Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2008/09**

Analisi Matematica per Informatica

COMPITO COMPLETO - 20 gennaio 2009

Esercizio 1

Studiare in dettaglio la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x}{(5 - \sqrt{3x})^2}$$

Esercizio 2

Trovare l'ntervallo di convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=6}^{+\infty} \frac{n-1}{ne^n}(x-1)^n$$

.

Esercizio 3

Sia D il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Calcolare

$$I = \int_D (2x^2 + 1)\ dxdy$$

Esercizio 4

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2y(x)(1+x^2)y'(x) = -x \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 5

Enunciare il Teorema del valor medio integrale

Esercizio 6

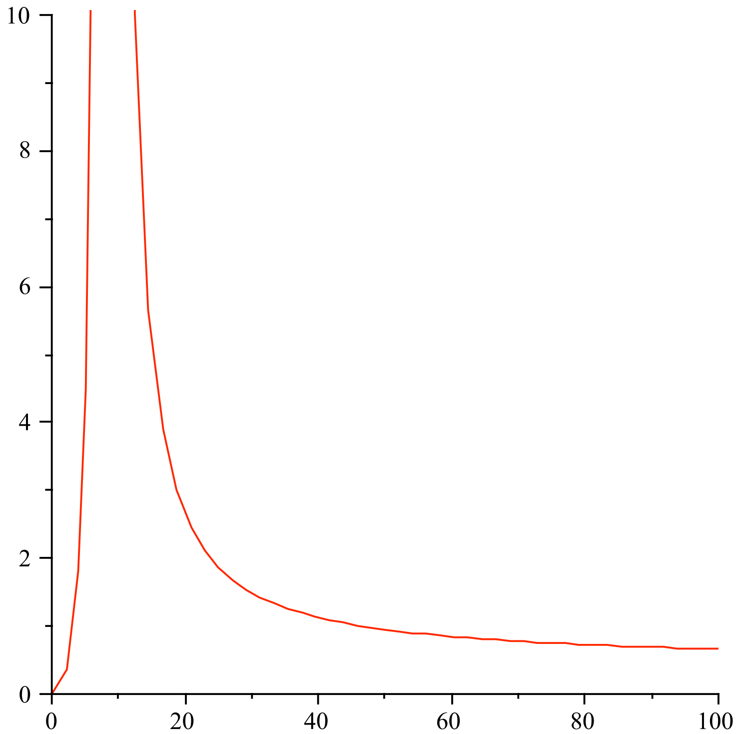
Dimostrare che la differenziabilità di una funzione $f : R^2 \to R$ nel punto (x_0, y_0) implica la continuità nel punto

Correzione Compito A

Esercizio 1

- Il dominio della funzione è $D = \{x : x > 0, x \neq \frac{25}{3}\}$, l'unica intersezione con gli assi è l'origine, inoltre $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in D$.
- I limiti della funzione agli estremi del dominio sono:
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{3x + 25 - 10\sqrt{3x}} = \frac{1}{3}$$
$$\lim_{x \to \frac{25}{3}} f(x) = +\infty$$
Esistono quindi un asintoto verticale $x = \frac{25}{3}$ e un asintoto orizzontale $y = \frac{1}{3}$.
- $$f'(x) = \frac{5}{(x - \sqrt{3x})^3}, \quad x \in D$$
Quindi $f'(x) > 0$ (e la funzione è crescente), per $x < \frac{25}{3}$, mentre $f'(x) < 0$ (e la funzione è decrescente), per $x > \frac{25}{3}$.
- $$f''(x) = \frac{15\sqrt{3x}}{2\sqrt{x}(5 - \sqrt{3x})^4}, \quad x \in D$$
Dallo studio della derivata seconda si deduce che la funzione convessa per $x \in D$.

Il grafico della funzione è:



Esercizio 2

Usando il criterio del rapporto, se $a_n = \frac{n-1}{ne^n}|x-1|^n$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)e^n}|x-1|^{n+1} \frac{ne^n}{(n-1)|x-1|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n^2-1)e}|x-1| = \frac{|x-1|}{e}$$

Quindi, sicuramente si ha convergenza nell'intervallo $(1-e, 1+e)$, in $x = 1+e$ la serie diventa: $\sum_{n=6}^{+\infty} \frac{n-1}{n}$, che risulta quindi divergente, dato che $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$ (si ricordi la condizione necessaria per la convergenza di una serie), in modo del tutto analogo si dimostra che la serie non converge per $x = 1-e$ (in questo punto non si può dire altro dato che la serie non è positiva).
Nota: Si osservi che il fatto che la serie parte da $n = 6$ non comporta nessun cambiamento nello studio della stessa.

Esercizio 3

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili, separando le variabili e integrando si ottiene:

$$\int 2y\ dy = \int \frac{-x}{x^2+1}\ dx + c$$

L'integrale di destra si svolge osservando che $\frac{-x}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}$, per cui si ottiene

$$y^2 = -\frac{1}{2}\log(1+x^2) + c$$

cioè

$$y^2 = \log\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c = c - \log\sqrt{1+x^2}$$

La soluzione del problema di Cauchy proposto è quindi

$$y = (1 - \log\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{2}}.$$

Esercizio 4

Il triangolo si può vedere come l'insieme $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$, quindi usando la formula di riduzione per gli integrali doppi l'integrale diventa

$$\int_D (2x^2+1)\ dxdy = \int_0^1 dx \big(\int_x^1 (2x^2+1)\ dy \big)$$

Perciò l'integrale diventa

$$\int_D (2x^2+1)\ dxdy = \int_0^1 (2x^2+1)(1-x)\ dx = \int_0^1 2x^2 + 1 - 2x^3 - x)dx = \frac{2}{3}.$$