Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2008/09**

Foglio di esercizi 10

Equazioni differenziali a variabili separabili e lineari del primo ordine.

Esercizio 1
Mostrare che $y(x) = x - x^{-1}$ è soluzione dell'equazione differenziale $xy' + y = 2x$.

Esercizio 2
Mostrare che $y(x) = \sin x \cos x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y' + (\tan x)y = \cos^2 x$, con la condizione $y(0) = 0$ per $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 3
Mostrare che, per ogni $c \in \mathbb{R}$, $y(x) = ce^{\frac{x^2}{2}}$ è soluzione dell'equazione differenziale $y' = xy$.

(a) Trovare una soluzione che soddisfa alla condizione $y(0) = 5$.

(b) Trovare una soluzione che soddisfa alla condizione $y(1) = 2$.

Esercizio 4
Risolvere le seguenti equazioni a variabili separabili trovando (quando è possibile in forma esplicita) eventualmente anche le soluzioni che soddisfano la condizione scritta a fianco di esse.

(1) $$y' = -2xy$$

(2) $$y' = 1 + y^2 \quad y(1) = 0$$

(3) $$y' = \frac{y+1}{x-1}$$

(4) $$y' = \frac{e^{2x}}{4y^3}$$

(5) $$y' = \frac{y}{x}$$

(6) $$y' = \frac{xe^x}{y\sqrt{1+y^2}}$$

(7) $$y' = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{y} \quad y(1) = 2$$

(8) $$y' = 2x\sqrt{1-y^2} \quad y(0) = 0$$

(9) $$y' + \cos x = 0 \quad y(0) = 1$$

(10) $$y' = \frac{y\cos x}{1+y^2} \quad y(0) = 1$$

Alcune soluzioni e risposte.

1. $R: \; y(x) = ke^{-x^2}$

2. Scrivendo l'equazione in forma differenziale e integrando otteniamo:

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx, \qquad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx$$

da cui $\arctan y = x + c$ e imponendo la condizione iniziale $\arctan 0 = 1 + c$,cioè $0 = 1 + c$ e $c = -1$. La soluzione esplicita è $y(x) = \tan(x-1)$.

3. Scrivendo l'equazione in forma differenziale e integrando otteniamo:

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1}$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x-1}$$

$\log|y+1| + c_1 = \log|x-1| + c_2$ o, se $c = c_2 - c_1$, $\log|y+1| = \log|x-1| + c$: Prendendo gli esponenziali dei due membri otteniamo: $|y+1| = |x-1| \cdot e^c$ e se $e^c = h$, $|y+1| = h|x-1|$, infine conglobando anche il segno nella costante, la soluzione assume la seguente forma esplicita

$$y(x) = 1 + k(x-1).$$

4. R: $y(x) = \left(\frac{e^{2x}}{2} + c\right)^{\frac{1}{4}}$.

5. R: $y(x) = kx$.

6. R: $(1+y^2)^{\frac{3}{2}} = 3(xe^x - e^x + c) \Longrightarrow y(x) = \pm\sqrt{3^{2/3}\,(xe^x - e^x + c) - 1}$.

7. Procedendo come nell'esercizio 1.3, scrivendo l'equazione in forma differenziale e integrando otteniamo: $ydy = x\sqrt{x^2+1}dx$, $\int ydy = \int x\sqrt{x^2+1}dx$ e risolvendo i due integrali: $\frac{y^2}{2} = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + k$, estraendo la radice dei due membri ed osservando che la soluzione cercata vicino ad 1 deve essere positiva, si sceglie la radice positiva e si ottiene: $y = \sqrt{\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c}$, imponendo la condizione iniziale si ottiene $2 = \sqrt{\frac{2^{\frac{5}{2}}}{3} + c}$, da cui $c = 4 - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

8. Scrivendo l'equazione in forma differenziale e integrando otteniamo:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2xdx \Longrightarrow \arcsin(y) = x^2 + c$$

Imponendo la condizione iniziale si ottiene $0 = c$ per cui la soluzione finale è $y(x) = \sin(x^2)$.

9. $R: \; y(x) = -\sin x + 1$.

10. $R: \; \log y(x) + \frac{(y(x))^2}{2} = \sin x + \frac{1}{2}$.

Esercizio 5
Risolvere le seguenti equazioni lineari del primo ordine, trovando (quando è possibile in forma esplicita) eventualmente anche le soluzioni che soddisfano la condizione scritta a fianco di esse:

1. $y' + y \sin x = (1 + \cos x)\sin x$

2. $y' + \frac{y}{2e^x - 1} = x^2$

3. $y' - y\dfrac{\cos x}{1+\sin x} = \cos x,\ y(0) = 0$

4. $y' + y\cos x = \sin(2x)$

5. $2y' - \dfrac{y}{\sqrt{x}} = x$

6. $y' + \dfrac{2y}{x} = e^x + 1$

Alcune soluzioni e risposte.

1. $e^{\int \sin x\ dx} = e^{-\cos x}$, quindi l'equazione moltiplicata per il fattore trovato diventa $(e^{-\cos x}y)' = e^{-\cos x}(1+\cos x)\sin x$. Integrando i due membri dell'equazione si ottiene $e^{-\cos x}y = \int e^{-\cos x}(\cos x \sin x + \sin x)\ dx + c$, quest'ultimo integrale si risolve con la sostituzione $-\cos x = t$. La soluzione finale dell'equazione è quindi $y = ce^{\cos x} + 2 + \cos x$.

2. $y = \dfrac{1}{2e^x - 1}\{(c + \dfrac{2}{3}x^3)e^x + x^2 + 2x + 2\}$

3. $y = (1+\sin x)\log(1+\sin x)$

4. $y = ce^{-\sin x} + 2(\sin x - 1)$

5. $y = ce^{\sqrt{x}} - (x\sqrt{x} + 3x + 6\sqrt{x} + 6)$

6. $y = \dfrac{1}{x^2}[c + \dfrac{x^3}{3} + (x^2 - 2x + 2)e^x]$

Esercizio 6
Trovare l'equazione della curva che passa per $(1,1)$ e con pendenza in (x,y) uguale a $\frac{y^2}{x^2}$

Soluzione. Si tratta di risolvere il Problema di Cauchy $y' = \dfrac{y^2}{x^2},\ y(1) = 1$, la cui soluzione è $y = x$.