2) nel calcolo di integrali di funzioni che non hanno primitive esprimibili elementarmente. Con la formula di Taylor, usando il resto di LAGRANGE, si può approssimare l'integrale con l'accuratezza voluta. Ad esempio

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\pm \operatorname{sen} c\,\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right]dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^1\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right]dx}_{\text{questo si calcola tranquillamente}} \pm \underbrace{\int_0^1 \operatorname{sen} c\,\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,dx}_{\text{errore}}$$

L'errore si maggiora facilmente:

$$|\text{Errore}| \leqslant \int_0^1 |\operatorname{sen} c|\,\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,dx = \frac{1}{(2n+3)!}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Un'equazione differenziale ordinaria è una relazione del tipo

$$(*) \quad g\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0$$

tra una variabile indipendente t, una funzione incognita $y(t)$ ed un numero finito delle sue derivate $y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)$.
(g è una funzione di $n+2$ variabili nota).

L'equazione si dice di ordine n se la derivata di ordine massimo che compare è quella n-ma. In particolare, un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine sarà del tipo

$$g\left(t, y(t), y'(t)\right) = 0$$

Osserviamo che se in $(*)$ si può esplicitare la derivata di ordine massimo, si avrà un'equazione della forma

$$(**) \quad y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)\right),$$

più facilmente affrontabile. L'equazione di ordine uno diventa

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Il problema di esplicitare la derivata di ordine massimo è un problema generale (teorema della funzione implicita) che non riguarda l'essenza della teoria delle equazioni differenziali ordinarie. La $(**)$ si dice forma normale dell'equazione e sarà di questo tipo di equazioni che ci occuperemo nel seguito.

Cominciamo a studiare l'equazione di primo ordine in forma normale

$$\boxed{y'(t) = f(t, y(t))}$$

Aggiungiamo anche una condizione iniziale (o una condizione di "passaggio")

$$\boxed{y(t_0) = y_0}$$

Si ha così il problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

noto come problema di CAUCHY.

Facciamo un

ESEMPIO (1798): Il modello malthusiano di crescita della popolazione mondiale è governato dall'equazione

$$y'(t) = a\, y(t),$$

dove $a > 0$, $a = \alpha - \beta$, α = tasso di natalità
β = tasso di mortalità

(sperimentalmente si ottiene $a \approx \frac{1}{50}$)

In questo modello la popolazione cresce proporzionalmente alla popolazione esistente e quindi, se $y_0 = y(0)$ è la popolazione al tempo $t=0$, l'andamento della popolazione mondiale sarà dato dalla soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = a\,y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Osserviamo che questo modello descrive anche il modello di crescita del capitale bancario e, se $a<0$, potrebbe essere anche il modello del decadimento di un materiale radiattivo.

Se scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = a$$

ed integriamo ambo i membri fra 0 e t, otteniamo

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{y(\tau)}\,d\tau = \int_0^t a\,d\tau = at$$

Ma

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{y(\tau)}\,d\tau \underset{\substack{y(\tau)=s \\ y'(\tau)\,d\tau = ds}}{=} \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{ds}{s} = \log|s|\Big]_{y(0)=y_0}^{y(t)} = \log|y(t)| - \log|y_0| =$$

$$= \log\frac{|y(t)|}{|y_0|} \underset{y(t)\text{ sarà positivo}}{=} \log\frac{y(t)}{y_0}$$

e quindi $\log\left(\dfrac{y(t)}{y_0}\right) = at$, da cui

$$\frac{y(t)}{y_0} = e^{at}, \quad \text{cioè} \quad \boxed{y(t) = y_0\,e^{at}}$$

(Teniamo bene a mente il metodo con cui abbiamo trovato $y(t)$, ci sarà molto utile in seguito, anche in casi più generali!)

Se volessimo sapere in quanto tempo $\bar{t}$ raddoppia la popolazione?

Dev'essere $y(\bar{t}) = 2y_0$, cioè $2 = e^{a\bar{t}}$, quindi

$$2 = e^{\frac{\bar{t}}{50}} \iff \bar{t} = 50 \log 2 \approx 35 \quad (\log 2 = 0{,}69314\ldots)$$

Quindi, il modello di Malthus prevede il raddoppio della popolazione ogni 35 anni circa. Tuttavia nei modelli di crescita di una popolazione, la crescita non avviene in modo lineare; ad esempio, quando una popolazione aumenta troppo, si può verificare un problema di scarsità di risorse e quindi la crescita rallenta. Sono stati proposti molti modelli che cercano di descrivere più fedelmente l'evoluzione di una popolazione data, tenendo appunto conto di fatti come il rapporto tra popolazione e risorse disponibili, o come la competizione con altre popolazioni o ancora come la possibilità di malattie. Un'alternativa di questo tipo è stata proposta da VERHULST nel 1845, il quale modellizza la dinamica della popolazione con l'equazione

$$\boxed{y'(t) = [a - by(t)]\, y(t)}, \quad a > 0,\ b > 0,$$

in cui il tasso di crescita $a - by(t)$ non è più costante, ma decresce linearmente al crescere della popolazione $y(t)$. Questa equazione è nota come <u>equazione della logistica</u>.

Per risolverla, scriviamola nella forma

$$(*) \quad \frac{y'(t)}{[a - by(t)]\, y(t)} = 1 \quad \left(\begin{array}{l} \text{supposto } y(t) \neq 0, \\ a - by(t) \neq 0 \end{array}\right),$$

e, come prima, integriamo ambo i membri tra 0 e t.
Otteniamo

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{[a-by(\tau)]y(\tau)}\,d\tau = \int_0^t 1\,d\tau = t$$

Ma

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{[a-by(\tau)]\,y(\tau)}\,d\tau = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{s(a-bs)} =$$

ricordiamo che se $C \neq D$ si può sempre scrivere

$$\frac{Ax+B}{(x-C)(x-D)} = \frac{M}{x-C} + \frac{N}{x-D}$$

$$= \frac{1}{a}\int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{s} + \frac{b}{a}\int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{a-bs} =$$

$$= \frac{1}{a}\log\left(\frac{y(t)}{y_0}\right) + \frac{b}{a}\left(-\frac{1}{b}\right)\log\left(\frac{a-by(t)}{a-by_0}\right) =$$

$$= \frac{1}{a}\log\left(\frac{y(t)\,(a-by_0)}{y_0\,(a-by(t))}\right)$$

e quindi, passando all'esponenziale,

$$\frac{y(t)\,(a-by_0)}{y_0(a-by(t))} = e^{at}, \quad \text{cioè} \quad \frac{y(t)}{a-by(t)} = \frac{y_0}{a-by_0}\,e^{at}$$

