo che $f(x)$ sia sviluppabile in serie di potenze,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

e vediamo come devono essere i coefficienti della serie.

Si ha $f(0) = c_0$ e, derivando, si ottiene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots ,$$

da cui $f'(0) = c_1$. Derivando ancora si ottiene

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = 2c_2 + 3.2\, c_3 x + 4.3\, c_4 x^2 + \cdots ,$$

da cui $f''(0) = 2c_2$, cioè $c_2 = \dfrac{f''(0)}{2}$.

Derivando un'altra volta si ottiene

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) c_n x^{n-3} =$$

$$= 3.2\, c_3 + 4.3.2\, c_4 x + 5.4.3.2\, c_5 x^2 + \cdots ,$$

da cui $f'''(0) = 3.2\, c_3$, cioè $c_3 = \dfrac{f'''(0)}{3.2} = \dfrac{f'''(0)}{3!}$.

In generale, si ottiene

$$\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

e quindi possiamo affermare che se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $|x|<r$, allora si ha precisamente

$$(*) \quad \boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

NOTA: Lo studente può notare che se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$, $|x-x_0|<r$, allora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

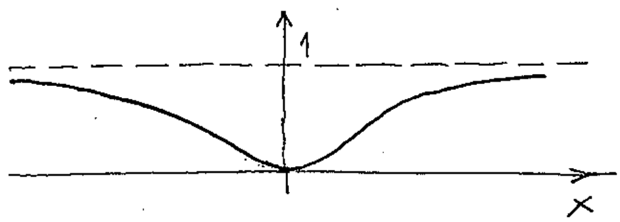
Infatti, basta porre $t = x - x_0$, $g(t) = f(t+x_0) = f(x)$ e applicare quanto fatto prima a

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad |t|<r$$

La serie $(*)$ si chiama serie di TAYLOR della funzione f, centrata in $x_0 = 0$.

In particolare, se f è sviluppabile in serie di TAYLOR centrata in $x_0=0$, allora f è derivabile infinite volte in $x_0=0$.
Il viceversa purtroppo <u>non è vero</u>; ad esempio, se

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases},$$



risulta $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \text{cioè}$$

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall\, x \neq 0.$$

Diamo allora la seguente

DEFINIZIONE

Diremo che $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno dell'origine se esiste $r > 0$ tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \forall\, x : |x| < r$$

(in generale, $f(x)$ si dice sviluppabile in serie di Taylor in un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste $r > 0$ tale che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-x_0)^n \qquad \forall\, x : \; |x-x_0| < r \;)$$

A questo punto siamo interessati a vedere si ci sono condizioni che permettano di assicurare la sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor.

Per trovare tali condizioni, facciamo un passo indietro per parlare di polinomi di Taylor

La storia dei polinomi di Taylor comincia con un polinomio di grado 1, cioè una retta. Vi ricordate che se f era una funzione derivabile e consideravamo la sua retta tangente $T(x)$ per $x = x_0$, cioè

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad ,$$

si aveva $T(x_0) = f(x_0)$ e

$$\frac{E_1(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - T(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

Se ora f è due volte derivabile in x_0 e consideriamo il polinomio di secondo grado

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \quad ,$$

risulta $P_2(x_0) = f(x_0)$ e

$$\frac{E_2(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} \xrightarrow{x \to x_0} 0 \quad ; \text{ infatti}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} =$$

$$\underset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - f''(x_0) \right] = 0$$

Immaginerete già come va avanti la storia: se f è tre volte derivabile in x_0 consideriamo il polinomio di grado 3

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 .$$

L'approssimazione di f con P_3 è ancora migliore nel senso che $P_3(x_0) = f(x_0)$ e inoltre

$$\frac{E_3(x)}{(x-x_0)^3} = \frac{f(x)-P_3(x)}{(x-x_0)^3} \xrightarrow{x\to x_0} 0 \quad ; \text{ infatti}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_3(x)}{(x-x_0)^3} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2-\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3}{(x-x_0)^3} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)-\frac{f'''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}{3(x-x_0)^2} =$$

Hôpital

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)-f''(x_0)-f'''(x_0)(x-x_0)}{6(x-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} - f'''(x_0)\right] = 0$$

In generale, se f è derivabile n volte in x_0, posto

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)$$

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) \;,$$

avremo $E_n(x_0) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{E_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ $\quad (\ast)$

DEFINIZIONE: Sia f derivabile n-volte in $x=x_0$; il polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{K=1}^{n} \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!}(x-x_0)^K =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

si chiama <u>polinomio di Taylor</u> della funzione f centrato in $x=x_0$.

Si vede facilmente che P_n è l'<u>unico</u> polinomio di grado al più n verificante la (*) nella pagina precedente.

Non avrete mancato di osservare che P_n non è altro che la somma parziale n-esima della serie di Taylor centrata in $x=x_0$ della funzione $f(x)$.

Che cosa manca quindi per poter affermare che la somma della serie di Taylor di f è proprio f ?

Deve essere

$$\boxed{\lim_n E_n(x) = 0}\ , \text{ cioè}$$

$$\boxed{\lim_n \left[f(x) - P_n(x)\right] = 0}$$

Riguardo all'errore $E_n(x) := f(x) - P_n(x)$, noi abbiamo visto che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x - x_0} = 0\ ,$$

ma questo riguarda la bontà dell'approssimazione quando $x \to x_0$.

