Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2008/09**

Foglio di esercizi 12

Funzioni di 2 variabili: derivate parziali e direzionali, piano tangente, integrali doppi.

Esercizio 1
Determinare e disegnare il dominio delle funzioni seguenti:

$$g(x,y)=\sqrt{1+y-x^2}$$

.

$$h(x,y)=\ln\left(25-2y^2-x^2\right)$$

Soluzioni e risposte

- $D=\{(x,y): y\geq x^2-1\}$.
- $D=\{(x,y): x^2+2y^2\leq 25\}$, che è l'ellisse con centro l'origine e semiassi 5 e $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 2
Determinare il dominio e cercare di capire come è fatto il grafico delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,
2. $f(x,y)=x+y+3$,

Esercizio 3
Calcolare le derivate parziali prime delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y)=\dfrac{xy^2-y}{x^2+y}$,

(b) $f(x,y)=\ln(8x)+\sqrt{x^2+y^2}$,

(c) $f(x,y)=\sin(x-y^2\sqrt{x})+\cos(x-y^3)$

(d) $f(x,y)=\arctan(x^2y)-\sqrt{x+y}$

(e) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+xy}$,

(f) $f(x,y)=\ln x+\sqrt{x^2+y}$,

(g) $f(x,y)=\arctan(x-y)+\cos(xy)-\sqrt{x^2y^3+yx}$

(h) $f(x,y)=e^{3y}x$

(i) $f(x,y)=e^{\sin\frac{x}{y}}$

Esercizio 4

(a) Data $f(x,y)=16-x^2-4y^2$, calcolare $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$ ed interpretare questi numeri come pendenze.

(b) Data $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-4y^2}$, calcolare $f_x(1,0)$ e $f_y(1,0)$ ed interpretare questi numeri come pendenze.

Esercizio 5
Verificare la tesi del Teorema di Schwarz vale a dire $u_{xy} = u_{yx}$ per le seguenti funzioni:

$$u = x^2 y + e^y, \qquad u = \ln x^3 + 5y^2$$

Esercizio 6
Verificare se ciascuna delle seguenti funzioni verifica l'equazione di Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$:

(a) $u(x, y) = x^2 + y^2$,

(b) $u(x, y) = x^2 - y^2$,

(c) $u(x, y) = x^2 + 3xy^2$.

(d) $u(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$,

(e) $u(x, y) = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$.

Esercizio 7
Dare un esempio di funzione $f(x, y)$ le cui derivate parziali sono: $f_x = x + 4y$ e $f_y = 3x + y$ e le cui derivate seconde sono continue o spiegare perchè non esiste una tale funzione.
Soluzione Poichè la funzione ha derivate prime e seconde continue in ogni punto del piano, essa soddisfa le ipotesi del Teorema di Schwarz in ogni punto del piano, cioè $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$, nel caso considerato $f_{xy} = 4$ e $f_{yx} = 3$, quindi non può esistere una tale funzione.

Esercizio 8
Determinare l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni seguenti nel punto indicato a fianco di ciascuna di esse:

$$f(x.y) = x^3 + x^2 y + 3y^2 \quad (1, 1) \tag{1}$$

$$f(x.y) = \sqrt{x^2 - y} \quad (2, 1) \tag{2}$$

$$f(x.y) = \log(x + \sqrt{y}) \quad (1, 1) \tag{3}$$

Per le funzioni precedenti calcolare le derivate direzionali negli stessi punti precedenti lungo la direzione rispettivamente dei vettori $(1, -1)$, $(-3, 4)$, $(2, 2)$.

Esercizio 9
Calcolare l'integrale delle funzioni seguenti sull'insieme scritto a fianco di ciascuna di esse:

1. $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + 2y$, $D =$ rettangolo di vertici $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ [*Sol.:* 7/3]
2. $f(x, y) = x^3 y^2$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x\}$[*Sol.:* 256/21]
3. $f(x, y) = y^2$, $D =$ triangolo di vertici $(0, 2)$, $(3, 2)$, $(1, 1)$
4. $f(x, y) = x + y$, D=regione limitata dalle curve $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ [*Sol.:* 3/10]
5. $f(x, y) = x^2 - y, D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x\}$
6. $f(x, y) = xy$, $D =$ triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$[*Sol.:* 1/8]
7. $f(x, y) = \frac{2y}{x^2+1}$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ [*Sol.:* log(2)/2]
8. $f(x, y) = e^{y^2}$, D=regione limitata dalle curve $y = x$, $y = 1$ e $x = 0$,[*Nota:* $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$]