Possiamo ora ricavare $y(t)$, che è definita implicitamente da quest'ultima uguaglianza. Si ha

$$y(t) = \left(a - by(t)\right) \frac{y_0}{a - by_0} e^{at} =$$

$$= \frac{ay_0}{a - by_0} e^{at} - \frac{by_0}{a - by_0} y(t) e^{at} ,$$

da cui

$$y(t) \left[1 + \frac{by_0}{a - by_0} e^{at} \right] = \frac{ay_0}{a - by_0} e^{at} , \quad \text{cioè}$$

$$y(t) = \frac{a - by_0}{a - by_0 + by_0 e^{at}} \cdot \frac{ay_0}{a - by_0} e^{at} = \frac{ay_0 e^{at}}{a - by_0 + by_0 e^{at}} =$$

$$= \frac{ay_0}{by_0 + (a - by_0) e^{-at}} , \quad \text{e infine}$$

- $$\boxed{y(t) = \frac{a}{b + \frac{a - by_0}{y_0} e^{-at}}}$$, dove $y_0 > 0$ e come avevamo supposto a p. 127, $a - by_0 \neq 0$

Se $a - by_0 = 0$, cioè $y_0 = \frac{a}{b}$, non posso più scrivere la (*) a pagina 127. In questo caso la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(t) = \left(a - by(t)\right) y(t) \\ y(0) = \frac{a}{b} \end{cases}$$

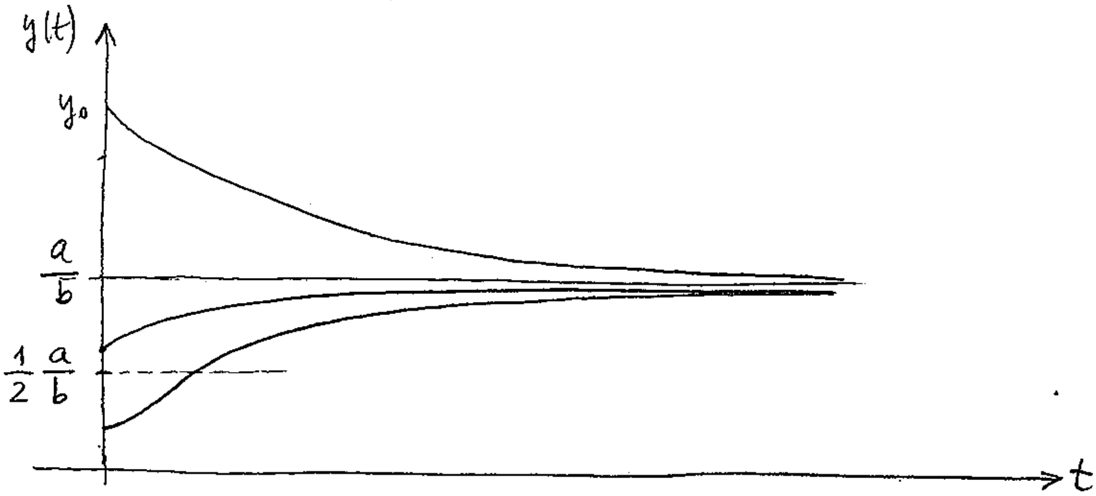
è la costante $\frac{a}{b}$, cioè $y(t) = \frac{a}{b}$ $\forall t$

Facciamo solo un'altra osservazione. Notiamo che la soluzione trovata un attimo fa verifica

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{a}{b} ,$$

e quindi la popolazione tende a stabilizzarsi attorno ad un valore di equilibrio che risulta dalla compensazione di fattori favorevoli (a) e sfavorevoli (b).

L'andamento della popolazione, a seconda che $\frac{a}{b}$ sia maggiore, uguale o minore di y_0, è riportato in figura (vedremo più avanti un'analisi qualitativa della soluzione)



(se $y_0 < \frac{1}{2}\frac{a}{b}$, $y(t)$ cambia curvatura in $\frac{a}{2b}$)

Torniamo a considerare il problema di Cauchy in generale,

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ci sarebbe estremamente utile avere un teorema di esistenza ed unicità che ci dicesse che il problema ha soluzione e che questa soluzione è unica. Nel caso in cui l'equazione differenziale rappresenti il modello di una situazione reale, è evidente l'importanza fisica e filosofica di un risultato di esistenza ed unicità di questo tipo: se il modello è corretto, il sistema dovrà evolvere in qualche modo (e quindi ci devono essere soluzioni del problema di Cauchy), mentre l'unicità di soluzione corrisponde al requisito di repetibilità di un esperimento (il sistema deve reagire nello stesso modo se sono identiche le condizioni iniziali: determinismo)

Facciamo qui di seguito due osservazioni che ci faranno capire meglio che teorema ci dovremmo aspettare:

OSSERVAZIONE 1: Anche se il secondo membro dell'equazione

$$f(t, y(t))$$

è estremamente regolare, possiamo sperare solo in un teorema di esistenza ed unicità locale, che ci assicuri l'esistenza di una soluzione in un opportuno intorno del punto (o tempo) iniziale t_0. Vediamolo con un paio di esempi:

i) $\begin{cases} y'(t) = y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$;

usando lo stesso metodo di prima, scrivendo l'equazione nella forma

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 1$$

ed integrando fra 0 e t, otteniamo

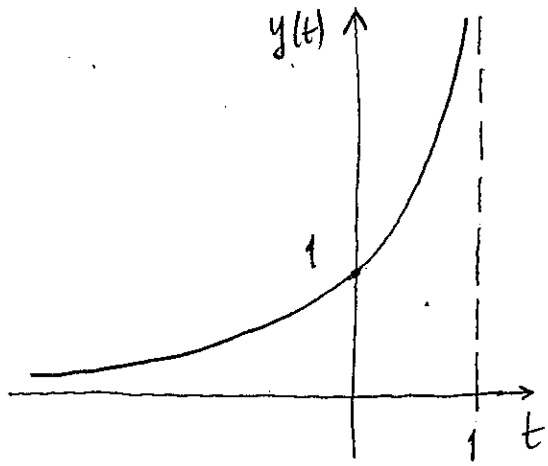
$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{y^2(\tau)}\,d\tau = \int_0^t 1 . d\tau = t \quad , \text{ e, poichè}$$

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{y^2(\tau)}\,d\tau = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{s}\Big]_{y_0}^{y(t)} = -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = 1 - \frac{1}{y(t)} \quad ,$$

risulta
$$1 - \frac{1}{y(t)} = t .$$

Esplicitando $y(t)$, si ottiene $\boxed{y(t) = \dfrac{1}{1-t}}$.

