Finora abbiamo esplorato $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^2$, ma molte situazioni fisiche o geometriche abbisognano di spazi a più dimensioni.

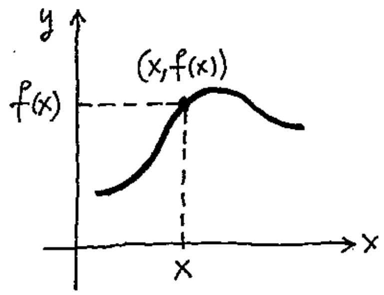
FUNZIONI DEFINITE IN $\mathbb{R}^n$ A VALORI IN $\mathbb{R}^m$

Consideriamo funzioni $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

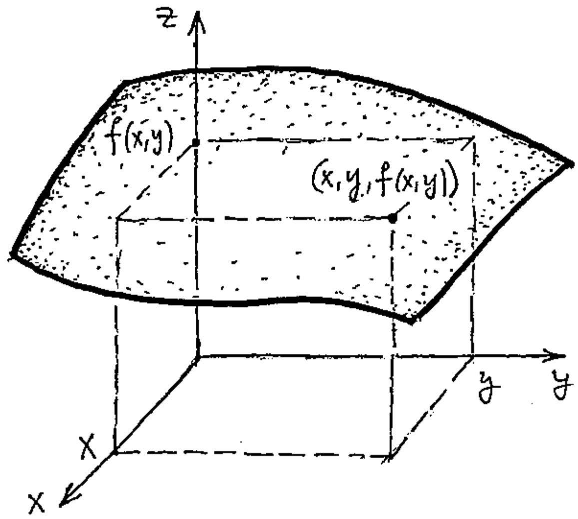
$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto F(x_1,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1,\dots,x_n) \\ \cdots \\ \cdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

Se $m = 1$ parliamo di funzioni <u>scalari</u>, se $m > 1$ di funzioni <u>vettoriali</u>.

1) <u>CASO $m = n = 1$</u> : abbiamo le funzioni di cui si è parlato per tutto il corso
Il grafico della funzione f è costituito dai punti $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$.

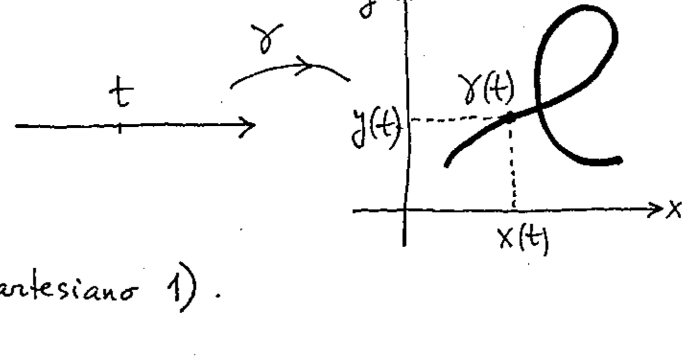


2) <u>CASO $n = 2$, $m = 1$</u>: abbiamo le superfici cartesiane in $\mathbb{R}^3$.
Il grafico della funzione f è costituito dai punti $(x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3$.



3) <u>CASO $n=1$, $m=2$</u>: abbiamo le curve nel piano

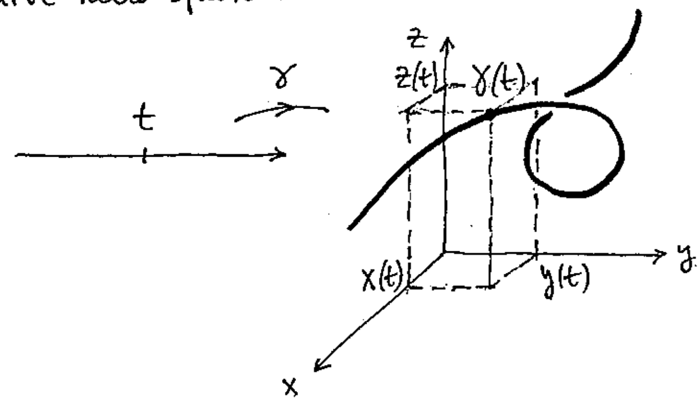
$$\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$



Se $x(t) = t$, ricadiamo nel caso cartesiano 1).

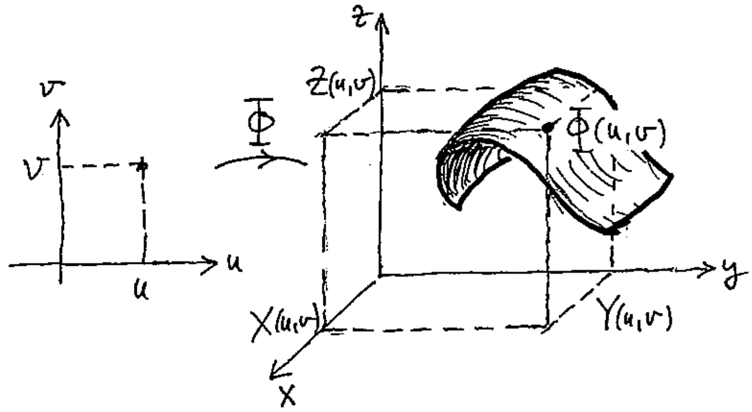
4) <u>CASO $n=1$, $m=3$</u> : abbiamo le curve nello spazio

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



5) <u>CASO $n=2$, $m=3$</u> : abbiamo le superfici nello spazio

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longmapsto \Phi(u,v) = \begin{pmatrix} X(u,v) \\ Y(u,v) \\ Z(u,v) \end{pmatrix}$$



Se $X(u,v) = u$, $Y(u,v) = v$,
ricadiamo nel caso cartesiano 2).

Vediamo di approfondire per il momento il CASO 2

FUNZIONI DI DUE VARIABILI A VALORI IN $\mathbb{R}$

Ricordiamo, prima di introdurre le funzioni di due variabili, che cosa significa Continuità in x_0, per una funzione di una variabile reale.

DEFINIZIONE : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice <u>continua</u> in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) ,$$

cioè, scritto per esteso, se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{ t.c. } |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \text{ verificante } |x - x_0| < \delta$$

Se ora consideriamo una funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, possiamo dare la definizione di continuità nel punto (x_0, y_0) in maniera del tutto analoga, cioè richiedendo che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) ,$$

dove

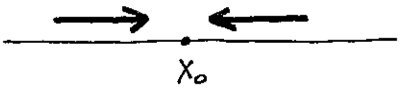
DEFINIZIONE

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{ssse} \quad \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \text{ tale che } |f(x,y)-L|<\varepsilon$$
$$\forall (x,y) \text{ verificante } 0<d\left[(x,y),(x_0,y_0)\right]<\delta ,$$

dove

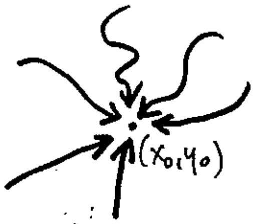
$$d\left[(x,y),(x_0,y_0)\right] = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \quad \text{è la distanza tra } (x,y) \text{ ed } (x_0,y_0) .$$

Anche se la definizione di continuità in $\mathbb{R}^2$ è analoga a quella in $\mathbb{R}$, è molto più complicato testarla. Mentre per una funzione di una variabile l'esistenza del limite segue dall'esistenza del limite destro e del limite sinistro (e dalla loro uguaglianza), poichè x può tendere ad x_0 solo da destra o da sinistra

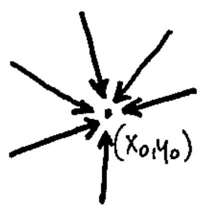


,

per una funzione di due variabili i "percorsi" che può fare (x,y) per avvicinare (x_0,y_0) sono infiniti e non si può quindi testare il limite su ogni singolo percorso.



E <u>non</u> è vero, come potrebbe sembrare a prima vista, che basta studiare i limiti lungo tutte le rette che portano ad (x_0,y_0).



Ma vediamo in concreto qualche esempio:

ESEMPIO 1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f è continua in $(0,0)$, infatti

$$0 \leqslant \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| x \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leqslant |x| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0 .$$

Per dimostrare la discontinuità di una funzione di due variabili basta trovare un percorso lungo il quale $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$

ESEMPIO 2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se si prende $y = x$ (quindi si raggiunge l'origine lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante) si ha

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=y}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

e quindi f non è continua in $(0,0)$.

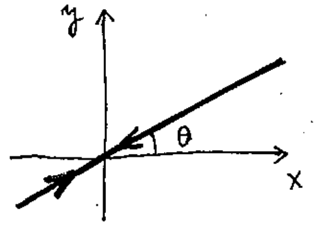
Vediamo ora una funzione che è continua in $(0,0)$ lungo tutte le possibili direzioni, ma non è continua in $(0,0)$.

