Analisi Matematica per Informatica

PRIMO COMPITINO - 29 ottobre 2008 **A**

Esercizio 1

Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sin^2 x - 1}{x^2}$$

Esercizio 2

Trovare una primitiva della funzione

$$f(x) = (x+1)\ln x$$

Esercizio 3

Dire quante soluzioni ha l'equazione

$$x^6 = \lambda(x-5)$$

al variare di $\lambda \in R$

Esercizio 4

Enunciare il Teorema di Rolle

Esercizio 5

Sia $f : [a,b] \to R$. Dare la definizione di x_0, punto di massimo relativo in (a,b)

Correzione Compito A, 29/10/2008

Esercizio 1
Il limite è della forma $\frac{0}{0}$ e si può risolvere con la regola di De l'Hopital applicata 2 volte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin^2 x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-2\sin x\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x-2\cos^2 x+2\sin^2 x}{2}=-\frac{3}{2}$$

Esercizio 2

$$\int (x+1)\ln x\ dx=\int x\ln x\ dx+\int \ln x\ dx$$

I due integrali si possono eseguire per parti ottenendo:

$$\int x\ln x\ dx=\int (\frac{x^2}{2})'\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int x dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+c_1$$

$$\int \ln x\ dx=\int \ln x(x)'dx=x\ln x-\int\frac{1}{x}\cdot x\ dx=x\ln x-x+c_2$$

La primitiva quindi è

$$\int (x+1)\ln x\ dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+x\ln x-x+c.$$

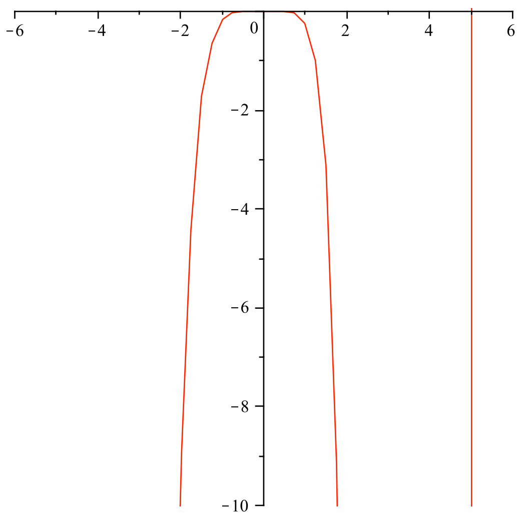
Esercizio 3
Lo studio dell'equazione al variare del parametro λ, può essere fatto confrontando il numero di intersezioni della generica retta $y=\lambda$ con il grafico della funzione $f(x)=\dfrac{x^6}{x-5}$. Per quanto riguarda lo studio di funzione si ha:

1. Dominio della funzione $D=\{x\in\mathbb{R}, x\neq 5\}$.
2. Intersezioni con gli assi. $(0,0)$.
3. Segno della funzione $f(x)>0$, per $x>5$ e $f(x)<0$ per $x<5$
4. Limiti agli estremi del dominio:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
e si dimostra che non esiste asintoto per $x\to+\infty$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$
e si dimostra che non esiste asintoto per $x\to-\infty$
$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=-\infty$$
In questi due ultimi casi si è tenuto conto del segno della funzione e del fatto che il denominatore della funzione diventa nullo per $x=5$ mentre il numeratore è positivo.
5. Massimi e minimi relativi: Si ha: $f'(x)=\dfrac{5x^6-30x^5}{(x-5)^2}$, $f'(x)=0$ per $x=0$ e $x=6$, dallo studio del segno della derivata si ha che la funzione è crescente per $x>6$ e $x<0$,e decrescente per $0<x<5$ e $5<x<6$, per cui $x=0$ e $x=6$ risultano rispettivamente punto di massimo relativo e punto di minimo relativo per la funzione. Inoltre $f(6)=6^6$

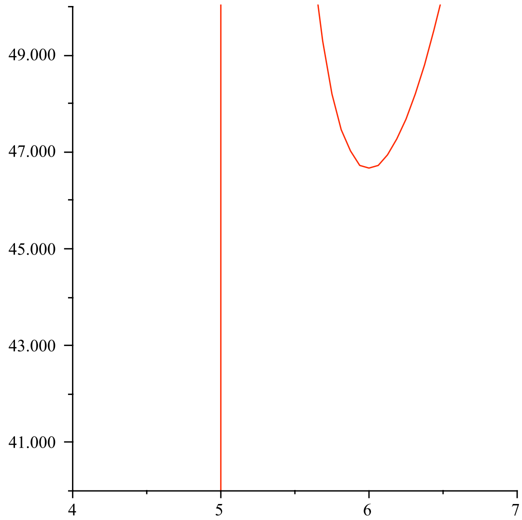
6. Concavità e convessità della funzione: $f''(x) = \dfrac{10x^4(2x^2 - 24x + 75)}{(x-5)^3}$, e $f''(x) = 0$ per $x = 0$; dallo studio del segno di $f''(x)$ si ricava che $f(x)$ volge la concavità verso il basso nell'intervallo $(-\infty, 5)$ e verso l'alto in $(5, +\infty)$.

Nota: Lo studio della derivata seconda ai fini della ricerca delle soluzioni dell'equazione non è necessario.

Il grafico della funzione per $x < 5$ è



Il grafico della funzione per $x > 5$ è



Dal grafico della funzione studiata si deduce che l'equazione $x^6 = \lambda(x-5)$ ha

- 2 soluzioni se $\lambda > 6^6$
- nessuna soluzione se $0 < \lambda < 6^6$
- 1 soluzione se $\lambda = 0$ o $\lambda = 6^6$
- 2 soluzioni se $\lambda < 0$.