La funzione $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$ ha un asintoto verticale in $t=1$ e quindi la soluzione del problema $i)$ è definita solo per $t<1$.



ii) $\begin{cases} y'(t) = -\dfrac{t}{y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$;

procedendo come in precedenza ci riduciamo a calcolare

$$\int_0^t y'(\tau)\,y(\tau)\,d\tau = \int_0^t -\tau\,d\tau = -\frac{t^2}{2} \quad ,$$

ottenendo così

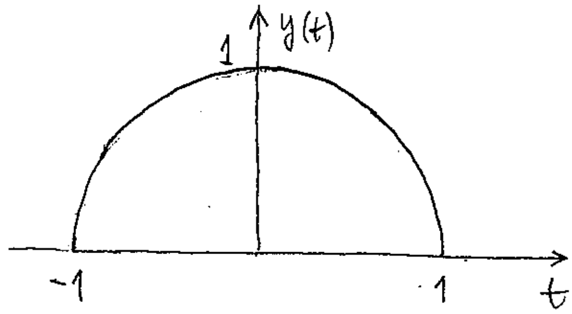
$$\frac{1}{2}y^2(t)-\frac{1}{2} = -\frac{t^2}{2}$$

e quindi

$$y^2(t) = 1-t^2, \quad \text{cioè}$$

$$y(t)=\sqrt{1-t^2}$$ (scelgo la radice positiva per via della condizione iniziale).

Ma la funzione $y(t)=\sqrt{1-t^2}$ è definita solo in $-1 \leq t \leq 1$



OSSERVAZIONE 2: Vediamo ora che la sola continuità della funzione $f(t,y)$ non garantisce unicità di soluzione.

[$f(t,y)$ continua in (t_0,y_0) significa semplicemente che

$$\begin{matrix} t_n \xrightarrow{n} t_0 \\ y_n \xrightarrow{n} y_0 \end{matrix} \Longrightarrow f(t_n,y_n) \xrightarrow{n} f(t_0,y_0).$$

Di questo concetto ci occuperemo più avanti.]

Ad esempio, il problema

$$\begin{cases} y'(t)=\sqrt{y(t)} \\ y(0)=0 \end{cases}$$ ammette infinite soluzioni

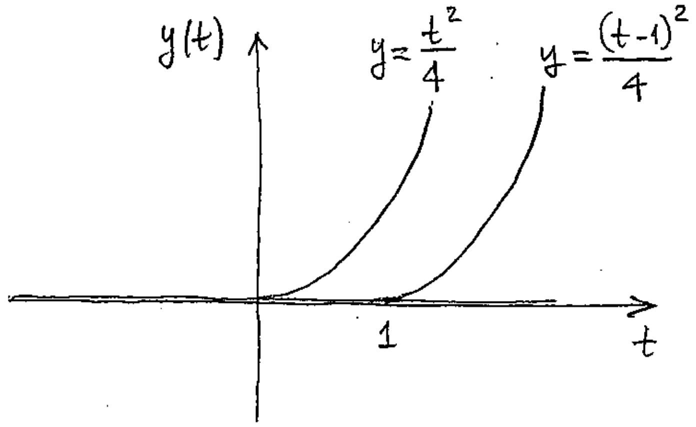
Infatti, si vede subito che $y(t)=0 \ \forall t$ è una soluzione e inoltre, procedendo come negli esempi precedenti, scopriamo che la funzione $y(t)=\frac{t^2}{4} \ \forall t>0$ è anch'essa una soluzione; infatti

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{\sqrt{y(\tau)}}\,d\tau = \int_0^t 1\,d\tau \quad , \qquad \text{cioè} \quad \sqrt{y(t)} = \frac{t}{2} \quad \text{e quindi}$$

$y(t) = \dfrac{t^2}{4}$. Si fa poi presto ad osservare che sono soluzioni anche tutte le funzioni

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-a)^2}{4} & \text{se } t > a \\ 0 & \text{se } t \leq a \end{cases}$$

dove $a > 0$.



A questo punto è chiaro che il nostro teorema di esistenza ed unicità potrà darci soltanto un risultato di esistenza locale e che per avere l'unicità dovremo chiedere di più che la sola continuità della funzione $f = f(t,y)$. Le nostre forze non ci permettono di enunciare e dimostrare un tale teorema: avremmo bisogno di più teoria. Per questo motivo soprassediamo, dicendo solo che se la funzione $f = f(t,y)$ è continua ed inoltre, guardata come funzione di y, ha derivata limitata, allora il problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione in un intorno di $t = t_0$ e tale soluzione è unica.

Concentriamoci in questo corso su classi di equazioni per le quali tutto fila liscio. Ad esempio, il trucchetto usato per risolvere i semplici problemi considerati in precedenza, si applica a tutta una classe di equazioni differenziabili dette a <u>variabili separabili</u>.

Supponiamo che sia

$$f(t,y) = \frac{A(t)}{B(y)},$$

dove $A(t)$ e $B(y)$ sono due funzioni continue, definite rispettivamente in intorni di t_0 ed y_0 e supponiamo inoltre che sia

$$B(y_0) \neq 0 .$$

Allora possiamo dire che esiste un intorno di t_0 dove il problema di Cauchy

$$(*) \begin{cases} y'(t) = \dfrac{A(t)}{B(y(t))} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione ed essa è unica.

L'idea della dimostrazione è la stessa usata nei nostri esempi. Deve essere

$$\int_{t_0}^{t} B(y(\tau))\, y'(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau ,$$

cioè

$$\int_{y_0}^{y(t)} B(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau$$

Da un punto di vista pratico ci sono due problemi: trovare le primitive delle funzioni A e B (cosa non sempre possibile in termini di funzioni elementari) ed esplicitare la $y(t)$, che l'integrazione dà solo in forma implicita. Questi due problemi vanno affrontati caso per caso.

Un'altra classe di equazioni del primo ordine che si possono risolvere esplicitamente è costituito dalle <u>equazioni lineari del primo ordine</u>; esse sono della forma

$$\boxed{y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t)} \quad ,$$

dove $a(t)$, $b(t)$ sono funzioni continue assegnate.

L'equazione si dice <u>lineare</u> per il fatto che l'operatore L definito da

$$L(y) = y' + a y$$

è un operatore lineare; infatti

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$$

$\forall\, c_1, c_2$ costanti $\forall\, y_1, y_2$ funzioni derivabili.

Vediamo ora che il problema di Cauchy associato

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione (<u>globale</u>, cioè definita $\forall\, t \in \mathbb{R}$) e tale soluzione è unica. Inoltre, la soluzione si trova in forma esplicita.