ESEMPIO 3

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

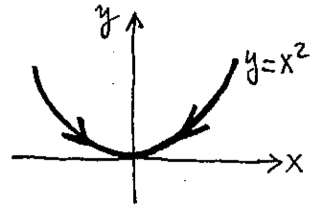
Le rette passanti per $(0,0)$ sono della forma

$$(x,y) = (\alpha t, \beta t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{l}\alpha = \cos\theta \\ \beta = \operatorname{sen}\theta\end{array} ;$$



si ha

$$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha^2 \beta t^3}{\alpha^4 t^4 + \beta^2 t^2} = \frac{\alpha^2 \beta t}{\alpha^4 t^2 + \beta^2} \xrightarrow{t \to 0} 0 = f(0,0)$$



Però se si considera il percorso $y = x^2$ si ottiene

$$\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0),$$

e quindi f non è continua in $(0,0)$.

DEFINIZIONE: $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice <u>continua in A</u> ssse f è continua in (x_0, y_0) $\forall (x_0, y_0) \in A$.

Così come accadeva per funzioni di una variabile, anche qui valgono le seguenti

PROPRIETA': Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. Si ha

1) $f+g$ è continua
2) $f \cdot g$ è continua
3) $\frac{f}{g}$ è continua (dove $g \neq 0$)

ESEMPI di funzioni continue

$f(x,y) = x$, $f(x,y) = y$ (proiezioni sugli assi coordinati) sono continue;

i polinomi $f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} x^i y^j$ sono funzioni continue (in particolare le funzioni lineari $\Lambda(x,y) = ax + by$ sono continue); le funzioni razionali sono continue in quei punti dove il denominatore non si annulla.

Inoltre, se $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono continue, si ha che la composizione $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto g(f(x,y))$$

è ancora una funzione continua. Ad esempio, e^{x+y}, $\operatorname{sen}(xy)$, $\log(1+x^2+y^2)$ sono continue.

Vediamo adesso come si sviluppa il concetto di derivata quando si considerano funzioni di due variabili.

CALCOLO DIFFERENZIALE PER FUNZIONI DI DUE VARIABILI A VALORI IN $\mathbb{R}$.

Ricordiamo che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice <u>derivabile</u> in x_0 se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

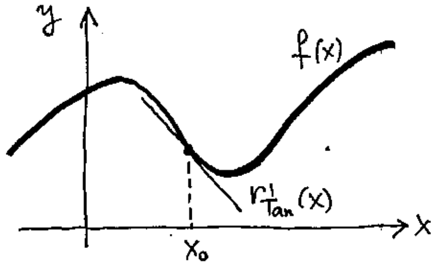
Tale limite si chiama <u>derivata di f in x_0</u> e si denota con $f'(x_0)$.

Osserviamo che, se esiste una retta

$$r(x) = a(x-x_0) + q$$

che approssima bene la funzione f in x_0, nel senso che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-r(x)}{x-x_0} = 0,$$



deve essere $a = f'(x_0)$ (oltre a ovviamente $q = f(x_0)$), i.e., la retta deve essere

$$r(x) = r_{Tan}(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

$r_{Tan}(x)$ è detta <u>retta tangente</u>.

L'esistenza di $f'(x_0)$ è equivalente all'esistenza di $r_{Tan}(x)$.

In $\mathbb{R}^2$ le cose si complicano un po'.

Diremo che $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ è <u>derivabile</u> in (x_0,y_0) se esistono finiti

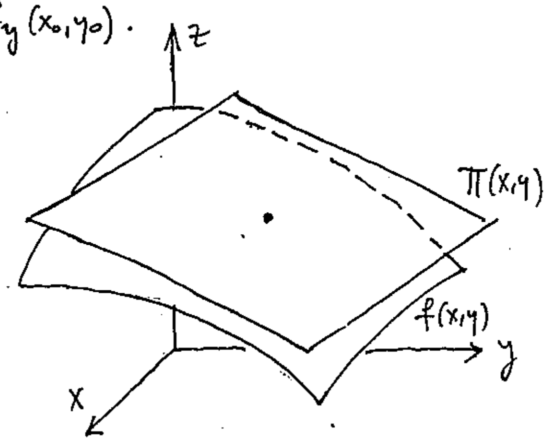
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,\,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

e

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

Tali limiti si chiamano rispettivamente <u>derivata parziale</u> di f rispetto ad x in (x_0,y_0) e <u>derivata parziale</u> di f rispetto ad y in (x_0,y_0) e si denotano con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\quad \text{oppure con}\quad f_x(x_0,y_0)\,,\ f_y(x_0,y_0)\,.$$



Osserviamo che, se esiste un piano

$$\Pi(x,y)=a(x-x_0)+b(y-y_0)+q$$

che meglio approssima la funzione f in (x_0,y_0), nel senso che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-\Pi(x,y)}{d[(x,y),(x_0,y_0)]}=0\,,\qquad (*)$$

deve essere $a=f_x(x_0,y_0)$, $b=f_y(x_0,y_0)$ (oltre ovviamente a $q=f(x_0,y_0)$), i.e. il piano in questione deve essere

$$\Pi(x,y)=\Pi_{Tan}(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$\Pi_{Tan}(x,y)$ è detto <u>piano tangente</u>.

<u>Dimostriamo tale affermazione</u>: Se nel limite $(*)$ facciamo (x,y) tendere ad (x_0,y_0) orizzontalmente lungo (x,y_0), si dovrà avere

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-a(x-x_0)-f(x_0,y_0)}{|x-x_0|}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}-a\right]\cdot\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$$

e quindi

$$a = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = f_x(x_0,y_0)$$

(analogamente si dimostra che $b = f_y(x_0,y_0)$).

E' importante notare che l'esistenza di $f_x(x_0,y_0)$ ed $f_y(x_0,y_0)$ e l'esistenza di $\Pi_{Tan}(x,y)$ <u>non sono equivalenti</u>; può succedere infatti che esistano f_x, f_y in (x_0,y_0), ma non il piano tangente in (x_0,y_0) (vedi dopo).
Nel caso esista il piano tangente in (x_0,y_0) si dice che f è <u>differenziabile</u> in (x_0,y_0). Riassumendo:

DEFINIZIONE: $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice <u>differenziabile</u> in (x_0,y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 .$$

NOTAZIONE: Chiameremo il vettore dato dalle derivate parziali di f in (x_0,y_0) <u>gradiente di $f(x,y)$ in (x_0,y_0)</u> e lo denoteremo con $Df(x_0,y_0)$; quindi

$$Df(x_0,y_0) = \left(f_x(x_0,y_0),\, f_y(x_0,y_0)\right)$$

Riguardo al piano tangente facciamo un'osservazione che ci potrà essere utile in seguito. La sua equazione

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

si può scrivere anche

$$-f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \left(z - f(x_0,y_0)\right) = 0$$

ed ancora

$$\left(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\right) \bullet \left(x-x_0, y-y_0, z-f(x_0,y_0)\right) = 0 \quad ,$$

che è l'equazione di un piano in forma normale.

RICORDO: l'equazione del piano passante per $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ e perpendicolare al vettore $N = (n_1,n_2,n_3) \neq (0,0,0)$ è

$$N \bullet (P-P_0) = 0 \quad , \quad P=(x,y,z)$$

Questo significa che

$$\left(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\right) = \left(-Df(x_0,y_0), 1\right)$$

è un vettore ortogonale al piano tangente. Normalizzando, ho che

$$N = \frac{\left(-Df(x_0,y_0), 1\right)}{\sqrt{1+\|Df(x_0,y_0)\|^2}}$$

è un vettore di norma 1 ortogonale al piano tangente.

Possiamo dire che in $\mathbb{R}^2$ le veci della derivabilità in $\mathbb{R}$ le fa la differenziabilità (e <u>non</u> la derivabilità). Infatti, si può vedere che l'esistenza di $f_x(x_0,y_0)$ ed $f_y(x_0,y_0)$ non solo <u>non</u> implica l'esistenza del piano tangente <u>ma nemmeno la continuità</u>.

AD ESEMPIO, la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad ,$$

che abbiamo già dimostrato <u>non</u> essere continua in $(0,0)$, ha ambedue le derivate parziali; infatti

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

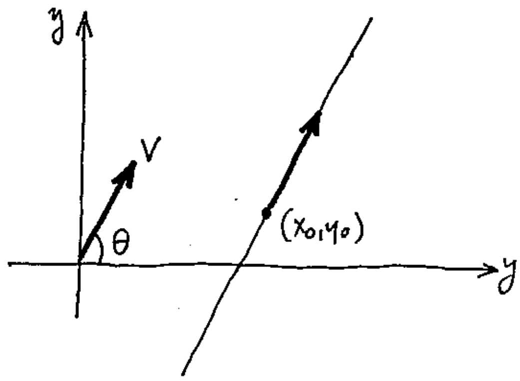
$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0 \ .$$

Invece la differenziabilità in (x_0,y_0) implica la continuità in (x_0,y_0) (immediato)

C'è però un importante teorema che, con un ipotesi in più oltre all'esistenza di f_x ed f_y, garantisce la differenziabilità:

TEOREMA: Se le derivate parziali $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ esistono in un intorno di (x_0,y_0) e sono continue nel punto (x_0,y_0), allora f è differenziabile in (x_0,y_0).

