Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2008/09**

Foglio di esercizi 11

Equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti, metodo di Eulero e risoluzione per serie di equazioni differenziali.

Esercizio 1
Quali delle seguenti funzioni

$$e^x, \quad e^{-x}, \quad xe^{-x}, \quad x^2e^{-x}$$

sono soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = 0$?

Esercizio 2

(a) Per quali valori di k non nullo $y = \sin kt$ soddisfa l'equazione differenziale

$$y'' + 9y = 0 \ ?$$

(b) Per questi valori di k verificare che ogni elemento della famiglia di funzioni $y = A\sin kt + B\cos kt$ è soluzione dell'equazione data.

Esercizio 3
Per quali valori di r non nullo $y = e^{rt}$ soddisfa l'equazione differenziale

$$y'' + y - 6y' = 0 \ ?$$

Esercizio 4
Risolvere le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti, trovando anche eventualmente la soluzione che verifica le condizioni iniziali imposte:

1. $y'' + 2y' = 0,$
2. $y'' - 2y' + 2y = 0,$
3. $y'' - 4y = -2\cos x,\ y(0) = \frac{7}{5},\ y'(0) = 0$
4. $y'' + 2y' + y = 0$
5. $y'' - 2y' - \frac{5}{4}y = 0$
6. $y'' + 2y' + 3y = 3x^2 + 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
7. $y'' - y' = x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
8. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$

Soluzioni

1. L'equazione caratteristica della prima equazione è $a^2 + 2a = 0$, le cui soluzioni sono: $a = 0$ e $a = 2$. e^{0x} e e^{-2x} sono quindi soluzioni dell'equazione differenziale e la soluzione generale della stessa, in accordo a quanto visto a lezione è $y(x) = c_1e^{0x} + c_2e^{-2x} = c_1 + c_2e^{-2x}$.
2. $y(x) = c_1e^x\cos(x) + c_2e^x\sin(x)$
3. $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{2}{5}\cos x$
4. $y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$
5. $y(x) = c_1e^{-\frac{x}{2}} + c_2e^{\frac{5}{2}x}$

6. Soluzione generale: $y(x) = c_1 e^{-x} \cos(\sqrt{2}x) + c_2 e^{-x} \sin(\sqrt{2}x) + x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{9}$. *(Nota: rimangono da imporre le condizioni iniziali)*

7. $y(x) = e^x - x - \frac{1}{2}x^2$ *(Nota: si faccia attenzione a scegliere la soluzione particolare tenendo conto del fatto che 0 è soluzione dell'equazione caratteristica.)*

8. Soluzione generale omogenea: $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$, per la soluzione particolare della non omogenea si osservi che $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$, quindi la soluzione particolare è della forma $y_p = \frac{1}{2} + A\cos(2x) + B\sin(2x)$.

Esercizio 5

Risolvere, se é possibile, il seguente problema:

$$y'' - y = 0,\ y(0) = a,\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = b$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6

Approssimare con il metodo di Eulero di passo 1 la soluzione del problema

$$y' = \frac{x}{x^2 + y},\ y(0) = 1$$

fino al punto $x = -6$.

Esercizio 7

Calcolare i primi 6 termini della serie di potenze che è soluzione del problema

$$y'' - xy' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$