Il trucco è trovare una primitiva $A(t)$ di $a(t)$ e moltiplicare l'equazione per $e^{A(t)}$; si ottiene

$$e^{A(t)}\, y'(t) + a(t)\, e^{A(t)}\, y(t) = b(t)\, e^{A(t)}$$

A questo punto osserviamo che il membro di sinistra è la derivata del prodotto $e^{A(t)}\, y(t)$; si ha così

$$\left(e^{A(t)}\, y(t)\right)' = b(t)\, e^{A(t)}$$

Basta ora essere in grado di trovare una primitiva $F(t)$ di $b(t)e^{At}$ per avere

$$\left(e^{A(t)}\, y(t)\right)' = F'(t)$$

e quindi

$$e^{A(t)}\, y(t) = F(t) + k \qquad (k \text{ costante}) \quad ,$$

da cui

$$y(t) = e^{-A(t)} \left[F(t) + k\right] ;$$

imponendo ora ad $y(t)$ la condizione $y(t_0) = y_0$ si determina la costante k e si ha la soluzione.

Per fare un esempio, risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - 2t\,y(t) = t e^{t^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si ha $a(t) = -2t$, $A(t) = -t^2$, e quindi, moltiplicando l'equazione per e^{-t^2}, si ottiene

$$\underbrace{e^{-t^2} y(t) - 2t\, e^{-t^2} y(t)}_{\left(e^{-t^2} y(t)\right)'} = t$$

Poichè, posto $F(t) = \frac{t^2}{2}$, si ha $F'(t) = t$, l'equazione diventa

$$\left(e^{-t^2} y(t)\right)' = \left(\frac{t^2}{2}\right)'$$

e quindi

$$e^{-t^2} y(t) = \frac{t^2}{2} + k \,,$$

da cui

$$y(t) = e^{t^2} \frac{t^2}{2} + e^{t^2} k$$

Imponendo $1 = y(0) = e^0 \cdot 0 + e^0 \cdot k = k$, si ottiene la soluzione

$$y(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)$$

Ritorniamo adesso al caso generale $y'(t) = f(t, y(t))$.

Prima di affrontare la ricerca di una soluzione (almeno approssimata), osserviamo che se abbiamo l'esistenza e l'unicità della soluzione, allora per ogni punto del piano passa una ed una sola soluzione dell'equazione differenziale. Questa semplice osservazione consente spesso di fare uno studio qualitativo delle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria: in altre parole, è spesso possibile disegnare con buona approssimazione l'andamento delle soluzioni <u>senza dover risolvere esplicitamente la soluzione</u>.

Come esempio, potremo riprendere un caso trattato precedentemente, quello dell'equazione della logistica, dove abbiamo trovato esplicitamente la soluzione. Vedremo adesso che cosa è possibile dedurre dall'equazione senza risolverla.

Consideriamo il caso $a = b = 1$. Il problema è

$$\begin{cases} y'(t) = \big(1 - y(t)\big)\, y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Notiamo innanzitutto che $f(t,y) = f(y) = (1-y)\,y$ è regolare e non dipende da t. In questi casi l'equazione si dice <u>autonoma</u>; non è difficile verificare che le equazioni autonome hanno la seguente proprietà: se $y(t)$ è soluzione, anche $y(t-t_0)$, ottenuta tramite una traslazione lungo l'asse delle t, è ancora soluzione.

La derivata della funzione $f(y) = (1-y)\,y$, che qui è appunto funzione della sola variabile y, è limitata in qualunque intorno di qualunque punto (t_0, y_0), infatti

$$f'(y) = 1 - 2y$$

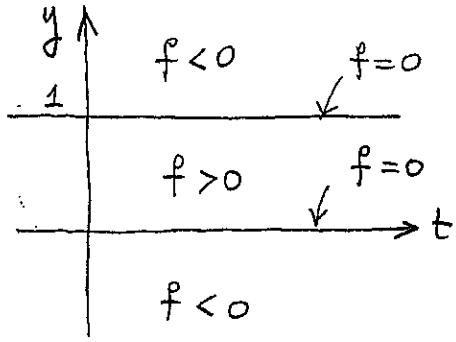
E' possibile quindi applicare il teorema di esistenza ed unicità locale per qualunque punto iniziale (t_0, y_0). Inoltre

$$f(t,y) = f(y) = 0 \quad \text{se } y=0 \text{ o se } y=1 \ ;$$

si hanno dunque due soluzioni costanti

$$y(t) = 0 \quad \forall t \quad , \quad y(t) = 1 \quad \forall t$$

Grazie al teorema di esistenza e unicità locale una qualunque altra soluzione non potrà dunque intersecare le rette orizzontali $y=0$ ed $y=1$.



Osserviamo poi che la funzione f è positiva per $y \in (0,1)$, mentre è negativa se $y > 1$ o $y < 0$. Ne segue che le soluzioni contenute nella striscia $0 < y < 1$ sono crescenti, mentre le soluzioni contenute nei semipiani $y < 0$ o $y > 1$ sono decrescenti. Inoltre, per la ragione detta sopra (l'invalicabilità delle rette $y=0$ ed $y=1$), se la soluzione è contenuta in uno di questi tre insiemi nell'istante iniziale, è costretta a rimanervi per tutto il suo tempo di vita.

Vediamo che cosa succede ad una soluzione $y(t)$ con dato iniziale $y(0) = y_0$, con $0 < y_0 < 1$; una tale soluzione rimarrà sempre nella striscia $0 < y < 1$ e sarà quindi sempre crescente. Avremo esistenza globale (la soluzione non può divergere a $\pm\infty$ in quanto è confinata nella striscia) e grazie alla monotonia esisteranno

$$\ell_1 = \lim_{t\to+\infty} y(t) \quad \text{ed} \quad \ell_2 = \lim_{t\to-\infty} y(t)$$

(la soluzione ha due <u>asintoti orizzontali</u>). In realtà deve essere $\ell_1 = 1$ ed $\ell_2 = 0$, perchè quando una funzione $y(t)$ monotona e derivabile si avvicina ad un asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$ la derivata deve tendere a zero e d'altra parte il secondo membro dell'equazione si annulla solo per $y=0$ e per $y=1$. In effetti, passando al limite per $t\to+\infty$ nell'equazione si ottiene

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t)\big(1-y(t)\big) = \ell_1(1-\ell_1)$$

e quindi $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$ solo se $\ell_1 = 1$. Analogamente

$$\lim_{t\to-\infty} y'(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t)\big(1-y(t)\big) = \ell_2(1-\ell_2)$$

e quindi $\lim_{t\to-\infty} y'(t) = 0$ solo se $\ell_2 = 0$.