DERIVATE DIREZIONALI



Sia $V=(\alpha,\beta)$ un vettore unitario, i.e.

$\alpha = \cos\theta$, $\beta = \operatorname{sen}\theta$.

Consideriamo $f(x,y)$ ristretta alla retta

$(x_0+\alpha t,\ y_0+\beta t)$, $t\in\mathbb{R}$, cioè

$$\varphi(t) = f(x_0+\alpha t,\ y_0+\beta t).$$

La derivata $\varphi'(0)$, se esiste, si chiama derivata di f nella direzione V nel punto (x_0,y_0) e la si indica con il simbolo

$$\frac{\partial f}{\partial V}(x_0,y_0) \quad \text{oppure} \quad D_V f(x_0,y_0).$$

Esplicitamente

$$D_V f(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+\alpha t,\ y_0+\beta t) - f(x_0,y_0)}{t}.$$

Notiamo che, in particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(x_0,y_0), \quad e_1=(1,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(x_0,y_0), \quad e_2=(0,1)$$

Se f è differenziabile in (x_0, y_0) si ottiene un'utilissima formula di calcolo delle derivate direzionali in termini delle derivate parziali, e cioè

$$\boxed{D_v f(x_0,y_0) = Df(x_0,y_0) \bullet v}$$

Da questa formula si ottiene immediatamente (disug. di SCHWARZ) che il gradiente fornisce la direzione di massima crescita della funzione f; più precisamente

$$v_{max} = \frac{Df(x_0,y_0)}{\|Df(x_0,y_0)\|} \quad , \quad v_{min} = -\frac{Df(x_0,y_0)}{\|Df(x_0,y_0)\|}$$

$$D_{v_{max}} f(x_0,y_0) = \|Df(x_0,y_0)\| \quad , \quad D_{v_{min}} f(x_0,y_0) = -\|Df(x_0,y_0)\|$$

Inoltre

$$v \perp Df(x_0,y_0) \implies D_v f(x_0,y_0) = 0$$

OSSERVAZIONE: Abbiamo già visto precedentemente che l'esistenza delle derivate parziali non garantisce la differenziabilità (addirittura neanche la continuità). Bene, neppure l'esistenza e l'eguaglianza di tutte le derivate direzionali garantiscono la continuità (tantomeno quindi la differenziabilità).

AD ESEMPIO, sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f ha derivata direzionale 0 in $(0,0)$ qualunque sia la direzione, infatti, se $\alpha = 0$ è ovvio, se $\alpha \neq 0$ si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\alpha t, \beta t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{\alpha\beta^3 t^4}{\alpha^2 t^2 + \beta^6 t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha\beta^3 t}{\alpha^2 + \beta^6 t} = 0 .$$

Tuttavia f non è continua in $(0,0)$, infatti lungo il percorso $x=y^3$ si ha

$$\lim_{y\to 0} f(y^3,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{y^6+y^6} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

DERIVATA DELLA COMPOSTA

Nel caso le variabili x e y siano entrambe funzioni di una variabile t, cioè $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, è naturale chiedersi come calcolare

$$\Big(f\big(x(t), y(t)\big)\Big)' = \frac{d}{dt}\Big(f\big(x(t),y(t)\big)\Big)$$

Si ha la seguente importante formula (che non dimostreremo):

$$\boxed{\frac{d}{dt} f\big(x(t),y(t)\big) = f_x\big(x(t),y(t)\big)\, x'(t) + f_y\big(x(t),y(t)\big)\, y'(t)}$$

Vediamo un

ESEMPIO: Se $(x(t), y(t))$ è una descrizione della circonferenza $x^2+y^2 = 9$, cioè ad esempio

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = 3\,\text{sen}\, t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

e se $f(x,y) = x^2+y^3$, risulta

$$f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = 3y^2, \quad x'(t) = -3\,\text{sen}\, t, \quad y'(t) = 3\cos t$$

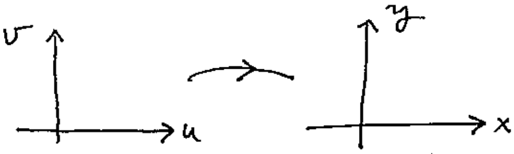
e quindi

$$\frac{d}{dt} f(3\cos t, 3\,\text{sen}\, t) = 2(3\cos t)(-3\,\text{sen}\, t) + 3(3\,\text{sen}\, t)^2 (3\cos t) =$$

$$= 9 \cos t\, \text{sen}\, t \, (9\,\text{sen}\, t - 2)$$

Consideriamo ora la situazione più generale in cui

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases},$$



cioè quello che si chiama <u>cambio di variabili nel piano</u>.

In analogia a quanto visto prima si può dimostrare che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) = f_x\big(x(u,v), y(u,v)\big) \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + f_y\big(x(u,v), y(u,v)\big) \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) = f_x\big(x(u,v), y(u,v)\big) \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) + f_y\big(x(u,v), y(u,v)\big) \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

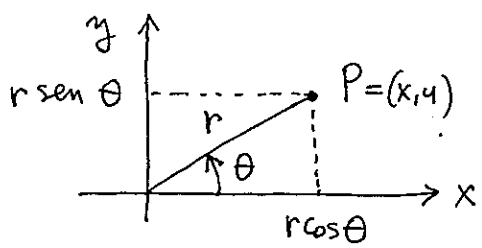
Chiameremo <u>jacobiana</u>

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

la matrice associata al cambio di variabili.

ESEMPIO: Consideriamo il cambio di variabili da coordinate cartesiane a coordinate polari, cioè

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = y(r,\theta) = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases},$$



$$\theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, +\infty)$$

Sia $f(x,y) = x^2+y^3$; si ha $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 3y^2$ e quindi

$$f_x(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 2r\cos\theta \quad , \quad f_y(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 3r^2\operatorname{sen}^2\theta$$

Inoltre $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

DERIVATE SUCCESSIVE. Come nel caso di una funzione di una variabile si parla di derivata seconda, terza, ecc., anche per una funzione di due variabili si introduce in maniera naturale il concetto di derivata seconda, terza, ecc., notando che in questo caso le derivate seconde "canoniche" saranno quattro, ed esattamente

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) , \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) .$$

Tali derivate si indicano rispettivamente con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad ,$$

oppure con

$$f_{xx} \quad , \quad f_{yx} \quad , \quad f_{xy} \quad , \quad f_{yy} .$$

Le derivate seconde f_{xx} ed f_{yy} si dicono derivate seconde pure, mentre le derivate seconde f_{xy} ed f_{yx} si dicono derivate seconde miste. In generale

$$f_{xy} \neq f_{yx} \quad ;$$

si prenda ad esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Si ha $f_{xy}(0,0)=-1$, mentre $f_{yx}(0,0)=1$. Infatti, calcoliamo innanzitutto

$$f_x(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0} y\,\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}=-y \quad \forall\, y$$

$$f_y(x,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k}=\lim_{k\to 0} x\,\frac{x^2-k^2}{x^2+k^2}=x \qquad \forall\, x$$

Quindi $f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$.

In positivo si ha il seguente

TEOREMA (Schwarz)

Se f_{xy} ed f_{yx} esistono e sono continue in un intorno di (x_0,y_0), allora

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

Per comodità le derivate seconde si raggruppano di solito nella <u>matrice hessiana</u>

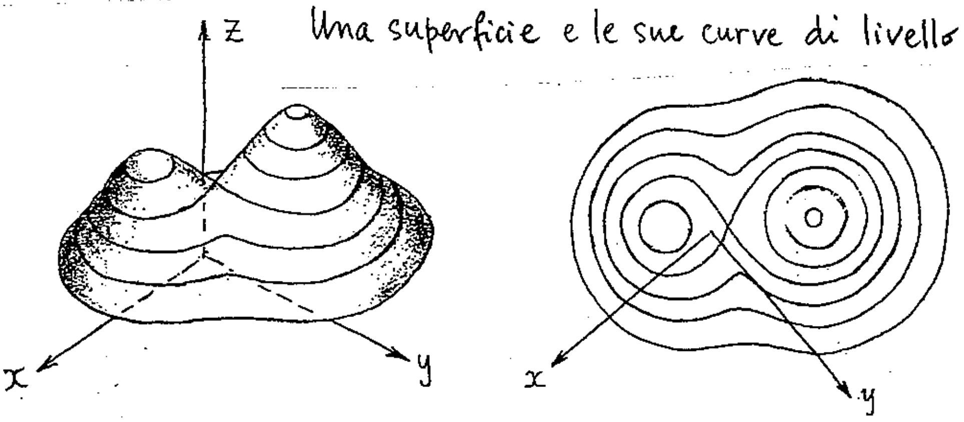
$$Hf(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}$$

