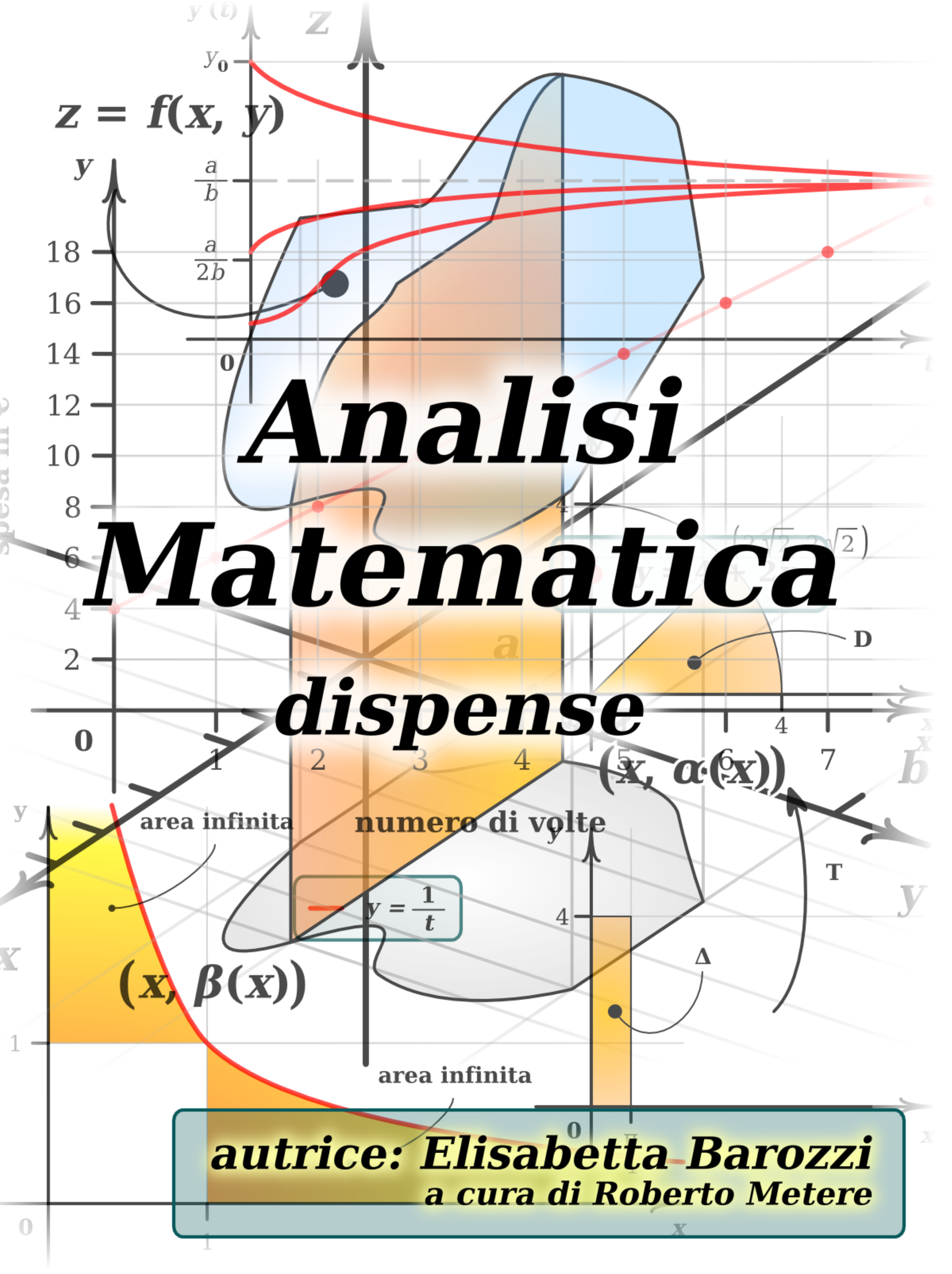



# Analisi Matematica

## dispense

autrice: Elisabetta Barozzi

a cura di Roberto Metere

# Indice

# Introduzione

Le idee fondamentali del calcolo differenziale e integrale

Il nostro mondo sarà l'insieme dei numeri reali, denotato con $\mathbb{R}$.