Se vogliamo studiare anche la convessità della nostra soluzione $y(t)$, $0<y(t)<1$, derivando l'equazione si ottiene

$$y''(t) = \big(1-y(t)\big)'y(t) + \big(1-y(t)\big)y'(t) =$$

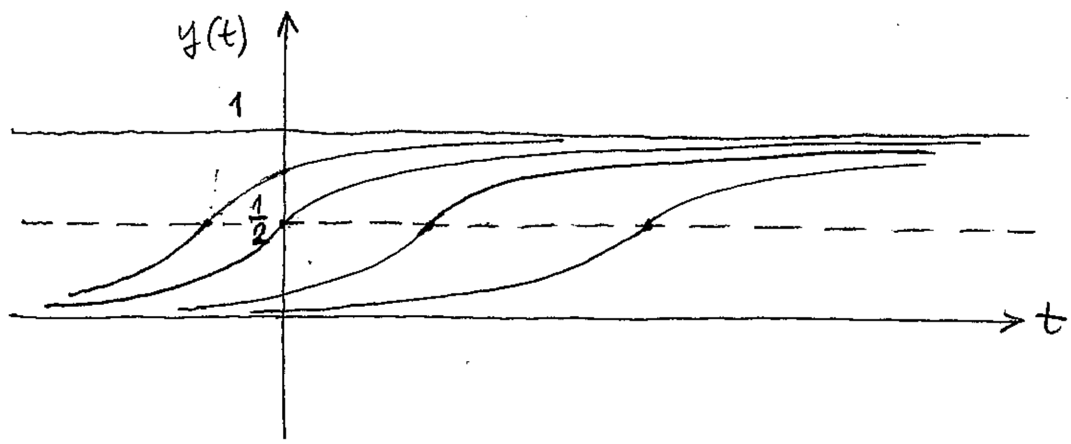
$$= -2y'(t)y(t) + y'(t) = \quad \text{perchè } y'(t) = \big(1-y(t)\big)y(t)$$

$$= -2y(t)\big(1-y(t)\big)y(t) + y(t)\big(1-y(t)\big) =$$

$$= \underbrace{y(t)}_{>0}\underbrace{\big(1-y(t)\big)}_{>0}\underbrace{\big(1-2y(t)\big)}_{>0 \text{ se } y(t)<\frac{1}{2}}$$

Quindi la funzione $y(t)$ è convessa in $0 < y(t) < \frac{1}{2}$ ed è concava in $\frac{1}{2} < y(t) < 1$, cioè passa da convessa a concava proprio a metà altezza.

Possiamo adesso disegnare con una certa accuratezza le soluzioni $y(t)$ corrispondenti ad un dato iniziale $y_0 \in (0,1)$:



Veniamo ora alle soluzioni $y(t)$ con $y(0) = y_0 > 1$; esse sono decrescenti e con un ragionamento identico a quello fatto in precedenza si può dimostrare che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 1$$

Per t negativi invece tali soluzioni devono divergere a $+\infty$ (non ci può essere un asintoto orizzontale perchè il secondo membro dell'equazione non si annulla per alcun $y > 1$). Il problema però è capire se questo avviene per $t \to -\infty$ o se invece la soluzione diverge in tempo finito, cioè se $\exists\, \bar{t} < 0$ tale che

$$\lim_{\substack{t \to \bar{t} \\ t > \bar{t}}} y(t) = +\infty .$$

Vogliamo dimostrare che effettivamente c'è un <u>asintoto verticale</u> e quindi non si ha esistenza globale. Se separiamo le variabili e integriamo fra 0 e t (conto peraltro già fatto) otteniamo

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{y(\tau)(1-y(\tau))}\,d\tau = \int_0^t 1\,d\tau = t \quad , \text{ cioè}$$

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{s(1-s)} = t$$

In sostanza l'integrale di sinistra (negativo) ci dice quanto tempo ci mette la soluzione ad arrivare all'altezza $y(t)$.
In particolare, per rispondere alla nostra domanda, dovremmo calcolare

$$\bar{t} = \int_{y_0}^{+\infty} \frac{ds}{s(1-s)} = \lim_{y\to+\infty} \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s(1-s)}$$

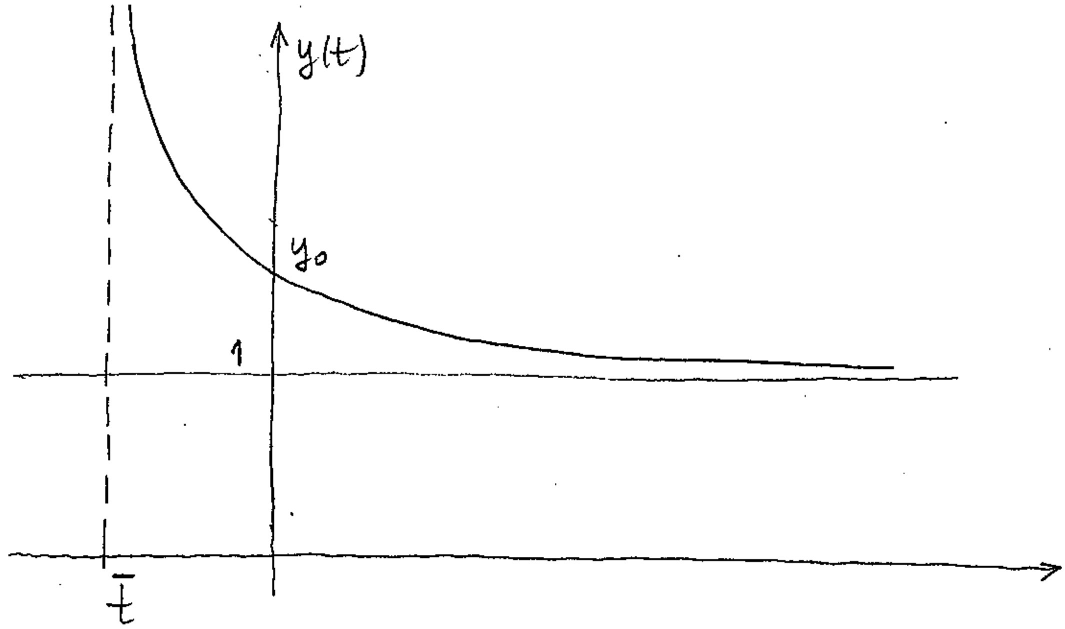
Se questo limite è finito ci darà l'ascissa $\bar{t}$ dell'asintoto verticale, se invece è infinito sapremo che la soluzione esiste per ogni t negativo. Anche senza calcolare l'integrale (cosa peraltro già fatta), possiamo usare la stima

$$|\bar{t}| = \left| \int_{y_0}^{+\infty} \frac{ds}{s(1-s)} \right| \leq \int_{y_0}^{+\infty} \frac{ds}{s(s-1)} \leq \int_{y_0}^{+\infty} \frac{ds}{(s-1)^2} = \frac{1}{y_0-1}$$

e concludere che l'integrale è finito e quindi c'è asintoto verticale (e non esistenza globale).
In ultimo, $y''(t) > 0$ (il conto è lo stesso di prima) e quindi le

Soluzioni sono convesse

Anche per le soluzioni $y(t)$ con $y_0 > 1$ possiamo adesso disegnare un grafico abbastanza accurato:



Lascio a voi fare analoghi ragionamenti per descrivere il comportamento delle soluzioni per $y_0 < 0$.