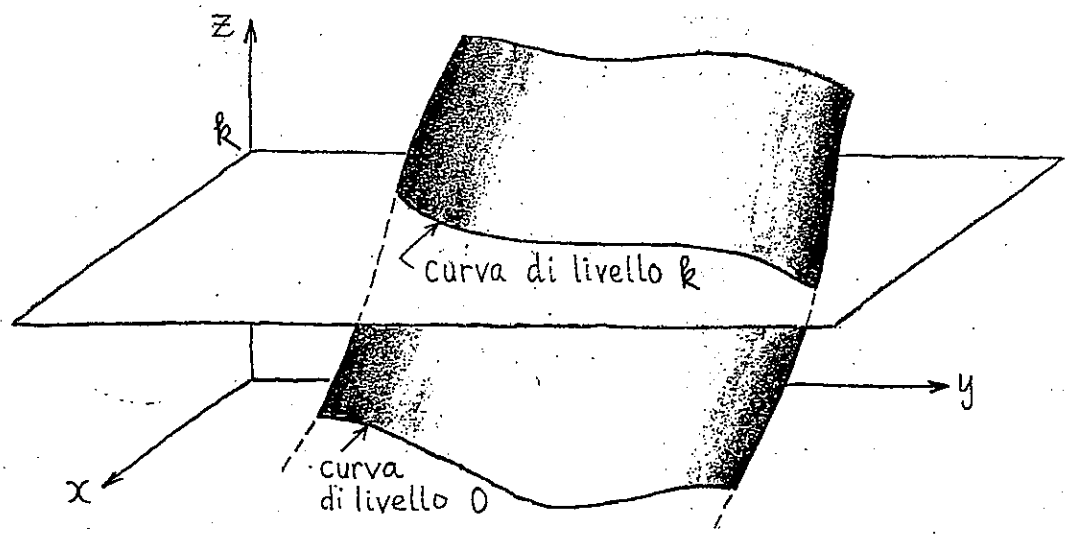
(in cui naturalmente tutte le derivate sono calcolate in (x_0,y_0)).
Osserviamo che se valgono le ipotesi della proposizione precedente, la matrice hessiana è <u>simmetrica</u>. Nel seguito avremo a che fare di solito con funzioni con tale proprietà.

FUNZIONI IMPLICITE

Immaginiamo il grafico di una funzione f di due variabili come il "plastico" di un territorio montuoso con colline, passi, altipiani, ma senza burroni. Chi fa le mappe di questi territori usa soprattutto le curve cosiddette "di livello", cioè le curve che uniscono punti ad eguale altitudine. Se si ha un po' di esperienza di queste mappe si sa che, a parte zone particolari, gli insiemi di livello sono curve regolari (noi diremo che localmente coincidono con il grafico di una funzione derivabile). Le zone particolari sono date da cime (l'insieme di livello è un punto e lì il piano tangente al grafico è orizzontale), da ampie zone pianeggianti come i laghi, che certo non sono curve, o anche da passi di montagna, dove l'insieme di livello può essere costituito da due curve che si incrociano.

Una superficie e le sue curve di livello





La zona di uguale altitudine k è data da:

$$f(x,y) = k \;,$$

che, posto $F(x,y) = f(x,y) - k$, si può vedere come luogo di zeri di F, cioè

$$F(x,y) = 0 .$$

E' interessante cercare di capire sotto quali condizioni si può essere sicuri che tale zona sia descrivibile almeno localmente con una funzione

$$y = \varphi(x) \qquad (\text{o} \quad x = \psi(y)) .$$

Tale funzione $\varphi(x)$ sarà definita implicitamente da

$$(*) \quad F(x, \varphi(x)) = 0$$

Supponiamo che tale funzione φ esista e sia derivabile e deriviamo $(*)$ usando la formula della derivata della composta. Si ha

$$0 = \Big(F(x, \varphi(x))\Big)' = \frac{d}{dx}\Big(F(x, \varphi(x))\Big) =$$

$$= F_x(x, \varphi(x)) + F_y(x, \varphi(x))\, \varphi'(x)$$

e quindi, se $F_y(x, \varphi(x)) \neq 0$, si ha

$$\varphi'(x) = - \frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$$

Precisamente, si ha il seguente

TEOREMA (della funzione implicita, DINI)

Sia $F(x,y)$ una funzione derivabile in un intorno di (x_0,y_0), con derivate continue in tale intorno. Supponiamo anche che sia

$$F(x_0,y_0)=0, \quad F_y(x_0,y_0)\neq 0 .$$

Allora esistono $\delta>0$ ed $r>0$ tali che

1) $\forall\, x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$ esiste un unico $y\in[y_0-r, y_0+r]$ tale che $F(x,y)=0$. Grazie all'unicità, possiamo anche scrivere $y=\varphi(x)$.

2) la funzione $\varphi:[x_0-\delta, x_0+\delta]\to\mathbb{R}$ è derivabile e si ha

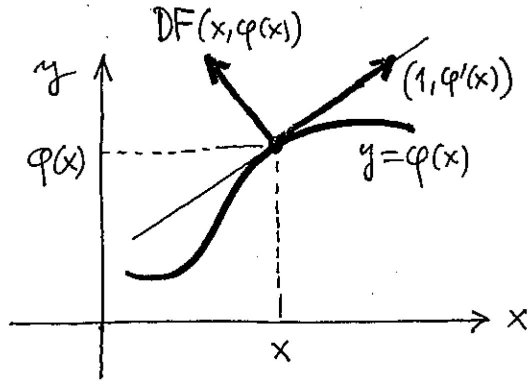
$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))} .$$

(notiamo che, se invece di avere la condizione $F_y(x_0,y_0)\neq 0$, sapessimo che $F_x(x_0,y_0)\neq 0$, scambiando i ruoli di x e y potremmo dire che il luogo di zeri della F in un intorno di (x_0,y_0) coincide con il grafico di una funzione $x=\psi(y)$).

OSSERVAZIONE: Nell'applicare la regola della derivata della composta per ricavare la derivata di $\varphi(x)$, abbiamo trovato (usiamo il linguaggio vettoriale) che

$$\Big(F_x(x,\varphi(x)),\ F_y(x,\varphi(x))\Big)\bullet\Big(1,\ \varphi'(x)\Big)=0,$$

cioè $DF(x,\varphi(x))\perp(1,\varphi'(x))$. Ma il vettore $(1,\varphi'(x))$ dà la direzione della retta tangente al grafico di φ per il punto $(x, \varphi(x))$. Questo significa che gradiente e curve di livello sono <u>ortogonali</u> in ogni punto.



MASSIMI e MINIMI

Sia $f = f(x,y)$; un punto (x_0,y_0) si dice di <u>minimo locale</u> se $\exists\, r>0$ t.c.

$$f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \qquad \forall\, (x,y) \in B_r(x_0,y_0)$$

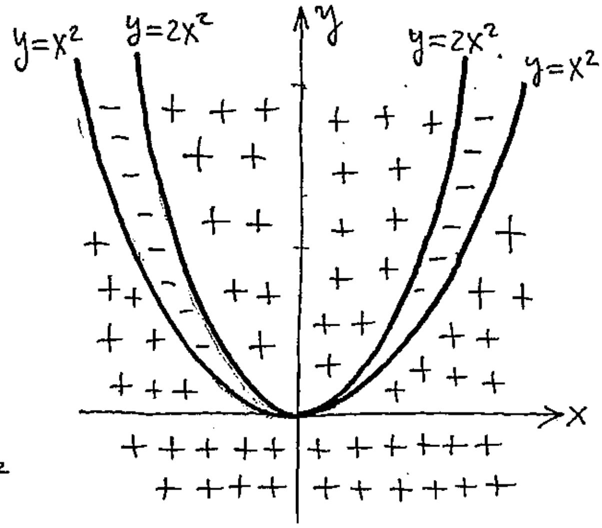
Un punto (x_0,y_0) si dice di <u>massimo locale</u> se $\exists\, r>0$ t.c.

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y) \qquad \forall\, (x,y) \in B_r(x_0,y_0)$$

La ricerca dei punti di massimo e minimo in $\mathbb{R}^2$ è più complicata che in una variabile. Il seguente esempio mostra che una funzione può avere minimo in $(0,0)$ se ristretta a qualunque retta per l'origine, pur non avendo globalmente minimo in $(0,0)$.

