Corso di Analisi Matematica **Anno accademico 2008/09**

Foglio di esercizi 9

Serie a termini di segno alterno, serie di potenze e serie di Taylor.

Esercizio 1
Per quali valori di p la serie
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^p}$$
converge?
Soluzione.
Per $p > 1$, la serie converge assolutamente dato che la serie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ converge per $p > 1$. Per $0 < p \leq 1$, la serie converge per il criterio di Leibniz. Per $p \leq 0$, il termine generale non converge a 0, quindi la serie non converge.

Esercizio 2
Dopo aver stabilito, con il criterio di Leibniz, che le serie seguenti convergono stabilire quanti termini occorre sommare per avere un errore minore di 0.001.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{4^k}$$
Soluzione della prima parte.
Per $k > 2$, $\frac{2^k}{k!} > \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}$, e $\lim_{k\to\infty} \frac{2^k}{k!} = 0$, infatti dalla formula di Stirling otteniamo $\frac{2^k}{k!} < \frac{2^k e^k}{k^k} = (\frac{2e}{k})^k < (\frac{2e}{6})^k$ per $k > 6$, quindi la serie converge per il criterio di Leibniz. Per rispondere alla seconda domanda ricordare che l'errore che si compie sostituendo la somma s di una serie a segno alterno con la somma parziale s_n è $\leq$ del valore assoluto del primo termine che si trascura, quindi poichè il primo k per cui $\frac{2^k}{k!} < 0.001$ è $k = 8$, per avere un errore < 0.001, nella somma si dovrà sommare 7 termini.
Nota: In realtà le due serie assegnate risultano assolutamente convergenti per il criterio del rapporto, quindi il criterio di Leibniz si può anche usare solamente per approssimare il valore delle somme delle serie.

Esercizio 3
Stabilire per quali valori di x le serie seguenti convergono:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{(k+1)^k}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 x^k}{6^k}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! x^k}{k^k}$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k} 2^k}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k^2 5^k}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} (\frac{x}{3})^k$

8. $\sum_{k=0}^{\infty} k^3(x-5)^k$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{4k-3}(2-\ln x)^k$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} x^k$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k!}{(4k+1)!} x^k$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} k(x-3)^k$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{2k^3+5}(x-2)^k$

Soluzioni.

(1) Applicando il criterio del rapporto si ottiene:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{\sqrt{k}}{|x|^k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k}{k+1}} \cdot |x| = |x|$$

quindi per $|x| < 1$ la serie converge assolutamente. Per $x = 1$, la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, che è una serie armonica divergente, per $x = -1$, la serie è $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, che abbiamo già visto essere convergente.

(2) Insieme in cui la serie converge $(-\infty, +\infty)$.

(3) Insieme in cui la serie converge $(-6, 6)$.

(4) Insieme in cui la serie converge $(-e, e)$.

(5) Insieme in cui la serie converge $[-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(6) Insieme in cui la serie converge $[-5, 5]$.

(7) Insieme in cui la serie converge $(-3, 3)$.

(8) Insieme in cui la serie converge $(4, 6)$.

(9) Applicando il criterio del rapporto si ottiene:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|k+1+5|}{|4k+4-3|} \cdot \frac{|4k-3|}{|k+5|} \cdot |2-\log x| = |2-\log x|.$$

Si ha quindi convergenza per $-1 < 2 - \log x < 1$ e quindi per $e < x < e^3$; per $x = e$ la serie diventa: $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+4}{4k-3}$ che non converge dato che $\lim_{k\to\infty} \frac{k+4}{4k-3} = \frac{1}{4}$, per $x = e^3$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+4)(-1)^k}{4k-3}$, che ancora non converge dato che il termine generale non tende a zero. (Si noti che questa non è una serie di potenze.)

(10) Insieme in cui la serie converge $[-2, 2)$.

(11) Insieme in cui la serie converge $(-\infty, +\infty)$.

(12) Insieme in cui la serie converge $(2, 4)$.

(13) Insieme in cui la serie converge $[1, 3]$.

