Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2008/09**

Foglio di esercizi 13

Calcolo di integrali doppi, massimi e minimi di funzioni di due variabili.

Esercizio 1
Calcolare l'integrale delle funzioni seguenti sull'insieme scritto a fianco di ciascuna di esse:

1. $f(x,y) = \frac{x}{y^2+1}$, $D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}$ [*Sol.:* $1/2 - \pi/8$]
2. $f(x,y) = x^2(y+3)$, $D =$ quadrato di vertici $(1,3)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(2,3)$
3. $f(x,y) = x(y+x)$, $D =$ quadrato di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(0,0)$ [*Sol.:* $\frac{7}{12}$]
4. $f(x,y) = y^2 + \sqrt{x}$, $D = \{(x,y) : 0 \le y \le 2, 1 \le x \le 2\}$
5. $f(x,y) = x$, $D =$ cerchio con centro l'origine e raggio uguale ad 1 [*Sol.:* 0]
6. $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2}$, D=regione limitata dalle curve $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$ contenuta nel primo quadrante [*Nota:* $D = \{(x,y) : 1 \le x \le 2, \frac{1}{x} \le y \le x\}$]
7. $f(x,y) = x^2, D =$ cerchio con centro l'origine e raggio uguale ad 1 [*Sol.:* $\pi/4$]
8. $f(x,y) = x + y^3$, $D =$ regione limitata da $y^2 = x$, $y = 0$, $x = 1$
9. $f(x,y) = xy$, D=regione limitata da $x^2 + y^2 = 1$ e dalla retta $x + y = 1$ contenuta nel primo quadrante. [*Nota:* $D = \{(x,y) : 1 \le x + y, x^2 + y^2 \le 1\}$] [*Sol.:* $1/12$]
10. $f(x,y) = \dfrac{y^2}{1 + x^2 + y^2}$, $D =$ cerchio con centro l'origine e raggio uguale ad 1 [*Sol.:* $\pi/2(1 - \log 2)$]
11. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$, $D =$ cerchio con centro l'origine e raggio uguale ad 1 [*Sol.:* 0]
12. $f(x,y) = x^2$, D =settore di cerchio con centro l'origine e raggio uguale ad 1 delimitato dalle semirette di equazione $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$, $x \ge 0$ [*Sol.:* $\pi/24 + \sqrt{3}/32$]
13. $f(x,y) = \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}$, $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1, |y| \le |x|\}$ [*Sol.:* $\pi/4$]
14. $f(x,y) = x - y$, $D =$ quadrilatero di vertici $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$
15. $f(x,y) = \cos(2x + y)$, $D =$ triangolo di vertici $(\pi,0)$, $(0,\pi)$, $(0,-\pi)$ [*Sol.:* $-\frac{4}{3}$]
16. $f(x,y) = x^2 + y$, D =ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi 2 e 3. [*Si ricordi l'equazione dell'ellisse considerata* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ *e si usi il cambiamento di variabili* $x = 2\rho\cos\theta$, $y = 3\rho\sin\theta$ *con* $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$.]

Esercizio 2
Si consideri la seguente funzione

$$f(x,y) = -x^3 + x^2 + y^2 - xy^2 + 4x - 4$$

1. Calcolare i punti stazionari di f e classificarli con l'uso della matrice hessiana.
2. Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1,1)$ nella direzione del vettore $(1,-1)$.

Esercizio 3
Determinare il massimo e il minimo assoluti di $f(x,y)$ sul dominio D seguendo i seguenti passi:

1. Si calcolano i valori di f nei punti critici di f in D.
2. Si calcolano i valori estremi di f sul bordo di D.
3. Si calcolano i valori di f nei punti in cui f non è parzialmente derivabile.
4. Il maggiore dei valori ottenuti con i passi 1, 2 e 3 è il valore di massimo assoluto e il valore minore tra questi valori è il minimo assoluto.

a)	$f(x,y) = 1 + 4x - 5y$	D è la regione triangolare chiusa di vertici $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,3)$
b)	$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$	D è il quadrato chiuso di vertici $(-1-1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$e $(1,-1)$
c)	$f(x,y) = 1 + xy - x - y$	D è la regione chiusa limitata dalla parabola $y = x^2$ e dalla retta $y = 4$
d)	$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$	$D = \{(x,y) : -2 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}$
e)	$f(x,y) = x^2 + 3y^2 - xy - y$	D è il quadrato chiuso con vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.
f)	$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$	D è il cerchio chiuso di raggio 1 con centro in $(0,0)$
g)	$f(x,y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$	$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 5\})$
h)	$f(x,y) = xy^2$	$D = \{(x,y) : 0 \le x, 0 \le y, x^2 + y^2 \le 3\}$
k)	$f(x,y) = e^{x^2+y^2+y}$	D è il rettangolo chiuso di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$

Soluzione di b).

- Le derivate parziali di f sono: $f_x = 2x(1+y)$, $f_y = 2y + x^2$. I punti critici di f sono $(0,0)$, $(-\sqrt{2},-1)$, $((-\sqrt{2},1)$ di cui solo il primo è interno e in cui $f = 4$.
- Il bordo del quadrato è costituito da 4 segmenti, restringendo la funzione ad uno di essi si ottiene una funzione di 1 variabile definita su un intervallo chiuso. Per esempio il lato superiore è $\{(x,y) : y = 1, -1 \le x \le 1\}$ e la funzione ristretta ad esso è $f(x,1) = 2x^2 + 5$, che si studia come funzione di una variabile sull'intervallo chiuso $[-1,1]$; il suo massimo è $f(1,1) = f(-1,1) = 7$, mentre il suo minimo è $f(0,1) = 5$. Ripetendo il ragionamento sugli altri lati si ottiene che il minimo sul bordo è $f(1,-\frac{1}{2}) = f(-1,-\frac{1}{2}) = 5 - \frac{1}{4}$ e il massimo è $f(-1,1) = f(1,1) = 7$.

Dai due passi precedenti si conclude che il massimo di f sul triangolo è $f(-1,1) = f(1,1) = 7$ e il minimo è $f(0,0)$.

Altre soluzioni. d) min = -26 in $(-2,-1)$ e $(2,-1)$; max = 2 in $(0,0)$. f) min = 0 in $(0,0)$; max = 3/2 in $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. h) min = 0 in $(x,0)$ o $(0,y)$; max = 2 in $(1,\sqrt{2})$]