Non mi dilungherò nel racconto della costruzione di tali numeri, cominciando dai naturali, passando agli interi ed ancora ai razionali fino a raggiungere gli irrazionali, né mi dilungherò nelle varie descrizioni di tali numeri, anche se devono essere ben chiare le loro proprietà e la loro rappresentazione decimale. Chi ha dei dubbi sulla veridicità o falsità di affermazioni come

$$0.\bar{9} < 1; \quad 0.\bar{9} > 1; \quad 0.\bar{9} = 1$$

deve assolutamente aggiornarsi. In generale in questo corso non sono ben accette regolette mnemoniche prive di giustificazioni, ma sono sempre apprezzate idee, ragionamenti e conti, anche se informali. Ma diamo una risposta alle tre affermazioni. Nella notazione decimale, il numero $0.\bar{9}$ significa

$$0.\bar{9} = 0.999999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots = 9\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots\right)$$

Cerchiamo di trovare un'espressione generale per il calcolo di somme di questo tipo (cominciamo con una somma finita e affrontiamo dopo il problema della somma con infiniti addendi). Sia

$$S_k(q) = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^k = \sum_{n=1}^{k} q^n$$

Abbiamo

$$qS_k(q) = q^2 + q^3 + \ldots + q^k + q^{k+1} = \sum_{n=2}^{k+1} q^n$$

e quindi

$$S_k(q) - qS_k(q) = (1-q)\, S_k(q) = q - q^{k+1}$$

da cui, per $q \neq 1$,

$$\boxed{S_k(q) = \frac{q - q^{k+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q} - \frac{q^{k+1}}{1-q}}$$

Nel nostro caso $q = 1/10$. Abbiamo

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^k}=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}-\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}-\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}}{9}$$

Resta da capire che cosa succeda quando $k$ diventa sempre più grande (diremo: quando $k$ tende all'infinito).

Osservando che il termine $(1/10)^k$ si fa sempre più piccolo con l'aumentare di $k$, cioè

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k=0$$

(formalizzeremo questo concetto in seguito), avremo

$$0.\bar{9}=\lim_{k\to+\infty}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^k\right]=1$$

Notiamo che questi conticini ci fanno anche capire che i numeri decimali finiti o periodici sono numeri razionali, cioè del tipo

$$\frac{a}{b},\ a,b \text{ interi, } b\neq 0$$

Il viceversa è facile: basta fare la divisione tra $a$ e $b$ e osservare che i resti ad un certo punto devono per forza ripetersi.

Bene, introduciamo ora un concetto che ci accompagnerà lungo tutto il corso: il concetto di funzione. Fissati due sottoinsiemi $A$ e $B$ di $\mathbb{R}$, chiameremo **funzione $f$ da $A$ in $B$** una qualunque relazione che associa ad ogni elemento $x \in A$ uno ed un solo elemento $y \in B$. Scriveremo

$$f : A \to B$$

$$x \longmapsto y = f(x)$$

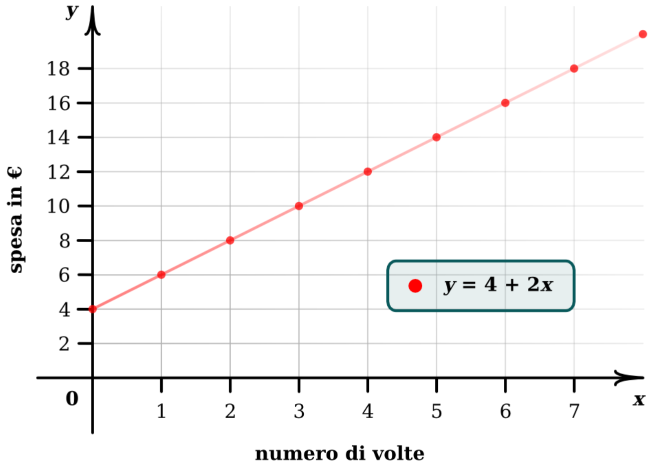
L'insieme $A$ si chiama **dominio** di $f$, l'insieme $B$ **codominio**. L'insieme $f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in B : \exists x \in A \text{ con } f(x) = y\}$ si chiama **immagine** di $f$. L'insieme $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ x \in A\}$ si chiama **grafico di** $f$.

