Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2008/09**

Foglio di esercizi 5

Teorema degli zeri, funzioni continue, limiti, teorema di Lagrange

Esercizio 1
Dimostrare che la seguente equazione ha almeno una soluzione reale

$$x^4 + x^3 + 20x + 5 = 0$$

Esercizio 2
Determinare il valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ per il quale la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 7 & x \geq -2 \\ x^3 + 15 & x < -2 \end{cases}$$

risulta continua su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3
Dimostrare che

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ (\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Esercizio 4
Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4\cos x + \mathrm{tg}\ x}{x^2 - \sqrt{x \sin x + 3x}}$
2. $f(x) = \sqrt{1 + 2x^4}$
3. $f(x) = \frac{1}{4}\mathrm{tg}\ ^4 x - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\ ^2 x - \log\cos x$
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$
5. $f(x) = \log\left(x + \sqrt{4+x^2}\right)$
6. $f(x) = e^{4x} - \frac{1}{2}\log(2x) - e^{\cos x}$
7. $f(x) = \arcsin(x - \sin x)$
8. $f(x) = \log|\log\sin x|$
9. $f(x) = 2^{x \sin x}$
10. $f(x) = \mathrm{arctg}\ x^2 - 3x^3$
11. $f(x) = \dfrac{e^x - 2e^{-3x}}{x^2 + \mathrm{arctg}\ (2x)}$

Esercizio 5
Trovare le rette tangenti alla funzione $f(x) = |x^2 - 5x + 6| - 2$ nei punti di intersezione della funzione con l'asse delle ascisse.

Esercizio 6
Trovare il polinomio di secondo grado $P(x)$ tale che il grafico $y = P(x)$ passi per i punti $A = (1, 0)$ e $B = (2, 4)$ e sia tangente in A alla retta $y = 3(x - 1)$.

Esercizio 7
Per quali valori di h e k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 1 \leq x \\ kx + h & x < 1 \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 2]$? Determinare poi un punto dell'intervallo che soddisfa alla tesi del Teorema.

Esercizio 8
La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & 0 \leq x < 1 \\ |x^2 + x| & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 3]$?
Soluzione
La funzione f non è derivabile in $x = 1$, quindi non soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0, 3]$.

Esercizio 9
Determinare per quali valori di a e b la funzione

$$\begin{cases} x + 5 & x \leq -2 \\ ax^2 + b & -2 < x < 1 \\ \sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

è continua per ogni x reale e individuare per quali valori di x la funzione corrispondente ai suddetti valori di a e b non è derivabile.

Esercizio 10
Si fornisca un esempio di funzione che soddisfa ognuno dei seguenti requisiti, oppure si spieghi perché non ne può esistere alcuna:

1. una funzione continua e derivabile in $x = 3$;
2. una funzione né continua né derivabile in $x = 3$;
3. una funzione derivabile ma non continua in $x = 3$;
4. una funzione continua ma non derivabile in $x = 3$;

Soluzione.

1. $f(x) = x^2$,
2. $$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 3 \\ x & x \leq 3 \end{cases}$$
3. non esiste una tale funzione perché si dimostra che ogni funzione derivabile in un punto $x_0 =$ é continua in quel punto.
4. $f(x) = |x - 3|$.

Esercizio 11
La funzione $f(x)$ è definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-A(x^2-1)} & x \leq 1 \\ \frac{B}{x+1} & x > 1 \end{cases}$$

Per quali valori delle costanti A e B tale funzione è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}$?

Esercizio 12
Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ $(Sol: 0)$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x} (Sol: +\infty)$

2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x+2)}{\log x}$ $(Sol: 1)$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(1+\sqrt{x})}{\log x}$ $(Sol: \dfrac{1}{2})$

3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(1+x^5)}{\log(2+x^3)}$ $(Sol: \dfrac{5}{3})$

4. $\lim_{x\to0} \dfrac{\log(\cos x)}{\sin^2 x}$ $(Sol: -\dfrac{1}{2})$, $\lim_{x\to0^+} \dfrac{1-e^x}{1-\cos\sqrt{x}}$ $(Sol: 2)$, $\lim_{x\to0} \dfrac{\log\sqrt{1+x^2}}{1-\cos x} (Sol: 1)$

5. $\lim_{x\to0} \dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4}$ $(Sol: \dfrac{1}{2})$, $\lim_{x\to0} \dfrac{\log(1+\sin x)}{e^x-1}$ $(Sol: 1)$, $\lim_{x\to0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$ $(Sol: \dfrac{1}{6})$

6. $\lim_{x\to0} \dfrac{\log(1+x)-x}{\sin^2 x}$ $(Sol: -\dfrac{1}{2})$,