Analisi Matematica per Informatica

10 febbraio 2009

Esercizio 1

Studiare la funzione $f : R^2 \to R$

$$f(x,y) = 2y^2 - x(x-1)^2$$

ristretta al rettangolo $[0,2] \times [-1,1]$

Esercizio 2

Trovare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+3} \, (x-1)^n$$

Esercizio 3

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \tan x - 1}{x^2 + \sin^2 x}$$

Esercizio 4

Calcolare

$$\int_D xy \; dxdy$$

dove D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

Esercizio 5

Enunciare una condizione necessaria per la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Esercizio 6

Sia $F(x,y)$ una funzione derivabile in un intorno del punto (x_0, y_0), con derivate continue in tale intorno. Sia $F(x_0,y_0) = 0$, $F_y(x_0,y_0) \neq 0$. Sia $\varphi(x)$ la funzione derivabile verificante $F(x,\varphi(x)) = 0$ in un intorno di (x_0,y_0). Dimostrare che

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x,\varphi(x))}{F_y(x,\varphi(x))}$$

Correzione Compito Febbraio

Esercizio 1

La funzione è ovviamente continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}^2$, il rettangolo $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq x \leq 1\}$ è chiuso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ha massimo e minimo assoluto sul rettangolo. Il massimo e il minimo assolti di f si calcolano seguendo i seguenti passi:

1. Si calcolano i valori di f nei punti critici di f in D.
2. Si calcolano i valori estremi di f sul bordo di D, studiando la funzione sui vari segmenti che compongono il bordo come funzione di una variabile.
3. Si calcolano i valori di f nei punti in cui f non è parzialmente derivabile. (*In questo caso particolare non esistono*)
4. Il maggiore dei valori ottenuti con i passi 1, 2 e 3 è il valore di massimo assoluto e il valore minore tra questi valori è il minimo assoluto.

Le derivate parziali della funzione f sono:

$$f_x = -3x^2 + 4x - 1, \qquad f_y = 4y$$

I punti critici della funzione, cioè i punti che si ottengono risolvendo il sistema ottenuto ponendo uguali a zero le derivate prime sono: $(1, 0)$, $(\frac{1}{3}, 0)$; inoltre $f(1, 0) = 0$ e $f(\frac{1}{3}, 0) = -\frac{4}{27}$.

Per quanto riguarda lo studio della funzione sul bordo dell'insieme D, a titolo di esempio studiamo la funzione sul segmento $y = 1$ con $0 \leq x \leq 2$. Qui la funzione diventa

$$F(x) = f(x, 1) = 2 - x^3 + 2x^2 - x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Quindi

$$F'(x) = -3x^2 + 4x - 1$$

i cui punti critici sono $x = 1$, $x = \frac{1}{3}$, poichè $F(1) = f(1, 1) = 2, F(\frac{1}{3}) = f((\frac{1}{3}, 1)) = \frac{50}{27}$, $F(2) = f(2, 1) = 0$ e $F(0) = f(0, 1) = 2$, il massimo sul segmento è 2 ed è assunto nei punti $(1, 1)$ e $(0, 1)$, il minimo è 0 ed è assunto nel punto $(2, 1)$.

Dal confronto dei valori della f, come ricordato all'inizio si ottiene che

$$min(f) = f(2, 0) = -2$$

e

$$max(f) = f(0, 1) = f(0, -1) = f(1, 1) = f(1, -1) = 2.$$

Esercizio 2

La serie di potenze è centrata nel punto $x = 1$, quindi per $x = 1$ la serie è convergente. Usando il criterio del rapporto, se $a_n = \dfrac{2^n}{n^2 + 3}|x - 1|^n$ si ha, dopo aver eseguito le semplificazioni opportune:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n^2 + 3)}{(n + 1)^2 + 3}|x - 1| = 2|x - 1|.$$

Quindi, sicuramente, per il criterio del rapporto si ha convergenza nell'intervallo $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, in $x = \frac{3}{2}$ la serie diventa: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 3}$, che risulta quindi convergente dato che, $\dfrac{1}{n^2 + 3} \leq \dfrac{1}{n^2}$ e la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente. In modo del tutto analogo si dimostra che la serie è assolutamente convergente in $x = \frac{1}{2}$.

Esercizio 3

Il limite è della forma $\frac{0}{0}$ e si può calcolare con la formula di Taylor o con successive applicazioni della regola di De l'Hopital. Il risultato è $\frac{1}{4}$.

Esercizio 4

Il triangolo si può vedere come l'insieme $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$, quindi usando la formula di riduzione per gli integrali doppi l'integrale diventa

$$\int_D xy\ dxdy = \int_0^1 xdx \big(\int_x^1 y\ dy \big)$$

Perciò l'integrale diventa

$$\int_D xy\ dxdy = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1 - x^2)\ dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^3)dx = \frac{1}{8}.$$