Ci sono più modi per descrivere una funzione: spiegandola verbalmente o tramite una tabella o ancora tramite un'espressione analitica. Non sempre sarà possibile passare da una descrizione all'altra, ma spesso sarà utile ed interessante.

Per fare un semplice esempio, consideriamo la seguente situazione, espressa verbalmente: Genoveffa ha speso 4 € per una tessera che le permette di spendere solo 2 € ogni volta che va a vedere un film. Lei vorrebbe sapere quanto avrà speso dopo un certo numero di film. È chiaro che la spesa è una funzione del numero di volte $x$ che Genoveffa andrà al cinema. L'espressione algebrica di tale funzione è

$$\text{Spesa } = S(x) = 4 + 2x$$

Ecco invece una tabella della spesa e un suo grafico per vederne l'andamento:




| numero di volte $x$ | spesa $S(x)$ |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 6 |
| 2 | 8 |
| 3 | 10 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

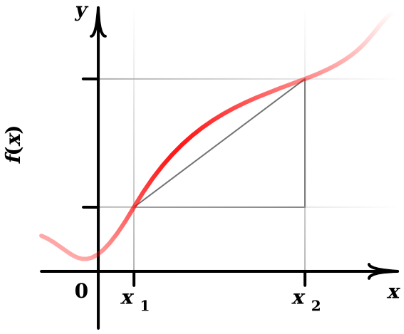
Ci sono molte domande interessanti che si possono porre riguardo alle funzioni. Farò adesso una chiacchierata piuttosto informale, lasciando per dopo una trattazione più rigorosa.

### Ad esempio

**1**. Se $x$ indica il tempo ed $f(x)$ la posizione di un punto mobile all'istante $x$, la velocità media di questo punto tra $x_1$ e $x_2$ è

$$\text{velocità media} = \frac{\Delta\ \text{spazio}}{\Delta\ \text{tempo}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

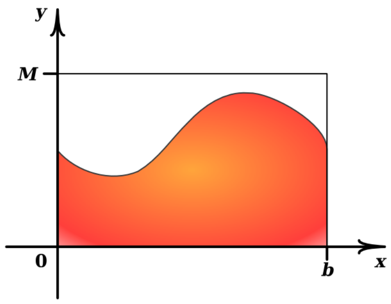
Questa quantità è chiamata **rapporto incrementale**.




Ci si può allora chiedere come ottenere la velocità istantanea $V(x)$ al tempo $x = x_1$. Essa sarà ottenuta prendendo la sua velocità media tra $x_1$ ed $x_2$ e cercando di capire che cosa succede man mano che $x_2$ si avvicina ad $x_1$. Si calcolerà quindi

$$V(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

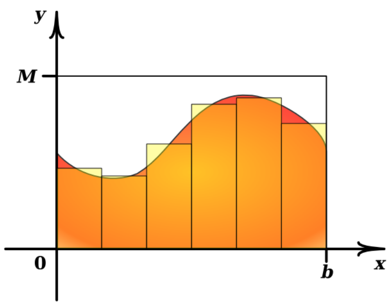
Chiameremo tale valore **derivata di** $f$ **in** $x_1$ e lo denoteremo con $f'(x_1)$.