ESEMPIO Sia

$$f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2 = $$
$$= (y-x^2)(y-2x^2)$$



La restrizione di f alla retta $(\alpha t, \beta t)$, $t \in \mathbb{R}$, è la funzione

$$\varphi(t) = f(\alpha t, \beta t) = 2\alpha^4 t^4 - 3\alpha^2\beta t^3 + \beta^2 t^2$$

$$\varphi'(t) = 8\alpha^4 t^3 - 9\alpha^2\beta t^2 + 2\beta^2 t, \quad \text{quindi } \varphi'(0) = 0$$

$$\varphi''(t) = 24\alpha^4 t^2 - 18\alpha^2\beta t + 2\beta^2, \quad \text{quindi } \varphi''(0) = 2\beta^2 \begin{cases} >0 & \text{se } \beta \neq 0 \\ 0 & \text{se } \beta = 0 \end{cases}$$

(se $\beta=0$ si ha $\varphi(t)=2\alpha^4t^4$, che ha minimo in $t=0$)

Quindi $f(x,y)$ ristretta a qualunque retta per l'origine ha minimo in $(0,0)$, mentre non ha minimo in $(0,0)$; infatti, $\forall r>0$ la f ha punti in $B_r(0,0)$ dove è positiva e punti dove è negativa.

Tuttavia, è chiaro in generale che, posto

$$\varphi(t)=f(x_0+\alpha t,\, y_0+\beta t)\quad,\quad \alpha^2+\beta^2=1\quad,$$

si ha l'implicazione

$$\begin{array}{ccc} f \text{ ha minimo locale in } (x_0,y_0) & \Longrightarrow & \varphi \text{ ha minimo locale in } t=0 \\ & \not\Longleftarrow & \text{(esempio precedente)} \end{array}$$

Quindi, deve essere $\varphi'(0)=0$, $\varphi''(0)\geq 0$, cioè

1) $f_x(x_0,y_0)\alpha+f_y(x_0,y_0)\beta=0 \quad \forall \alpha,\beta$

2) $f_{xx}(x_0,y_0)\alpha^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\alpha\beta+f_{yy}(x_0,y_0)\beta^2\geq 0 \quad \forall\alpha,\beta$

La 1) è ovviamente equivalente a

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0\quad;$$

si dice in questo caso che (x_0,y_0) è un <u>punto critico</u>.

La 2) si può esprimere in termini della matrice hessiana, come vedremo dopo.

Abbiamo già notato che le condizioni 1)+2) non sono però sufficienti. Per dimostrare un teorema in positivo abbiamo bisogno della formula di Taylor di ordine 2:

FORMULA di TAYLOR

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ due volte derivabile con derivate prime e seconde continue in un intorno di (x_0, y_0); si ha

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] +$$

$$+ E_2\left(d^2\left[(x_0,y_0),(x,y)\right]\right) \quad ,$$

dove $E_2\left(d^2\left[(x_0,y_0),(x,y)\right]\right) = E_2\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)$ è tale che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E_2\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = 0$$

Questa formula si dimostra facilmente considerando la funzione f ristretta al segmento congiungente (x,y) a (x_0,y_0), cioè

$$\varphi(t) = f\left(x_0+t(x-x_0),\ y_0+t(y-y_0)\right)$$

e scrivendo la formula di Taylor di ordine 2 per φ, tenendo conto della regola di derivazione di una funzione composta.

Siamo ora in grado di dimostrare un risultato che ci permette di determinare se un punto critico è di massimo o di minimo relativo:

TEOREMA: Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ due volte derivabile con derivate prime e seconde continue in un intorno di (x_0,y_0). Supponiamo che (x_0,y_0) sia un punto critico, cioè $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$. Se

$$\det Hf(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)\,f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0 ,$$

allora (x_0,y_0) è un punto di minimo relativo o di massimo relativo a seconda che sia $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ o $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ rispettivamente.

<u>Viceversa</u>: se (x_0,y_0) è un punto di minimo (rispettivamente massimo)

relativa per f, allora $\det Hf(x_0,y_0) \geq 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) \geq 0$ (rispettivamente $f_{xx}(x_0,y_0) \leq 0$).

Come conseguenza, un punto critico in cui $\det Hf(x_0,y_0) < 0$ non è né di massimo né di minimo (ed è detto punto di sella).

dimostrazione:

Poiché (x_0,y_0) è un punto critico, la formula di Taylor di ordine 2 centrata in (x_0,y_0) si riduce a

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{y}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] +$$
$$+ E_2\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right).$$

Per brevità denotiamo con $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ e poniamo $u = \frac{x-x_0}{r}$, $v = \frac{y-y_0}{r}$. Con semplici passaggi algebrici la formula diventa

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \overset{u^2+v^2=1}{=}$$
$$= \frac{1}{2}r^2\left[f_{xx}(x_0,y_0)u^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)uv + f_{yy}(x_0,y_0)v^2 + \frac{2E_2(r^2)}{r^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}r^2\left[Q(u,v) + \frac{2E_2(r^2)}{r^2}\right],$$

dove $Q(u,v)$ è il polinomio omogeneo di secondo grado definito da

$$Q(u,v) = f_{xx}(x_0,y_0)u^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)uv + f_{yy}(x_0,y_0)v^2.$$

Se $Q(u,v)$ ha segno costante, a patto di scegliere r abbastanza piccolo, anche $Q(u,v) + \frac{2E_2(r^2)}{r^2}$ avrà lo stesso segno costante (ricordiamo che $\lim_{r\to 0} \frac{2E_2(r^2)}{r^2} = 0$) e saremo quindi in presenza di massimi o minimi. Vediamo quali sono le condizioni affinchè Q abbia segno costante.

$$Q(u,v) = \frac{1}{f_{xx}}\left[f_{xx}^2 u^2 + 2 f_{xx} f_{xy} uv + f_{xx} f_{xy} v^2\right] =$$

$$= \frac{1}{f_{xx}}\left[\left(f_{xx} u + f_{xy} v\right)^2 - f_{xy}^2 v^2 + f_{xx} f_{xy} v^2\right] =$$

$$(*) \quad = \frac{1}{f_{xx}}\left[\left(f_{xx} u + f_{xy} v\right)^2 + \left(f_{xx} f_{xy} - f_{xy}^2\right) v^2\right] =$$

$$= \frac{1}{f_{xx}}\left[\left(f_{xx} u + f_{xy} v\right)^2 + \det H_f \, v^2\right]$$

Quindi se $\det Hf(x_0,y_0) > 0$ avremo che $Q(u,v)$ ha segno costante (lo stesso segno di $f_{xx}(x_0,y_0)$).

Vediamo il viceversa: abbiamo già osservato che se (x_0,y_0) è un punto di minimo allora deve essere $Q(u,v) \geq 0$; ma questo è equivalente a $\det H_f(x_0,y_0) \geq 0$ ed $f_{xx}(x_0,y_0) \geq 0$. Analogamente si ragiona se (x_0,y_0) è un punto di minimo.

#

Riassumendo, se (x_0,y_0) è un punto critico, cioè se

$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0,$$

si ha

- $\left.\begin{array}{l}\det H_f(x_0,y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0,y_0) > 0\end{array}\right| \Longrightarrow (x_0,y_0)$ è punto di minimo

- $\left.\begin{array}{l}\det H_f(x_0,y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0,y_0) < 0\end{array}\right| \Longrightarrow (x_0,y_0)$ è punto di massimo

- $\det H_f(x_0,y_0) < 0 \quad \Longrightarrow (x_0,y_0)$ è punto di sella

Infatti, se $f_{xx}(x_0,y_0) \neq 0$, usando la (*) precedente si ottiene che

$$Q(1,0) = f_{xx}(x_0,y_0)$$

$$Q\left(f_{xy}(x_0,y_0), -f_{xx}(x_0,y_0)\right) = f_{xx}(x_0,y_0) \det H_f(x_0,y_0)$$

(se $f_{xx}(x_0,y_0) = 0$ ma $f_{yy}(x_0,y_0) \neq 0$ si procede in modo analogo)

Se $f_{xx}(x_0,y_0) = f_{yy}(x_0,y_0) = 0$

$$Q(u,v) = 2 f_{xy}(x_0,y_0)\, u v$$

che cambia segno a seconda che u e v abbiano segno concorde oppure discorde.

- $\det H_f(x_0,y_0) = 0$: nulla può dirsi in generale.

Vediamo infatti degli esempi che mostrano come in quest'ultimo caso si possano avere sia punti di massimo, che di minimo, che di sella.

ESEMPIO 1: $f(x,y) = x^2 + y^3$, $(x_0,y_0) = (0,0)$; si ha $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 3y^2$, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ e quindi $(0,0)$ è un punto critico. Ora $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 6y$ e quindi

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$. In particolare $\det Hf(0,0) = 0$. Poiché

$$f(0,y) = y^3 \begin{cases} >0 & \text{se } y>0 \\ <0 & \text{se } y<0 \end{cases}$$ il punto $(0,0)$ non è né di massimo né di minimo.