Esercizio 4
Si supponga che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ converga in $x = 4$ e diverga in $x = 6$. Cosa è possibile dire sulla convergenza o sulla non convergenza delle serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k (1)^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k 8^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k (-3)^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k 9^k$

Esercizio 5
Scrivere le serie di Taylor con punto iniziale 0, almeno fino al secondo ordine (usando, se possibile, gli sviluppi in serie già noti, oppure procedendo direttamente) delle seguenti funzioni .

$$e^{x^2}, \quad x^2 e^{-x}, \quad \sin(x^4), \quad e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$\cos(\sin x) - \ln(1+2x), \quad \sqrt{1+e^x}, \quad \ln(1+\sin(4x)),$$

Alcune soluzioni.
La serie di e^{-x} si ottiene da quella di e^x sostituendo al posto di x nella serie di Taylor di e^x $-x$, si ottiene quindi $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + E_3(x)$.
La serie di $x^2 e^{-x}$ si ottiene da quella di e^{-x}, moltiplicando ciascun termine per x^2, si ottiene quindi $x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{3!} + E_5(x)$.
La serie di $\cos(\sin x) - \ln(1+2x)$ si ottiene direttamente, cioè calcolando le varie derivate della funzione in 0. La serie richiesta è quindi $\cos(\sin x) - \ln(1+2x) = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 + E_2(x)$.

Esercizio 6
Utilizzare la serie di Mac Laurin di e^{-x} e di $\sin x$ per calcolare $e^{-0.2}$ e $sin(3^0)$ correttamente fino alla quinta cifra decimale.
Soluzioni.
Dalla serie di Taylor di e^{-x} si ottiene $e^{-0.2}$ si ottiene $e^{-0.2} = 1 - 0.2 + \frac{(0.2)^2}{2} - \frac{(0.2)^3}{3!} + \dots$. Per stabilire a quale indice fermarsi si può ricorrere alla stima dell'errore data dal criterio di Leibniz, cioè $R_n < \frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)!}$ dato che la serie è a termini di segno alterno. Si deve quindi scegliere il primo n per cui $\frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)!} < 0.5 \cdot 10^{-5}$ e questo è $n = 4$, quindi $e^{-0.2} = 1 - 0.2 + \frac{(0.2)^2}{2} - \frac{(0.2)^3}{3!} + \frac{(0.2)^4}{4!} = 0.819334$.
Per $sin(3^0)$, si osserva che $3^0 = \frac{\pi}{60}$, quindi da $\sin x = \displaystyle\sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\sin(\frac{\pi}{60}) = \frac{\pi}{60} - (\frac{\pi}{60})^3 \cdot \frac{1}{3!} + (\frac{\pi}{60})^5 \cdot \frac{1}{5!} - \dots$. Tenendo conto del fatto che il termine della serie di indice $2n+2$ è 0, dalla stima del resto della formula di Taylor si ottiene $R_{2n+2} < (\frac{\pi}{60})^{2n+3} \cdot \frac{1}{(2n+3)!}$, il primo n per cui succede questo è $n = 1$ quindi con 5 cifre decimali esatte si ha $\sin(\frac{\pi}{60}) = \frac{\pi}{60} - (\frac{\pi}{60})^3 \cdot \frac{1}{3!}$.

Esercizio 7
Stimare l'errore che si compie approssimando $\sin \frac{1}{100}$ con $\frac{1}{100}$ usando il polinomio di Taylor di punto iniziale $x = 0$.
Soluzione.
Si ha $\sin x = \displaystyle\sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, e la serie è a termini di segno alterno approssimando $\sin \frac{1}{100}$ con $\frac{1}{100}$, si considerano i primi tre termini della serie di Taylor (il primo e il terzo sono nulli), quindi dal criterio di Leibniz si ottiene che l'errore compiuto è minore del valore assoluto del primo termine trascurato, cioè $R < \frac{1}{3!} \cdot (\frac{1}{100})^3 \sim 0.000000167$.

Esercizio 8
Calcolare l'integrale $\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$, con un errore $<$ di 0.001.

Esercizio 9
Calcolare i seguenti limiti usando lo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni opportune:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} \sin \sqrt{x}}{x(2+x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{e^{2x} - 1}$$