Come capire invece qualcosa riguardo all'approssimazione di $f(x)$ con $P_n(x)$ quando $n \to +\infty$? Ci viene in aiuto una scrittura più esplicita dell'errore, che deriva da un sapiente uso del teorema di L'Hôpital. Si dimostra che, se f è $n+1$ volte derivabile in un intorno di x_0, allora, per ogni x in tale intorno esiste c compreso fra x ed x_0 tale che

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

resto di LAGRANGE

Si ha quindi

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

Ecco che in questo modo, se ad esempio la derivata $n+1$-esima della funzione f è limitata,

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M \quad \forall x \text{ nell'intorno di } x_0,$$

ho che l'errore $E_n(x) \xrightarrow{n} 0$ $\forall x$ nell'intorno di x_0 e quindi $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor. Infatti

$$\left|E_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1} \leq M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n} 0$$

Vediamo qualche esempio.

ESEMPIO

1) Scriviamo il polinomio di Taylor di grado n centrato in $x=0$ di $f(x) = \operatorname{sen} x$. Si ha

$f(0) = 0$ $\quad f'(x) = \cos x$ $\quad f''(x) = -\operatorname{sen} x$

$\quad f'(0) = 1$ $\quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$ $\quad f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$

$f'''(0) = -1$ $\quad f^{(4)}(0) = 0$

e si vede che si ricomincia da capo. Abbiamo così che in generale

$$\begin{cases} f^{(n)}(x) = \pm \operatorname{sen} x \\ f^{(n)}(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{se } n \text{ è pari}$$

$$\begin{cases} f^{(n)}(x) = \pm \cos x \\ f^{(n)}(0) = \pm 1 \end{cases} \qquad \text{se } n \text{ è dispari}$$

e quindi

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Inoltre $E_{2n+1}(x) = \operatorname{sen} x - P_{2n+1}(x) = \dfrac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2} =$

$$= \frac{\pm \operatorname{sen} c}{(2n+2)!} x^{2n+2} \quad ,$$

dove c è un punto opportuno fra 0 ed x. Si ha quindi

$$\left|E_{2n+1}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow{n} 0 \qquad \forall x$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) Analogamente si può vedere che

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

3) Recuperiamo seguendo questa via anche l'informazione che avevamo già ottenuto sull'esponenziale e cioè che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x \qquad \cdots\cdots \qquad f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 1 \qquad \qquad f^{(n)}(0) = 1$$

Risulta perciò

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n} 0$$

Quindi
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

4) Lascio a voi ottenere lo sviluppo di $f(x) = \log(1+x)$ centrato in $x = 0$..
Attenzione all'errore!

E' bene conoscere a memoria lo sviluppo delle funzioni che vengono usate più frequentemente:

$$e^x, \ \log(1+x), \ \operatorname{sen} x, \ \cos x, \ \frac{1}{1-x}, \ \operatorname{arctg} x, \text{ ecc.}$$

Segnaliamo che la formula del binomio di NEWTON

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k, \quad n \in \mathbb{N},$$

dove $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, si generalizza per esponente $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

dove $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

A partire dalle serie di Taylor delle funzioni più note si possono trovare velocemente tantissimi altri sviluppi senza dover fare ogni volta il calcolo del corrispondente polinomio di Taylor di grado n. Basta fare opportune sostituzioni; ad esempio, da

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\dots+\frac{t^n}{n!}+\dots$$

si può ricavare lo sviluppo di e^{20x} ponendo $20x=t$; si ha

$$e^{20x} = 1+20x+\frac{(20x)^2}{2}+\frac{(20x)^3}{3!}+\dots+\frac{(20x)^n}{n!}+\dots$$

ed anche

$$e^{\operatorname{sen}x} = 1+\operatorname{sen}x+\frac{(\operatorname{sen}x)^2}{2}+\frac{(\operatorname{sen}x)^3}{3!}+\dots+\frac{(\operatorname{sen}x)^n}{n!}+\dots$$

e così via.

Concludiamo questo argomento parlando di due situazioni dove è evidente l'utilità degli sviluppi di Taylor:

1) nel calcolo dei limiti, quando siamo di fronte a delle forme indeterminate, approssimando con i corrispondenti polinomi di Taylor le funzioni che compaiono, è spesso semplice capire che cosa succede, anche in casi in cui l'uso ripetuto del teorema di de L'Hôpital sarebbe piuttosto complicato. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\dots}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+\dots\right) = \frac{1}{2} \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots}{x} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\dots\right) = 1.$$

2) nel calcolo di integrali di funzioni che non hanno primitive esprimibili elementarmente. Con la formula di Taylor, usando il resto di LAGRANGE, si può approssimare l'integrale con l'accuratezza voluta. Ad esempio

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \operatorname{sen} c\, \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right] dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right] dx}_{\text{questo si calcola tranquillamente}} \pm \underbrace{\int_0^1 \operatorname{sen} c\, \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,dx}_{\text{errore}}$$

L'errore si maggiora facilmente:

$$|\text{Errore}| \leq \int_0^1 |\cos c|\, \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,dx = \frac{1}{(2n+3)!}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Un'equazione differenziale ordinaria è una relazione del tipo

$$(*) \quad g\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right) = 0$$

tra una variabile indipendente t, una funzione incognita $y(t)$ ed un numero finito delle sue derivate $y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)$.
(g è una funzione di $n+2$ variabili nota).

L'equazione si dice di ordine n se la derivata di ordine massimo che compare è quella n-ma. In particolare, un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine sarà del tipo

$$g(t, y(t), y'(t)) = 0$$

Osserviamo che se in $(*)$ si può esplicitare la derivata di ordine massimo, si avrà un'equazione della forma

$$(**) \quad y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)\right),$$

più facilmente affrontabile. L'equazione di ordine uno diventa

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Il problema di esplicitare la derivata di ordine massimo è un problema generale (teorema della funzione implicita) che non riguarda l'essenza della teoria delle equazioni differenziali ordinarie. La $(**)$ si dice forma normale dell'equazione e sarà di questo tipo di equazioni che ci occuperemo nel seguito.