Torna tutto, confrontando i nostri grafici con la soluzione esplicita trovata in precedenza?

Vedremo adesso un paio di metodi che permettono di ricavare o quanto meno di approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases};$$

essi sono

- la risoluzione per serie
- il metodo di Eulero

METODO DI RISOLUZIONE PER SERIE

L'idea è semplice; bisogna supporre che la soluzione del problema di Cauchy sia una funzione $y(t)$ sviluppabile in serie di potenze, cioè

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n ,$$

e, usando il teorema di derivazione, scrivere l'equazione come uguaglianza tra due serie di potenze.

Poiché due serie di potenze sono uguali se e soltanto se lo sono tutti i loro coefficienti, da tale uguaglianza e dalla condizione iniziale ricaviamo gli a_n ed abbiamo così la funzione $y(t)$, o almeno una sua approssimazione.

Ma facciamo un esempio con un'equazione di cui conosciamo già la soluzione. Sarà gratificante vedere che arriveremo proprio dove già sapevamo di dover arrivare. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = k\,y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{(ci aspettiamo di trovare } y(t) = e^{kt}\text{)}$$

Supponiamo che sia $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$; si ha

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

e quindi l'equazione diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Poichè $$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \underset{i=n-1}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} t^i$$ (semplice cambio di indice)

posso riscrivere ancor meglio l'equazione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n = k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n .$$

Ora, poichè affinchè le due serie siano uguali, devono essere uguali i loro coefficienti, dovrà essere

$$(n+1) a_{n+1} = k a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ cioè}$$

$$(*) \qquad a_{n+1} = k \frac{a_n}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

I coefficienti risultano così essere definiti mediante una relazione di ricorrenza e la condizione iniziale del problema di Cauchy mi dà il termine di partenza; infatti, da $y(0) = 1$ ricavo

$$a_0 = 1$$

La regola di ricorrenza (*) mi dà allora

$$a_1 = \frac{k}{1} = k \quad , \quad a_2 = k \frac{k}{2} = \frac{k^2}{2} \quad , \quad a_3 = k \frac{\frac{k^2}{2}}{3} = \frac{k^3}{3!}$$

$$a_4 = k \frac{\frac{k^3}{3!}}{4} = \frac{k^4}{4!} \quad \text{e, in generale,} \quad a_n = \frac{k^n}{n!}$$

Ho quindi trovato che la soluzione è

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kt)^n}{n!} = e^{kt}$$

NOTA: Poichè una serie di potenze si può derivare quanto si vuole, è chiaro che questo metodo non è limitato alle equazioni differenziali del primo ordine. Potete anticipare un esempio cercando di risolvere il seguente problema di Cauchy del secondo ordine:

$$(*)\quad \begin{cases} y''(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

[E' naturale che nei problemi di Cauchy del secondo ordine le condizioni iniziali siano due e siano di questo tipo, per poter determinare univocamente la soluzione (quando tutto va bene!)]

La soluzione del problema (*) si vede al volo; se $y(t) = \operatorname{sen} t$, si ha $y'(t) = \cos t$ e $y''(t) = -\operatorname{sen} t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e quindi $y(t) = \operatorname{sen} t$ è soluzione di (*).

Anche $z(t) = \cos t$ verifica l'equazione differenziale in (*) ma non le condizioni iniziali, in quanto $z(0) = 1$, $z'(0) = 0$.

Provate a scrivere l'equazione supponendo che la soluzione $y(t)$ sia sviluppabile in serie di potenze: dovreste trovare

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

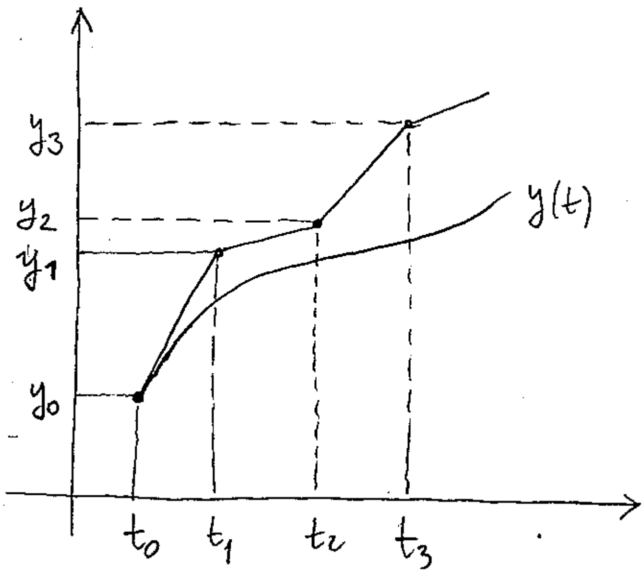
METODO DI EULERO

Un metodo per trovare un'approssimazione numerica della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è il cosiddetto <u>metodo delle tangenti</u> o <u>di Eulero</u>, essendo stato Eulero il primo ad usarlo.

L'idea alla base del metodo è la seguente. Partendo da (t_0, y_0) approssimo per un breve tratto, fino a $t = t_1$, la soluzione $y(t)$ con la sua retta tangente $y_1(t)$ (la cui pendenza $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$ è fornita dall'equazione).



Partendo poi da $(t_1, y_1(t_1)) = (t_1, y_1)$ considero per un breve tratto, fino a $t = t_2$, la retta $y_2(t)$ che ha pendenza $f(t_1, y_1)$. Riparto ora da $(t_2, y_2(t_2)) = (t_2, y_2)$, ecc. ecc.

Scriviamo formalmente quello che abbiamo detto supponendo di muoverci ogni volta di un tratto h sull'asse delle ascisse.

