Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2008/09**

Foglio di esercizi 2

Trigonometria.

Esercizio 1
Calcolare con i teoremi di geometria elementare noti $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\tan\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{5}{6}\pi$, $\sin\frac{5}{6}\pi$, $\tan\frac{5}{6}\pi$,$\cos\frac{7}{4}\pi$, $\sin\frac{7}{4}\pi$, $\tan\frac{7}{4}\pi$.

Esercizio 2
Dedurre dalla formula di sottrazione del coseno la formula di addizione del coseno

Esercizio 3
Usare le formule di addizione per il coseno e le identità

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha, \quad \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$$

per provare le formule di addizione del seno.

Esercizio 4
Ricavare le formule di duplicazione del seno e del coseno dalle formule di addizione.

Esercizio 5
Un addetto ad un porto deve determinare la distanza dalla banchina di una nave alla fonda nel porto. Indicata la sua posizione con A, quella di un altro punto sulla banchina con B e quella della nave con C, egli riesce a rilevare $C\hat{A}B = 60^0$, $C\hat{B}A = 70^0$ e $AB = 100m$. A quale distanza dal porto si trova la nave?

Esercizio 6
Una forza di 20 N forma con la direzione orizzontale un angolo di 25^0. Essa viene scomposta in due direzioni, una orizzontale e l'altra formante un angolo di 35^0 con la forza stessa. Calcolare l'intensità delle due componenti.

Esercizio 7
Calcolare il valore esatto delle funzioni goniometriche dell'angolo di ampiezza 15^0.

Esercizio 8
Calcolare il valore dell'espressione

$$\cos(\pi-x)+\sin(\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}-x)$$

Esercizio 9
In un triangolo isoscele ABC, gli angoli alla base β sono tali che $\sin\beta=\frac{4}{5}$. Calcolare le funzioni goniometriche dell'angolo al vertice α.

Esercizio 10
In un triangolo acutangolo ABC, gli angoli adiacenti alla base AB α e β sono tali che $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ e $\cos\beta=\frac{2}{3}$. Calcolare le misure dei suoi lati sapendo che $AB = 25$ cm.

Riepilogo sulla risoluzione di alcune equazioni trigonometriche.

1. $\sin x = c$, se $c > 1$ o $c < -1$, l'equazione non ha nessuna soluzione, se $-1 \le c \le 1$, sia α l'angolo appartenente all'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ o appartenente all'intervallo $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ (notare che un tale angolo esiste sempre) tale che $\sin\alpha = c$, allora le soluzioni dell'equazione di partenza sono $x = \alpha + 2k\pi$ e $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, con k intero.

2. $\cos x = c$, se $c > 1$ o $c < -1$, l'equazione non ha nessuna soluzione, se $-1 \leq c \leq 1$. sia α l'angolo appartenente all'intervallo $[0, \pi]$ tale che $\cos\alpha = c$, allora essendo cos una funzione pari, le soluzioni dell'equazione di partenza sono $x = \alpha + 2k\pi$ e $x = -\alpha + 2k\pi$ con k intero.

3. $\tan x = c$, con c numero reale qualsiasi, sia α l'angolo appartenente all'intervallo $[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$ tale che $\tan\alpha = c$, allora essendo tan una funzione di periodo π, le soluzioni dell'equazione di partenza sono $x = \alpha + k\pi$ con k intero.

Esercizio 11
Risolvere nell'intervallo $[0, 2\pi]$ le seguenti equazioni :

1. $4\cos^2 x = 3$ *Soluzione:* $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$
2. $\sin x + \cos x = 1$
3. $\sin 2x = 2\sin x$
4. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ *Soluzione:* $\{\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi\}$
5. $sin^2x + \cos 2x = 1$ *Soluzione:* $x = \pi,\ x = 0$
6. $\sin^2 x - 2\cos x + \frac{1}{4} = 0$ *Soluzione:* $x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{5}{3}\pi$
7. $\cos^2 x + 2\cos x \sin x = 0$

Nota sulla risoluzione di disequazioni trigonometriche nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

1. $\sin x > c$ e $\cos x > c$ se $c > 1$, non hanno nessuna soluzione assumendo le funzioni sin e cos valori compresi fra -1 ed 1. $\sin x < c$ e $\cos x < c$ se $c < -1$, non hanno nessuna soluzione , per lo stesso motivo del caso precedente.

2. Nel caso generale si consiglia di aiutarsi con un disegno.
   Esempio 1: $\sin x > \frac{1}{2}$
   Nell' intervallo $[0, 2\pi]$ si ha $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\sin\frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2}$, dal disegno del cerchio goniometrico con segnati i due angolo precedenti si deduce che $\sin x > \frac{1}{2}$ per $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$.
   Esempio 2: $\cos x < -\frac{1}{2}$
   Nell' intervallo $[0, 2\pi]$ si ha $\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$ e $\cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$, dal disegno del cerchio goniometrico con segnati i due angolo precedenti si deduce che $\cos x < -\frac{1}{2}$ per $\frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$.

Esercizio 12
Risolvere nell'intervallo $[0, 2\pi]$ le seguenti disequazioni:

1. $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\text{tg}\ x > 1$
3. $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\sin x < -\frac{1}{2}$
5. $\sin x + \cos x < 1$
6. $2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$ *Soluzione:* $0 < x < \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$
7. $|2\cos x| > 3$
8. $3\cos x + \sin^2 x - 3 > 0$ *Soluzione: nessuna*
9. $\sin(2x) + 2\sin^2 x \geq 0$ *Soluzione:* $0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi,\ \pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi$
10. $2\cos^2 x + \sqrt{2}\sin x - 2 \leq 0$ *Soluzione:* $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi,\ \pi \leq x \leq 2\pi$.