

Foglio di esercizi 3

Esempi di funzioni, composizione di funzioni, funzione inversa.

Esercizio 1

Date le funzioni  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  e  $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$  calcolare  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ f$ , precisando il loro dominio.

Soluzioni

$$(f \circ g)(x) = \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+1} \quad D = \{x : x \neq -2, -1\}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{x^2+1+x}{x^2+1+2x} \quad D = \{x : x \neq -1, x \neq 0\}$$

$$(f \circ f)(x) = \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} \quad D = \{x : x \neq 0\}$$

Esercizio 2

Assegnata la funzione  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ , calcolare  $f(-x)$ ,  $f(\frac{1}{x})$ ,  $f(\frac{1}{1-x})$ ,  $f(f(x))$ .

Esercizio 3

Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari o nessuna delle due cose.

$$(1) \quad f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{x^2+1}{1+x^4}, \quad h(x) = \frac{x^3+1}{1+x^4}$$

$$(2) \quad f(x) = x^5 + 1, \quad g(x) = x(x+1), \quad h(x) = [x]$$

(La funzione  $h(x) = [x]$ , chiamata parte intera di  $[x]$  è definita per ogni  $x$  reale come il più grande intero minore o uguale ad  $x$ ).

Esercizio 4

Sia  $h = f \circ g$ ,

- Se  $g$  è pari, si dimostri che  $h$  è pari.
- Se  $g$  è dispari  $h$  è dispari? Si dimostri la tesi o si fornisca un controesempio.
- Che cosa succede se  $f$  è pari o dispari?

Esercizio 5

Quale è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine alla curva  $y = e^{-x}$  e quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

Esercizio 6

Assegnate le funzioni

$$f(x) = \frac{1+x}{2x+1}, \quad g(x) = \frac{1}{2+x}, \quad l(x) = x|x|, \quad h(x) = x^3 + 1$$

precisarne il dominio e quando possibile l'immagine. Trovarne poi, nel caso che esistano, le funzioni inverse delle stesse precisandone il dominio.

Alcune soluzioni.

$f(x)$  è definita per  $x \neq -\frac{1}{2}$ , poichè non sappiamo (per ora) tracciare il grafico di  $f$ , per trovare la funzione inversa procediamo direttamente cercando di risolvere  $y = \frac{1+x}{2x+1}$  rispetto ad  $x$ . Si ottiene quindi  $x = \frac{1-y}{2y-1}$ , scambiando  $x$  con  $y$  otteniamo  $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x-1}$ , che è definita per  $x \neq \frac{1}{2}$ .

Per la  $g$  procedendo come per la  $f$  otteniamo  $D = \{x : x \neq -2\}$  e risolvendo  $y = \frac{1}{2+x}$  rispetto ad  $x$  dopo aver scambiato  $x$  con  $y$  otteniamo la funzione inversa  $g^{-1}(x) = \frac{1-2x}{x}$ , che è definita per  $x \neq 0$ .

*Esercizio 7*

Calcolare  $\arcsin 1$ ,  $\arctan \sqrt{3}$ .