ESEMPIO 2: $f(x,y) = x^4+y^4$, $(x_0,y_0)=(0,0)$; si ha $f_x(x,y) = 4x^3$, $f_y(x,y) = 4y^3$, $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ e quindi $(0,0)$ è un punto critico. Ora $f_{xx}(x,y) = 12x^2$; $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 12y^2$ e quindi

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$ e risulta $\det Hf(0,0) = 0$. In questo caso si ha

$f(x,y) = x^4+y^4 \geq 0 = f(0,0)$ e quindi $(0,0)$ è un punto di minimo.

ESEMPIO 3: Prendendo $f(x,y) = -(x^4+y^4)$ si ha che il punto critico $(0,0)$ è di massimo, $\det Hf(0,0) = 0$.

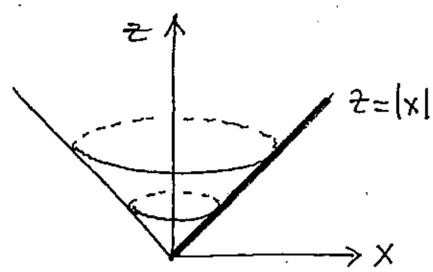
OSSERVAZIONE: I punti (x,y) dove la funzione $f(x,y)$ non verifica le ipotesi di regolarità del teorema vanno considerati a parte. Ad esempio, la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ha minimo in $(0,0)$, dove non è neppure derivabile, infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

non esiste e quindi $f_x(0,0)$ non esiste (analogamente $f_y(0,0)$ non esiste)

Tuttavia $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 = f(0,0)$.

Notiamo che f non è altro che la funzione $z=|x|$ ruotata attorno all'asse z



Vediamo ora un'applicazione del teorema sui massimi e minimi locali:

ESEMPIO: Sia $f(x,y) = 2y^2 - x(x-1)^2$. Si ha

$f_x(x,y) = -(x-1)^2 - 2x(x-1) = (x-1)(1-3x)$ e $f_y(x,y) = 4y$.

I punti critici sono i punti che verificano

$$\begin{cases} f_x(x,y) = (x-1)(1-3x) = 0 \\ f_y(x,y) = 4y = 0 \end{cases}$$ e quindi sono i punti $(1,0)$ e $(\frac{1}{3},0)$.

Calcoliamo la matrice hessiana:

$f_{xx}(x,y) = 1-3x+(x-1)(-3) = -6x+4$

$f_{yy}(x,y) = 4$, $f_{xy}(x,y) = 0$ e quindi

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6x+4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$ Dobbiamo adesso calcolare

$\det Hf(1,0)$ e $\det Hf(\frac{1}{3},0)$. Si ha

$\det Hf(1,0) = -8 < 0$ e quindi $(1,0)$ è punto di sella.

$$\left.\begin{array}{l} \det Hf(\frac{1}{3},0) = 8 > 0 \\ f_{xx}(\frac{1}{3},0) = 2 > 0 \end{array}\right\}$$ e quindi $(\frac{1}{3},0)$ è punto di minimo,

$$f(\tfrac{1}{3},0) = -\frac{4}{27}.$$

Osserviamo che il fatto che $(1,0)$ sia un punto di sella si poteva capire facilmente poichè $f(1,0)=0$ ed $f(x,0) = -x(1-x)^2$, quindi vicino ad $(1,0)$ vi sono punti nei quali la funzione è positiva come punti nei quali la funzione è negativa.

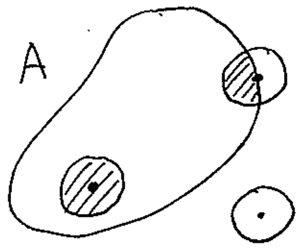
Osserviamo anche che la funzione non ha nè massimo nè minimo assoluti, infatti

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = \lim_{x \to +\infty} -x(x-1)^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x,0) = \lim_{x \to -\infty} -x(x-1)^2 = +\infty .$$

Ma questa è un'altra storia che vedremo adesso in dettaglio.

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI



Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ vale una ed una sola delle seguenti possibilità:

a) $\exists\, r>0$ t.c. $B_r(x,y) \subset A$

b) $\exists\, r>0$ t.c. $B_r(x,y) \cap A = \emptyset$

c) $\forall\, r>0$ $\quad B_r(x,y) \cap A \neq \emptyset$, $B_r(x,y) - A \neq \emptyset$

I punti a) si dicono <u>interni</u> ad A.
I punti b) si dicono <u>esterni</u> ad A.
I punti c) si dicono <u>punti frontiera</u> di A.

L'insieme dei punti frontiera di A si chiama <u>frontiera di A</u> e si indica con ∂A.
Nel caso in cui ∂A è parte dello stesso insieme A, cioè se $A = A \cup \partial A$, l'insieme si dice <u>chiuso</u>.

Nel seguito considereremo funzioni $f: A \to \mathbb{R}$, A chiuso. La ricerca di massimi e minimi in questo caso deve tener conto sia dei punti di massimo e minimo interni ad A (e per questo si applica la teoria precedente) sia del comportamento della funzione f su ∂A (del resto anche nello studio di funzioni di una variabile $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, il carattere di $f(a)$ ed $f(b)$ era valutato a parte). Questo è più agevole nel caso in cui ∂A si può descrivere in modo semplice, ad esempio se

$$\partial A = \{(x(t), y(t)),\ t\in[a,b]\},$$

con $x(t)$, $y(t)$ derivabili. Infatti in questo caso studiare la funzione f su ∂A significa studiare la funzione di una variabile

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)),\quad t\in[a,b].$$

Diamo ora la definizione di massimo e minimo assoluto:

DEFINIZIONE: Sia $f: A\to\mathbb{R}$; $(x_0,y_0)\in A$ si dice <u>punto di massimo assoluto</u> se

$$f(x_0,y_0)\geq f(x,y)\quad \forall (x,y)\in A$$

$(x_0,y_0)\in A$ si dice <u>punto di minimo assoluto</u> se

$$f(x_0,y_0)\leq f(x,y)\quad \forall (x,y)\in A.$$

Nella ricerca di massimi e minimi assoluti ci viene in aiuto un importante risultato di "esistenza":

TEOREMA di WEIERSTRASS

Sia A chiuso e limitato (cioè A è contenuto in un disco di raggio sufficientemente grande). Se $f: A\to\mathbb{R}$ è continua, allora esiste almeno un punto $(x_M, y_M)\in A$ tale che

$$f(x_M, y_M)\geq f(x,y)\quad \forall (x,y)\in A$$

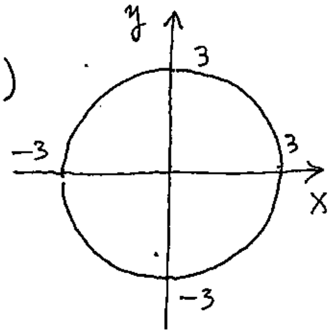
ed esiste almeno un punto $(x_m, y_m)\in A$ tale che

$$f(x_m, y_m)\leq f(x,y)\quad \forall (x,y)\in A.$$

Questo teorema ci assicura che, se dobbiamo trovare solo massimo e minimo assoluti di una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, A chiuso e limitato, basta trovarsi i punti critici della funzione all'interno (senza studiarne il carattere) e i punti critici della funzione ristretta alla frontiera di A (senza studiarne il carattere). Quindi, confrontando i valori della funzione in tutti questi punti e nei punti dove f non è derivabile si troveranno i punti di massimo assoluto (corrispondenti al valore più grande) ed i punti di minimo assoluto (corrispondenti al valore più piccolo). Questo grazie al fatto di essere sicuri della loro esistenza.

Ma vediamo un paio di esempi che riassumono i possibili comportamenti di una funzione $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato, non limitandoci alla ricerca del massimo e minimo assoluti, ma guardando anche il carattere di ogni singolo punto critico.

ESEMPIO 1 (massimo e minimo assoluti sono sul bordo)



$$f(x,y) = xy \quad , \quad A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 9\}$$

Studio all'interno di A: $f_x(x,y) = y, \ f_y(x,y) = x$,

quindi l'unico punto critico è il punto $(0,0)$.

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det Hf(x,y) = -1 < 0$ e quindi $(0,0)$ non è né di massimo né di minimo.

Studio sulla frontiera di A: Poichè

$$\partial A = \{ (3\cos t, 3 \operatorname{sen} t), \ t \in [0, 2\pi] \}$$

si tratta di studiare $\varphi(t) = f(3\cos t, 3 \operatorname{sen} t) = 9 \cos t \operatorname{sen} t$.

