Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2008/09**

Foglio di esercizi 7

Integrali

Esercizio 1
Calcolare tutte le primitive delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^3 + x - 5 \tag{1}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{x} + x^3 \tag{3}$$

$$f(x) = e^x + 2 \tag{4}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + x^3}{\sqrt{x}} \tag{5}$$

$$f(x) = 2\cos x - 5\sin x \tag{6}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2} \tag{7}$$

Esercizio 2
Calcolare tutte le primitive delle seguenti funzioni usando la regola di integrazione per sostituzione:

1. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
2. $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$
3. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ (funzione della forma $\frac{f'(x)}{f(x)}$)
4. $f(x) = \sqrt{x+1}$
5. $f(x) = x\sqrt{1-3x^2}$ (funzione della forma $f'(x)[f(x)]^\alpha$)
6. $f(x) = (x-1)(x^2+2)$
7. $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$
8. $f(x) = \cos x(\sin x)^4$
9. $f(x) = \frac{1}{x}(\log x)^{\frac{2}{3}}$
10. $f(x) = e^x(\cos e^x)$
11. $f(x) = \frac{2}{3x+1}$
12. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
13. $f(x) = \frac{2\log^2 x + \log x}{x}$

14. $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$
15. $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$
16. $f(x) = \frac{1}{2x+1}$
17. $f(x) = xe^{x^2}$
18. $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
19. $f(x) = 2x(x^2+3)^4$
20. $f(x) = \sin(3x)$
21. $f(x) = \frac{1}{5-3x}$
22. $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$

Alcune soluzioni e risultati.

(2) $R = \text{tg } e^x + c$

(7) $f(x) = \frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1}$, $R = x - \log|x-1| + c.$

(10) $R = \sin e^x + c$

(14) $\frac{x}{2} = t$, $R = \frac{1}{2}\text{arctg } \frac{x}{2} + c$

(17) Con la sostituzione $x^2 = t$ si ottiene $2xdx = dt$ e quindi $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c.$

(18) Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si ottiene $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$ e quindi $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^t dt = 2e^t + c = 2e^{x^2} + c$

(19) Con la sostituzione $x^2 + 3 = t$ si ottiene $2xdx = dt$ e quindi $\int 2x(x^2+3)^4 dx = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + c = \frac{(3+x^2)^5}{5} + c.$

(20) Con la sostituzione $3x = t$ si ottiene $3xdx = dt$ e quindi $\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + c = \frac{1}{3}\cos(3x) + c.$

(21) Con la sostituzione $5 - 3x = t$ si ottiene $-3dx = dt$ e quindi $\int \frac{1}{5-3x}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt = -\frac{1}{3}\log|t| + c = -\frac{1}{3}\log|5-3x| + c$

Esercizio 3
Calcolare tutte le primitive delle seguenti funzioni, usando la regola di integrazione per parti:

1. $f(x) = x\cos x$
2. $f(x) = \log x$
3. $f(x) = x^3 e^{-x}$
4. $f(x) = x^4 \log x$
5. $f(x) = e^{2x}\sin 3x$
6. $f(x) = \text{arctg } x$

Alcune soluzioni e risultati.

1. $R = \int xd(\sin x)dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c$

2. $R = x\log x - x + c$

4. $R = \int x^4 \log x dx = \int \log x d\frac{x^5}{5} dx = \frac{x^5}{5}\log x - \int \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^5}{5}\log x - \frac{x^5}{25} + c$

Esercizio 4
Calcolare tutte le primitive delle seguenti funzioni razionali:

1. $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$
2. $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}$
3. $f(x) = \frac{x^2+1}{2x+1}$
4. $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

Alcune Soluzioni e risultati.

(1) Completare il quadrato al denominatore e usare la sostituzione $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = t$, $R = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$

(2) Si cerca una decomposizione della forma $\frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$, con A B costanti da determinare in base al principio di identità dei polinomi, la primitiva della funzione è $\frac{1}{3}\log|x-2| - \frac{1}{3}\log|x-1| + c$.

(3) Si esegue dapprima la divisione di x^2+1 per $2x+1$ ottenendo $\frac{x^2+1}{2x+1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4(2x+1)}$, la primitiva è $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}\log|2x+1|$.

(4) Si cerca una decomposizione della forma $\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$ e si procede come in precedenza.