L'equazione della retta tangente alla soluzione $y(t)$ per (t_0, y_0) è

$$y_1(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0) \quad , \quad t \in [t_0, t_0+h] = [t_0, t_1]$$

Sia $y_1 = y_1(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)\, h$ e consideriamo adesso la retta $y_2(t)$ per (t_1, y_1) con pendenza $f(t_1, y_1)$; la sua equazione è

$$y_2(t) = y_1 + f(t_1, y_1)(t - t_1) \quad , \quad t \in [t_1, t_1+h] = [t_1, t_2]$$

Consideriamo adesso la retta $y_3(t)$ per (t_2, y_2) con pendenza $f(t_2, y_2)$; la sua equazione è

$$y_3(t) = y_2 + f(t_2, y_2)(t - t_2) \quad , \quad t \in [t_2, t_2+h] = [t_2, t_3]$$

Ecc. ecc.

Procedendo in questo modo al passo $(n+1)$-mo considero la retta $y_{n+1}(t)$ per (t_n, y_n) con pendenza $f(t_n, y_n)$; la sua equazione è

$$y_{n+1}(t) = y_n + f(t_n, y_n)(t - t_n) \quad , \quad t \in [t_n, t_n+h] = [t_n, t_{n+1}]$$

In questo modo abbiamo costruito una poligonale di vertici

$$(t_n, y_n) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$$

dove (t_0, y_0) : punto iniziale

$$(t_{n+1}, y_{n+1}) = \Big(t_0 + (n+1)h \,,\; y_n + f(t_n, y_n)\, h\Big) \quad \forall\, n \geq 0$$

E' ragionevole pensare che queste poligonali convergano, quando $h \to 0$, alla soluzione $y(t)$ problema di Cauchy. Questo può essere dimostrato ma richiede strumenti matematici più sofisticati di quelli presentati in questo corso.

L'approssimazione in molti casi è molto lenta, ma ci sono metodi per migliorarla: questo comunque sarà argomento per i vostri corsi di analisi numerica. Vediamo invece il metodo di Eulero in pratica in un caso molto semplice; consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

[Come in precedenza ci rifacciamo ad un problema noto, per avere la soddisfazione di riottenere il risultato per altra strada e poter aver subito conferma dell'esattezza dei nostri conti.]

In questo caso abbiamo $f(t, y(t)) = y(t)$ e quindi

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)h = 1 + y(t_0)h = 1 + y_0 \cdot h = 1+h$$

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)h = y_1 + y_1 h = y_1(1+h) = (1+h)^2$$

$$y_3 = y_2 + f(t_2, y_2)h = y_2 + y_2 h = y_2(1+h) = (1+h)^3 ,$$

e, in generale, $y_n = (1+h)^n$

Se come passo h prendiamo $\frac{1}{n}$ abbiamo che

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

è un'approssimazione di $y(t)$ nel punto $t_n = 0 + nh = 1$,

cioè

$$y(1) \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Ma sappiamo che la nostra soluzione è $y(t) = e^t$ ed è quindi

$$y(1) = e .$$

Ancora una volta tutto torna, perchè $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Passiamo adesso alle equazioni differenziali di ordine superiore.
Noi studieremo solo la classe delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine, e più precisamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = r(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases},$$

dove $a(t), b(t), r(t)$ sono funzioni continue date.
Per questo tipo di problema abbiamo esistenza ed unicità (non lo dimostreremo). Ci limiteremo inoltre al caso in cui $a(t)$ e $b(t)$ sono costanti,

$$a(t) = a \quad \forall t, \qquad b(t) = b \quad \forall t$$

Il problema si può affrontare in tre passi:

1) Cercare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = 0$$

2) Cercare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e quindi la soluzione generale di tale equazione

3) Imporre le condizioni iniziali e determinare quindi univocamente la soluzione del problema di Cauchy.

$\boxed{\text{PASSO 1}}$ Concentriamoci sull'<u>equazione omogenea</u>

$$(*) \quad y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$$

Per l'equazione lineare omogenea del 1° ordine

$$y'(t) + a y(t) = 0 \qquad (a \text{ costante})$$

sappiamo già che la soluzione generale è

$$y(t) = c\, e^{at}, \quad c \text{ costante}$$

Questo suggerisce provare a trovare soluzioni di $(*)$ del tipo

$$y(t) = e^{kt}, \quad k \text{ costante}$$

Poichè $y'(t) = k e^{kt}$, $y''(t) = k^2 e^{kt}$, sostituendo in $(*)$ deve essere

$$k^2 e^{kt} + a k e^{kt} + b e^{kt} = 0,$$

cioè

$$e^{kt}\left(k^2 + ak + b\right) = 0,$$

che è verificato solo se

$$\boxed{k^2 + ak + b = 0}$$

Se il polinomio (detto <u>polinomio caratteristico</u>) di secondo grado

$$P(k) = k^2 + ak + b$$

ha due radici reali $k_1 \neq k_2$ distinte, allora

$$y_1(t) = e^{k_1 t} \quad , \quad y_2(t) = e^{k_2 t}$$

sono soluzioni dell'equazione omogenea (*).
Ma per individuarle tutte, come si può fare? Si può dimostrare, ma noi non lo faremo, che l'insieme di tutte le soluzioni $u(t)$ dell'equazione lineare omogenea del secondo ordine (*) formano uno <u>spazio vettoriale di dimensione 2</u>. Basta quindi avere <u>due soluzioni indipendenti</u> per avere una base dello spazio e per poter scrivere ogni soluzione come combinazione lineare di queste due. In particolare, se

$$k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad , \quad k_1 \neq k_2 \; ,$$

allora $e^{k_1 t}$, $e^{k_2 t}$ sono due soluzioni indipendenti e quindi ogni soluzione $u(t)$ dell'omogenea si scrive come

$$u(t) = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Nel caso di una radice doppia del polinomio caratteristico

$$k_1 = k_2 \in \mathbb{R} \; ,$$

si può dimostrare che oltre alla soluzione $e^{k_1 t} = e^{k_2 t}$, c'è anche la soluzione

$$y(t) = t e^{k_1 t}$$

Vediamolo: si ha $k_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\dfrac{a}{2}$ e

$$y'(t) = e^{k_1 t} + t k_1 e^{k_1 t}$$

$$y''(t) = k_1 e^{k_1 t} + t k_1^2 e^{k_1 t} + k_1 e^{k_1 t} = t k_1^2 e^{k_1 t} + 2k_1 e^{k_1 t}$$

e quindi l'equazione diventa

$$t k_1^2 e^{k_1 t} + 2k_1 e^{k_1 t} + a e^{k_1 t} + a t k_1 e^{k_1 t} + b t e^{k_1 t} =$$

$$= e^{k_1 t}\left(t k_1^2 + 2k_1 + a + a t k_1 + bt\right) =$$

$$= e^{k_1 t}\left[t\underbrace{\left(k_1^2 + a k_1 + b\right)}_{=0} + \underbrace{2k_1 + a}_{=0}\right]$$

