

Foglio di esercizi 8

*Limiti di successioni, studio di serie.**Esercizio 1*

Stabilire se le seguenti successioni sono convergenti:

$$a_n = n, \quad a_n = (-1)^n, \quad a_n = (-1)^n n^2, \quad a_n = n^2 + n$$

Esercizio 2

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}$$

Esercizio 3

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^{2n}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{5n}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{6n}\right)^{\pi n}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n^2 + n^4}\right)^n$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + \frac{1}{n}}$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{7^n}\right)$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 4^n)$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{3^n + 1}$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n - 2^n}{3^n - 4^n}$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!}$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n!)}{n \log n}$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n!}$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n}$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!}$

Suggerimento:

Per la risoluzione dei precedenti esercizi ricordare i seguenti limiti e le seguenti disuguaglianze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \infty & q > 1 \\ 1 & q = 1 \\ 0 & |q| < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{se } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Formula di Stirling:

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n} n e$$

Alcuni risultati.

(1) $R = \frac{1}{e}$

(2) $R = e^{14}$

(5) $R = 1$

(6) $R = 1$

(7) $R = 0$

(8) $R = -\infty$

(9) $R = 0$

(10) $R = -\infty$

(11) $R = +\infty$

(12) $R = 1$

(13) $R = +\infty$

(14) $R = +\infty$

(15) $R = 0$

Esercizio 4

Mostrare che la successione definita da:

$$a_1 = 2 \quad a_n = \frac{1}{3 - a_{n-1}}$$

soddisfa $0 < a_n \leq 2$ ed è decrescente. Dedurre che è convergente e trovarne il limite.

Cenno di soluzione.

Si dimostra usando il principio di induzione matematica che la successione verifica le condizioni $0 < a_n \leq 2$ ed è decrescente, questi fatti assicurano l'esistenza del limite finito della successione. Per trovare il limite, si passa al limite per $n \rightarrow \infty$ in $a_n = \frac{1}{3 - a_{n-1}}$, detto L questo limite, si ottiene che esso verifica l'equazione $L = \frac{1}{3 - L}$, la cui soluzione fornisce $L = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ e $L = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, l'ultima soluzione è da scartare in quanto essendo $a_n \leq 2$ deve risultare anche $L \leq 2$.

Esercizio 5

Mostrare che le seguenti serie non sono convergenti:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} 5^{k+1} 2^{-k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$$

Soluzione.

Si verifica che non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza di una serie (se una serie $\{\sum_{k=1}^n a_k\}$ converge, il limite $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$), quindi se il limite precedente non esiste o è diverso da zero la serie non è sicuramente convergente. Per dimostrare la non convergenza delle serie precedenti basterà quindi osservare che

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (k^2 + k) &= +\infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (5^{k+1} 2^{-k}) &= 5 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2}\right)^k = +\infty \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Esercizio 6

Esprimere i numeri decimali periodici $0,\bar{3}$ e $0,15\bar{3}$ in frazione usando la serie geometrica.

Soluzione della seconda parte.

$$0,15\bar{3} = \frac{1}{10} + \frac{53}{10^3} + \frac{53}{10^5} + \dots = \frac{1}{10} + \frac{53}{10^3} (1 + \frac{1}{10^2} + \dots) = \frac{1}{10} + \frac{53}{10^3} \frac{10^2}{99} = \frac{1043}{990}$$

Esercizio 7

1. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

2. Usando il punto precedente, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

3. Dedurre che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \infty$$

Domanda 8

Calcolare la somma della seguente serie ($a \in \mathbb{R}$):

$$1 + \frac{1}{a^4 + 7} + \frac{1}{(a^4 + 7)^2} + \frac{1}{(a^4 + 7)^3} + \frac{1}{(a^4 + 7)^4} + \dots$$

Esercizio 9

Stabilire se le seguenti serie convergono assolutamente o meno usando il teorema del confronto o il criterio del rapporto

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k)}{k^2}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k^3}$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k}$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{4^{2k+1}(k+1)}$$

Esercizio 10

Stabilire se le serie seguenti convergono o meno usando i criteri fatti o la condizione necessaria per la convergenza di una serie:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$$

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2 + 5}$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k(k+1)}$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3 + 2^k}$$

$$(5) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$$

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$$

$$(7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2(k+1)}}$$

$$(8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$$

$$(9) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 1}{5^k + 2}$$

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k} + 7}{k^2 - 8}$$

$$(11) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)}$$

Alcune soluzioni.

- (1) Serie divergente.
- (2) la serie converge per il criterio del confronto perchè $\frac{\sqrt{k}}{k^2+5} \leq \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$
- (3) la serie diverge per il criterio del confronto perchè $\frac{k-1}{k^2+k} \geq \frac{k-\frac{k}{2}}{k^2+k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1}$, oppure si può usare il criterio asintotico.
- (4) la serie converge per il criterio del confronto perchè $\frac{1}{3+2^k} \leq \frac{1}{2^k}$
- (5) la serie converge per il criterio del confronto, applicato dopo aver moltiplicato numeratore e denominatore per $\sqrt{k+1} + \sqrt{k}$
- (6) Serie divergente.
- (7) Serie convergente.
- (8) Serie convergente.
- (9) Serie convergente.
- (10) la serie converge per il criterio del confronto asintotico
- (11) la serie non converge per il criterio integrale