NOTE INTEGRATIVE

(ovvero tutto quello che non c'e nelle note, ma che è doveroso sapere)

LIMITI

Definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M \in R \; \exists a \in R$ tale che $f(x) > M \; \forall x \in (a, +\infty)$

Oss. 1: $f : (a, b) \to \mathcal{R}$, $g : (a, b) \to \mathcal{R}$, $f(x) < g(x) \; \forall x \in (a, b)$, $x_0 \in (a, b)$.
Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$

Oss. 2: $f : (a, b) \to \mathcal{R}$, $x_0 \in (a, b)$. Sia $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.
Si ha $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$ (non vale il viceversa)

Oss. 3: $f : (a, b) \to \mathcal{R}$, $x_0 \in (a, b)$.
$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$

Proprietà (della permanenza del segno):
$f : (a, b) \to \mathcal{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f continua. Sia $f(x_0) > 0$.
Allora esiste un intorno I_{x_0} del punto x_0 tale che $f(x) > 0 \; \forall x \in I_{x_0}$

DERIVATE

Derivata della funzione inversa
Teorema: $f : (a, b) \to \mathcal{R}$, f continua ed invertibile. Se f è derivabile in $x_0 \in (a, b)$ ed inoltre $f'(x_0) \neq 0$, allora la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

o, equivalentemente

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Sotto le ipotesi del teorema precedente tale formula si ottiene direttamente dalla formula della derivata di una composta: basta derivare l'uguaglianza

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Infatti $1 = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ e quindi....

INTEGRAZIONE

Osservazione: un polinomio $x^2 + bx + c$, **che non ha radici reali**, si può sempre scrivere nella forma $(x - \alpha)^2 + \beta^2$, dove $\alpha \pm i\beta$ sono le sue due radici complesse. Si può così, con una semplice sostituzione, calcolare ogni integrale del tipo $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx$ (x^2+bx+c senza radici reali) riconducendolo all'integrale ben noto $\frac{1}{\beta}\cdot\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Integrali di quozienti di polinomi: è chiaro che, tramite la divisione di polinomi, ci si può ridurre a trattare il caso $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, con $gradP(x) < gradQ(x)$. Vediamo in dettaglio il caso $gradQ(x)$=2; ci sono tre possibilità:

- $Q(x)$ ha due radici reali a_1, a_2 distinte: in questo caso $Q(x)$ si può scrivere come

  $(x-a_1)(x-a_2)$ e $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si può scomporre nella forma $\frac{A}{x-a_1}+\frac{B}{x-a_2}$; la primitiva sarà quindi del tipo $A\log|x-a_1|+B\log|x-a_2|$

- $Q(x)$ ha due radici reali a_1, a_2 coincidenti: in questo caso $Q(x)$ si può srivere come $(x-a_1)^2$ e $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si può scomporre nella forma $\frac{C}{(x-a_1)}+\frac{D}{(x-a_1)^2}$; la primitiva sarà quindi del tipo $C\log|x-a_1|-\frac{D}{(x-a_1)}$

- $Q(x)$ non ha radici reali: in questo caso si può scrivere $Q(x)$ come somma di quadrati (osservazione fatta precedentemente) e gli integrali, a meno di costanti moltiplicative, si ridurranno alla forma $\displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$ oppure $\displaystyle\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt$, che valgono rispettivamente $\arctan t$ e $\log(1+t^2)$