Inoltre $e^{k_1 t}$ e $t e^{k_1 t}$ sono indipendenti. Quindi, ogni soluzione $u(t)$ dell'omogenea si scrive

$$u(t) = c_1 e^{k_1 t} + c_2 t e^{k_1 t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Sembra più difficile capire che cosa succede quando le radici del polinomio caratteristico sono complesse

$$k_1 = \alpha + i\beta, \quad k_2 = \alpha - i\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \beta \neq 0$$

Se fossimo veramente temerari, sconfineremo nel campo complesso e continueremo imperterriti come se niente fosse. Proviamo a farlo. Alle due radici distinte k_1 e k_2 del polinomio caratteristico, corrispondono due soluzioni dell'equazione omogenea, che sono

$$e^{k_1 t} \quad \text{ed} \quad e^{k_2 t} \quad ;$$

ora, grazie alla formula di Eulero $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, si ha

$$e^{k_1 t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i \operatorname{sen}\beta t)$$

$$e^{k_2 t} = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i \operatorname{sen}\beta t)$$

Inoltre

$\frac{1}{2}\left(e^{k_1 t} + e^{k_2 t}\right)$ e $\frac{1}{2i}\left(e^{k_1 t} - e^{k_2 t}\right)$ sono ancora soluzioni

e si ha

$$\frac{1}{2}\left(e^{k_1 t} + e^{k_2 t}\right) = \frac{1}{2} e^{\alpha t}\left(2\cos\beta t\right) = e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$\frac{1}{2i}\left(e^{k_1 t} - e^{k_2 t}\right) = \frac{1}{2i} e^{\alpha t}\left(2i \operatorname{sen}\beta t\right) = e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t .$$

Poichè $e^{\alpha t}\cos\beta t$ ed $e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t$ sono due soluzioni indipendenti, ogni soluzione dell'omogenea si scrive

$$u(t) = e^{\alpha t}\left(c_1\cos\beta t + c_2 \operatorname{sen}\beta t\right) \quad , \quad c_1, c_2 \text{ costanti}$$

Ebbene, questo funziona e le cose stanno proprio così. Facciamo uno <u>schemino riassuntivo</u>:

Equazione omogenea : $y''(t)+ay'(t)+by(t)=0$

$u(t)$: Soluzione generale dell'equazione omogenea

k_1, k_2 radici del polinomio caratteristico k^2+ak+b

Allora:

$k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $u(t)=c_1 e^{k_1 t}+c_2 e^{k_2 t}$, c_1, c_2 costanti

$k_1 = k_2$ $\Longrightarrow$ $u(t)=c_1 e^{k_1 t}+c_2 t e^{k_1 t}$, c_1, c_2 costanti

$k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$, $\beta \neq 0$ $\Longrightarrow$ $u(t)=e^{\alpha t}\left(c_1 \cos\beta t + c_2 \operatorname{sen}\beta t\right)$, c_1, c_2 costanti

$\boxed{\text{PASSO 2}}$ Vediamo ora come trovare le soluzioni dell'equazione non omogenea

$$\boxed{y''(t)+ay'(t)+by(t)=r(t)}$$

Si può dimostrare facilmente che tutte e sole le soluzioni di questa equazione sono date da

$$\boxed{y(t)=u(t)+w(t)},$$

dove $u(t)$ è la soluzione generale dell'omogenea e $w(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Non ci dilungheremo sui metodi per trovare tale soluzione particolare: osserviamo solo che "quasi" sempre si ha che

Se $r(t)$ è un polinomio $P_n^*(t)$ di grado n, $w(t)$ si cerca fra i polinomi $P_n(t)$ di grado n

Se $r(t) = e^{pt}$, $w(t)$ si cerca del tipo $c \cdot e^{pt}$

se $r(t) = \operatorname{sen} \theta t$ oppure $r(t) = \cos \theta t$, $w(t)$ si cerca fra le combinazioni lineari $c_1 \cos \theta t + c_2 \operatorname{sen} \theta t$

$\boxed{\text{PASSO 3}}$ Una volta trovata la soluzione generale $y(t)$ dell'equazione (e solo allora!!) si impongono le condizioni iniziali che determinano univocamente la soluzione del problema di Cauchy.

Facciamo un esempio: risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = t^2 \\ y(0) = \dfrac{3}{8} \\ y'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\boxed{\text{1° passo}}$ Troviamo la soluzione generale $u(t)$ dell'equazione omogenea associata

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \implies k_1 = k_2 = -2$$

e quindi $$u(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$$

$\boxed{2^\circ \text{ passo}}$ Troviamo una soluzione particolare $w(t)$ dell'equazione non omogenea. Poichè il termine noto $r(t)$ è $r(t)=t^2$, cerchiamo $w(t)$ della forma

$$w(t) = At^2 + Bt + C \quad .$$

Poichè $w'(t) = 2At + B$, $w''(t) = 2A$, sostituendo $w(t)$ a $y(t)$ si ottiene l'equazione

$$2A + 4(2At+B) + 4(At^2+Bt+C) = t^2 ,$$

cioè

$$4At^2 + (8A+4B)t + 2A + 4B + 4C = t^2 ;$$

affinchè questa uguaglianza fra polinomi sia vera, deve essere

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 8A + 4B = 0 \\ 2A + 4B + 4C = 0 \end{cases} , \text{ da cui } \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4}(-2) = -\frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}+2\right) = \frac{3}{8} \end{cases} ,$$

quindi

$$w(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}$$

L'equazione generale dell'equazione è pertanto

$$y(t) = u(t) + w(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}$$

$\boxed{3^\circ \text{ passo}}$ Imponiamo le condizioni iniziali; poichè

$$y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 2c_2 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$$

e quindi deve essere

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= c_1 + \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \\ y'(0) &= -2c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right| \Longrightarrow \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

Abbiamo così trovato la soluzione del nostro problema di Cauchy: essa è

$$y(t) = te^{-2t} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}.$$

E' sempre bene controllare di aver fatto i conti giusti, verificando che $y(t)$ sia davvero soluzione dell'equazione e che siano verificate le condizioni iniziali. Facciamolo:

$$y' = e^{-2t} - 2te^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$$

$$y'' = -4e^{-2t} + 4te^{-2t} + \frac{1}{2}$$

e quindi

$$y'' + 4y' + 4y = -4e^{-2t} + \cancel{4te^{-2t}} + \frac{1}{2} + 4e^{-2t} - \cancel{8te^{-2t}} + \cancel{2t} - 2 + \cancel{4te^{-2t}} + t^2 - \cancel{2t} + \frac{3}{2} = t^2, \text{ ok}$$

$y(0) = \frac{3}{8}$, ok

$y'(0) = e^0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, ok.