$\varphi'(t) = 9(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) = 9(1 - 2\operatorname{sen}^2 t) = 0 \iff \operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2} \iff$

$\Longleftrightarrow |\text{sen}\, t| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi i punti critici di $\varphi(t)$ sono

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

Si ha

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varphi\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{9}{2} \quad \text{(valore massimo)}$$

$$\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \varphi\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{9}{2} \quad \text{(valore minimo)}$$

In definitiva i punti di massimo assoluto per f sono

$$\left(3\cos\frac{\pi}{4}, 3\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad \left(3\cos\frac{5\pi}{4}, 3\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right) = \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}\right)$$

mentre i punti di minimo assoluto per f sono

$$\left(3\cos\frac{3\pi}{4}, 3\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad \left(3\cos\frac{7\pi}{4}, 3\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}\right)$$

Osserviamo che c'è un altro modo di descrivere la frontiera di A, vedendola come unione dei due grafici $(x, \sqrt{9-x^2})$ e $(x, -\sqrt{9-x^2})$, $-3 \leq x \leq 3$. Anche così la funzione f ristretta a ∂A si può vedere come funzione di una sola variabile

$$g(x) = f(x, \sqrt{9-x^2}) \quad , \quad h(x) = f(x, -\sqrt{9-x^2})$$

e quindi studiare il comportamento di f ristretta a ∂A con le tecniche usate per una variabile.

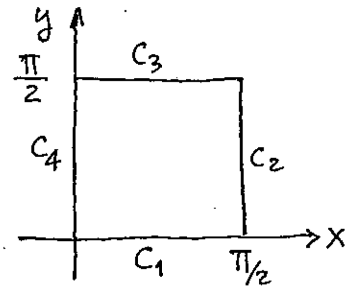
Vediamo ad esempio $g(x) = x\sqrt{9-x^2}$, $-3 \leq x \leq 3$.

$$g'(x) = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9}{2}, \quad g\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{9}{2}, \quad g(-3) = g(3) = 0, \text{ ecc. ecc.}$$

ESEMPIO 2 (massimo interno e minimo sul bordo)

$$f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y) \quad , \quad A = \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]$$



Studio all'interno di A

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \cos x + \cos(x+y) \\ f_y(x,y) = \cos y + \cos(x+y) \end{cases}$$

Quindi $\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{array}\right\} \iff \cos x = \cos y$.

e, poichè x e y variano tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, deve essere $x = y$. Quindi, dalla prima equazione si ricava $\cos x + \cos(2x) = 0$, cioè

$\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$, da cui $\cos x = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$.

Poichè x tale che $\cos x = -1$ è fuori dal dominio, resta $\cos x = \frac{1}{2}$, cioè $x = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. L'unico punto critico è pertanto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

L'hessiano è

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x+y) & -\operatorname{sen}(x+y) \\ -\operatorname{sen}(x+y) & -\operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(x+y) \end{pmatrix}.$$

$$Hf\left(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad , \quad \det H_f\left(\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} > 0.$$

Poichè $f_{xx}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0$, si ha quindi che $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ è punto di massimo relativo, $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Studio su $\partial A = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$

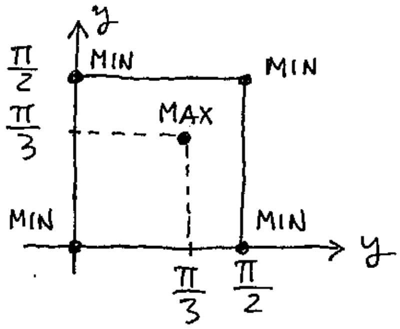
Su C_1 $\quad f(x,y) = f(x,0) = 2\operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, ha massimo in $x = \frac{\pi}{2}$ e minimo in $x = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 2$, $f(0,0) = 0$

Su C_2 $\quad f(x,y) = f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 1 + \operatorname{sen} y + \cos y$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, ha massimo in $y = \frac{\pi}{4}$ e minimo in $y = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 2$

Su C_3 $\quad f(x,y) = f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \operatorname{sen} x + \cos x$ (analogo a C_2)

Su C_4 $\quad f(x,y) = f(0,y) = 2 \operatorname{sen} y$ (analogo a C_1)

Riassumendo e confrontando i valori trovati si ottiene che il massimo assoluto di f è $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, raggiunto nel punto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, ed il minimo assoluto di f è 2 , raggiunto nei quattro vertici del quadrato.



INTEGRALI DOPPI

L'ultimo argomento che tratteremo è l'integrazione di funzioni di due variabili e più precisamente cercheremo di dare un senso alla scrittura

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \text{integrale doppio di } f \text{ su } D \,,$$

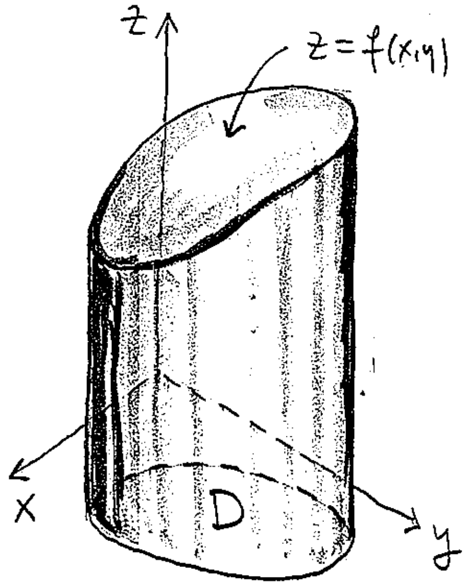
come naturale estensione dell' $\int_a^b f(x)\,dx$ in una variabile.

Ovviamente con due variabili l'insieme D su cui si integra può avere mille forme, ben diverso dalla situazione in una variabile, dove avevamo solo un intervallo $[a,b]$!!

In analogia con l'integrale per una funzione $f(x) \geq 0$, l'integrale doppio di una funzione limitata

$$z = f(x,y) \geq 0$$

su un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ può essere motivata dal problema della determinazione del volume della regione tridimensionale



$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \,,\ 0 \leq z \leq f(x,y) \right\}$$

Andiamo con ordine. Per continuare l'analogia con il caso unidimensionale, dove consideravamo partizioni dell'intervallo $[a,b]$, dobbiamo dare la definizione di partizione di un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$.

DEFINIZIONE: Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso, limitato e misurabile; chiamerò <u>partizione</u> $\mathcal{P}$ di D di norma $\leq \delta$, $\delta > 0$, una qualunque famiglia finita $D_1, D_2, \dots, D_n$ di insiemi misurabili tali che

$\mathcal{P}_1$) $\bigcup_{i=1}^{n} P_i = D$

$\mathcal{P}_2$) $D_i \cap D_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n$

$\mathcal{P}_3$) diametro $D_i \leq \delta \quad \forall i = 1, \dots, n \quad ,$

dove diametro $D_i \stackrel{\cdot}{=} \max \left\{ d(P, Q) : P, Q \in D_i \right\}$

Sempre per continuare l'analogia diamo la definizione di somma di Riemann:

DEFINIZIONE:

Siano $f, D, \mathcal{P}$ come sopra, sia P_i un punto qualsiasi dell'insieme D_i della partizione $\mathcal{P}$. Definiamo

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P}, \delta} = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \text{ area } D_i$$

Intuitivamente quando la partizione diventa più fitta, che corrisponde al tendere della sua norma a zero, le somme di questi volumi tendono al volume sotto il grafico di f. In generale si ha il seguente

TEOREMA: Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso, limitato e misurabile, sia $f: D \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste il

$$\lim_{\delta \to 0} R_{P,\delta}$$

e tale limite è indipendente dalle partizioni P e della scelta dei punti P_i. Tale limite viene detto <u>integrale su D della funzione</u> f e si scrive

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad \left(\text{ed anche brevemente } \int_D f\right)$$

Osserviamo che il limite precedente esiste anche se f cambia segno. In questo caso però l'integrale non corrisponderà semplicemente ad un volume, ma alla somma algebrica dei volumi sopra e sotto il piano x,y.

PROPRIETÀ: Siano $f,g: D \to \mathbb{R}$ continue, D chiuso, limitato e misurabile; allora

1) $\text{area } D = 0 \implies \int_D f\,dx\,dy = 0$

2) $\int_D 1\,dx\,dy = \text{area } D$

3) $\left.\begin{array}{l} D = A \cup B \\ \text{area}(A \cap B) = 0 \end{array}\right| \implies \int_D f = \int_A f + \int_B f$

4) $\int_D (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_D f + \mu \int_D g \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

5) $f \leq g$ su $D \Rightarrow \int_D f \leq \int_D g$

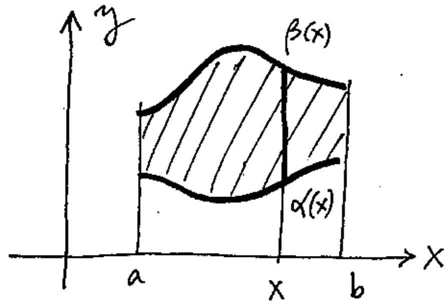
6) $\left| \int_D f \right| \leq \int_D |f|$

Cerchiamo ora metodi per calcolare integrali doppi. La via è essenzialmente quella di ricondursi al calcolo di integrali di funzioni di una variabile.
Gli strumenti fondamentali sono due:

i) il <u>teorema di FUBINI</u>, che permette di vedere un integrale di due variabili come due integrazioni successive di una variabile

ii) la <u>formula di cambio di variabili</u>, che permette di scrivere un integrale in modo più "trattabile" (sempre in vista del teorema di Fubini): l'analogo in una variabile dell'integrazione per sostituzione.

