Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2008/09**

Foglio di esercizi 6

Studio di funzioni

Esercizio 1
Mostrare che l'equazione $2x^3 + 3x - 3 = 0$ ha una sola soluzione reale.
Soluzione
La funzione $f(x) = 2x^3 + 3x - 3$ è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$, inoltre $f(0) = -3 < 0$ e $f(1) = 2 > 0$. Alla funzione f si può applicare il Teorema di esistenza degli zeri e quindi esiste $x_0 \in (0, 1)$ tale che $f(x_0) = 0$. Essendo $f'(x) = 6x^2 + 3 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione f è strettamente crescente e quindi la soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ è unica.

Esercizio 2
Discutere quante soluzioni ha l'equazione

$$x^5 + x = k$$

al variare del parametro reale k.

Esercizio 3
Studiare le seguenti funzioni e dedurne il grafico:

1. $y = \dfrac{x}{x+1}$
2. $y = \dfrac{x^2 + 4x - 1}{x+1}$
3. $y = \dfrac{x}{x^3 - 1}$
4. $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x}$
5. $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 1 \\ 2x + 1 & x \leq 1 \end{cases}$
6. $y = \dfrac{x^2 - |x+2|(x+1)}{2x+3}$
7. $y = x^3 - 3|x - 1| + 2$

Esercizio 4
Studiare le seguenti funzioni e tracciarne un grafico:

(*a*) $$f(x) = \log|x + 1|$$

(*b*) $$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(*c*) $$f(x) = \log(3x^2 + 4x + 2)$$

(*d*) $$f(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \text{nell'intervallo} \quad (0, \frac{\pi}{2})$$

(e) $$f(x) = e^{-x^2}$$

(f) $$f(x) = x - \log x$$

(g) $$f(x) = x - 3\log|x| + 1$$

(h) $$f(x) = x + e^x$$

(k) $$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x - 5}$$

(l) $$f(x) = \log \frac{x}{x+2}$$

(m) $$f(x) = x^2 + \sqrt{|x^2 - 1|}$$

Nei vari casi studiare quante sono le soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5

Sia data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

1. Tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$.
2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $P = (2, -1)$ e nel punto $Q = \left(4, -\frac{1}{3}\right)$.
3. Si consideri un generico punto R sul grafico di f nel tratto compreso fra P e Q; siano A e B le intersezioni con gli assi coordinati della retta tangente al grafico di f in R. Detta x_R l'ascissa del punto R, scrivere l'area del triangolo AOB in funzione di x_R e determinare x_R in modo tale che questa area sia massima e minima [ricordare che R è compreso fra P e Q, ossia $2 \leq x_R \leq 4$].

Soluzione punto (3).

L'equazione della retta tangente alla curva in x_R è $y = \dfrac{1}{1-x_R} + \dfrac{x - x_R}{(1-x_R)^2}$. Le intersezioni con gli assi y e x sono rispettivamente $\dfrac{1-2x_R}{(1-x_R)^2}$ e $2x_R - 1$. L'area del triangolo AOB in funzione di x_R è $\dfrac{(2x_R-1)(-1+2x_R)}{2(1-x_R)^2}$ (notare che $1 - 2x_R < 0$), per trovare il massimo e il minimo si osservi che $f'(x_R) = \dfrac{2(2x_R^2 - x_R)}{(-x_R+1)^3} < 0$, per $x_R > 1$ quindi dal confronto dei valori di f, negli estremi dell'intervallo si conclude che il massimo si ottiene per $x_R = 2$ e il minimo per $x_R = 4$.

Esercizio 6

E' assegnata la funzione
$$f(x) = x^3 + 2ax^2 + 2$$
dove a è un parametro.

1. Scegliete un valore positivo per a e tracciate il grafico di $f(x)$, prestando attenzione al segno della sua derivata e trovando eventuali punti di massimo e minimo.
2. Ripetete il punto precedente, scegliendo un valore negativo di a.
3. Trovare, se ciò è possibile, un valore di a tale che $f(x)$ abbia un minimo nel punto $x = 1$. Altrimenti, mostrate che ciò non è possibile.
4. Trovare, se ciò è possibile, un valore di a tale che l'equazione $f(x) = 0$ abbia esattamente tre soluzioni reali. Altrimenti, mostrate che ciò non è possibile.