Il teorema di FUBINI



Consideriamo il caso in cui

(✱) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$,

con $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Per calcolare l'integrale

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy \ , \quad f \geq 0 \ ,$$

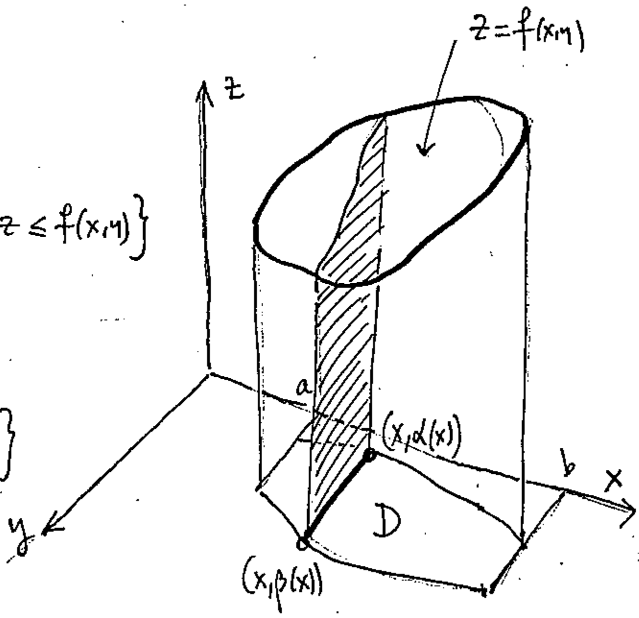
si può pensare al solido

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in D, \ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

scomposto in "fette"

$$E_x = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \ 0 \leq z \leq f(x,y)\}$$

$(x \in [a,b]$ fissato$)$



L'area della "fetta" E_x è data dall'integrale di una variabile

$$A(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \qquad (x \in [a,b] \text{ fissato}).$$

E' quindi del tutto naturale pensare che il volume di E si possa ottenere integrando i contributi delle singole fette, i.e.

$$\mathrm{vol}\, E = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx ,$$

cioè

$$\bullet \qquad \int_D f\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Naturalmente, se D è del tipo

$$(**) \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\},$$

$$\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R} \text{ continue},$$

si avrà analogamente

$$\bullet\bullet \qquad \int_D f\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

La validità di questi risultati è assicurata dal seguente

TEOREMA (FUBINI)
Sia $f : D \to \mathbb{R}$ continua; se D è descritto da (*) allora vale la formula •.
Analogamente, se D è descritto da (**), allora vale ••.

ESERCIZIO: Calcolare $I = \int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, dove

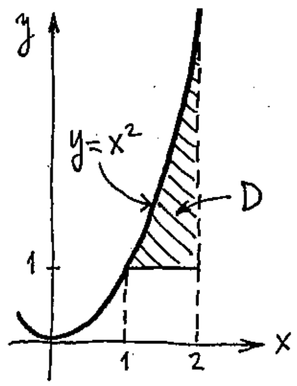
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le x^2\}$$

Risoluzione

$$I = \int_1^2 \left(\int_1^{x^2} (x^2+y^2)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=1}^{y=x^2} dx = \int_1^2 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx =$$

$$= \frac{1006}{105}$$



OSSERVAZIONE: E' possibile che il dominio di integrazione si possa descrivere sia nella forma (*) che (**). Ad esempio, il dominio D dell'esempio precedente può essere anche descritto come

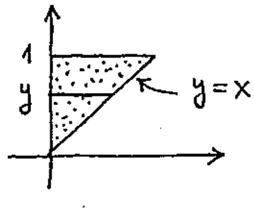
$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le y \le 4 \ , \ \sqrt{y} \le x \le 2 \} .$$

In questi casi non è sempre indifferente una o l'altra delle due descrizioni (che corrispondono ad ordini di integrazione diversi). Vediamo un esempio dove con una delle due descrizioni del dominio addirittura non si può fare il calcolo.

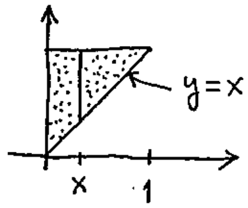
ESEMPIO: Calcolare $I = \int_D e^{y^2} dx dy$, dove D è il triangolo di vertici (0,0), (1,1), (0,1).

Il dominio di integrazione D si può descrivere in due modi:

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le x \le y \}$$



$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ \ x \le y \le 1 \}$$



Se applichiamo il teorema di Fubini con la prima descrizione, otteniamo

$$\int_D e^{y^2} dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 e^{y^2} \cdot y\, dy = \frac{1}{2} e^{y^2} \Big]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

Se invece utilizziamo la seconda descrizione di D, otteniamo

$$\int_D e^{y^2} dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} dy \right) dx \quad ,$$

ma $\int e^{y^2} dy$ non è esprimibile in termini elementari e quindi non possiamo portare a termine il calcolo.

CAMBIO di VARIABILI negli INTEGRALI MULTIPLI

Consideriamo l'integrale

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy$$

e sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una trasformazione definita da

$$\begin{cases} x = X(u,v) \\ y = Y(u,v) \end{cases} ,$$

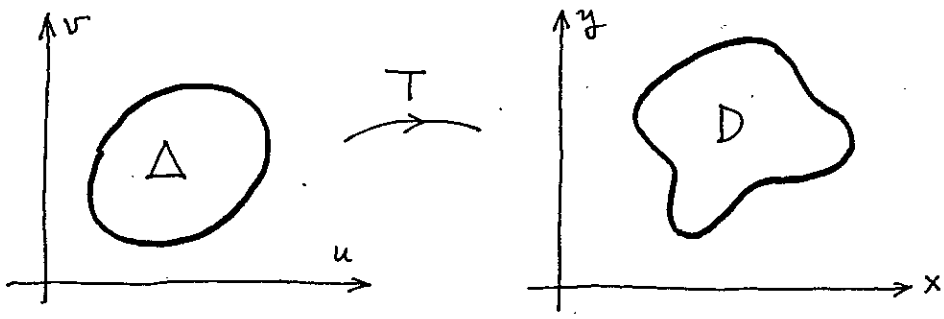
con X_u, X_v, Y_u, Y_v continue. Supponiamo che T trasformi in modo biunivoco una regione Δ del piano u,v nella regione D del piano x,y. Supponiamo inoltre che lo jacobiano

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{pmatrix}$$

abbia determinante

$$\det J = X_u Y_v - X_v Y_u$$

diverso da zero in ogni punto di Δ.



In queste condizioni vale la formula di cambio di variabili

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f\big(X(u,v), Y(u,v)\big)\left|\det \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv}$$

Nel caso (molto importante) di coordinate polari

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases},$$

abbiamo già calcolato la matrice jacobiana. Essa è

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\det J = r\left(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta\right) = r \;;$$

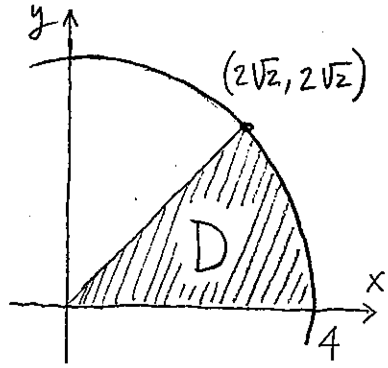
la formula di cambio di variabili diventa in questo caso

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f\big(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta\big)\, r\,dr\,d\theta}$$

Si capisce subito l'utilità di questa formula quando D è un disco (o un settore) centrato nell'origine: l'insieme Δ è un rettangolo!!

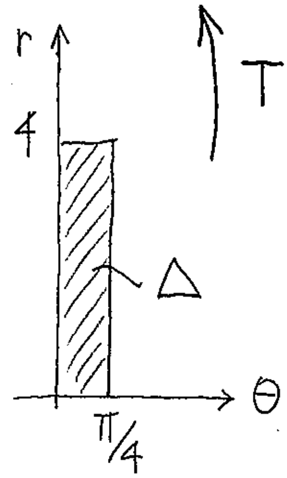
ESEMPIO

Calcolare $\int_D xy\,dx\,dy$, dove D è la regione in figura



Risoluzione

Passando a coordinate polari otteniamo



$$\int_D xy\,dx\,dy = \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^4 r\cos\theta\, r\,\mathrm{sen}\,\theta\, r\,dr\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \left(\int_0^4 r^3 dr\right) d\theta =$$

$$= 64\int_0^{\pi/4} \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = 64\,\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{2}\Big]_0^{\pi/4} = 16$$