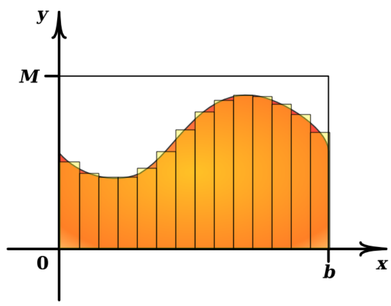



**2**. Se invece la parte di piano $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq M$ è un muro ed il grafico di $f$ crea una decorazione che divide il muro in due zone che si vogliono colorare diversamente, prima di comperare il colore ci si deve chiedere quanto misurino le due aree. Supponiamo di voler determinare l'area del sottografico di $f(x)$, cioè la zona

$$S(f) = \{(x, y) : 0 \leq x \leq b, \, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Definiremo l'area di $S(f)$ (che denoteremo con $A(b)$) mediante approssimazioni successive con aree di opportuni rettangoli, migliorando via via l'approssimazione riducendo le basi di tali rettangoli ed aumentandone quindi il loro numero $n$ come in figura:




Sarà

$$A(b) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{b}{n},$$

dove $x_k$ è un punto nella base del k-esimo rettangolino.

E ancora: se $A(x)$ è l'area quando ci si ferma ad un livello $x < b$ ci si può chiedere che relazione c'è fra $f(x)$ e $A(x)$. Questa a prima vista parrebbe una domanda meno pratica, ma in realtà vedremo che non è così. Dimostreremo che

$$A'(x) = f(x).$$

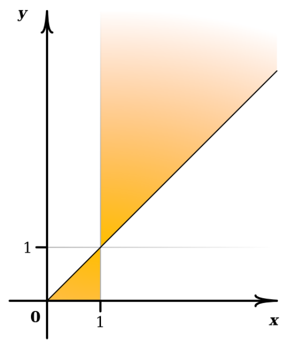
Notiamo che già da subito risulta evidente che un concetto chiave è il concetto di limite. In effetti tale concetto fa parte delle fondamenta dell'analisi matematica.

Ma continuiamo con le domande. Nel primo esempio ci si può chiedere in quale tempo il punto raggiunga la sua quota massima e nel secondo esempio ci si può chiedere in che parti il decoro è convesso. A tutte queste domande cercherà di dare una risposta la prima parte del corso, ma prima di formalizzare meglio tutti questi concetti, facciamo una panoramica di queste problematiche con una funzione particolare nota a tutti: $f(x) = x^2$. Tale panoramica sarà d'aiuto anche per recuperare conticini magari caduti nel dimenticatoio o forse mai fatti.

**La funzione** $f(x) = x^2$

Osserviamo innanzitutto che $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ e quindi il grafico di $f$ è simmetrico rispetto all'asse $y$ (si dice che la funzione è **pari**).

Ci possiamo quindi limitare a studiare questa funzione per $x \geq 0$.



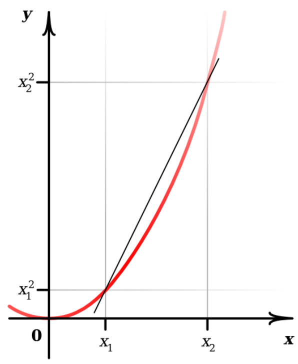

Poiché $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$, $f(x)$ è strettamente crescente per $x \geq 0$: notiamo anche che

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x$$

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > x$$

e quindi il grafico di $f(x) = x^2$ è contenuto nella zona ombreggiata in figura.

Siamo abituati a disegnare il grafico di $f(x) = x^2$ cone una **curva convessa** (parabola). Vediamo di giustificare questo fatto, cioè di vedere che $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, si ha




$$r(x) > f(x) \quad \forall x \in (x_1, x_2),$$

dove $y = r(x)$ è la retta passante per i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ (questa è la condizione di convessità). Cominciamo con lo scrivere l'equazione della retta per $(x_1, x_1^2)$, $(x_2, x_2^2)$; tale equazione è del tipo

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

dove $m$ è il coefficiente angolare della retta, $(x_1, y_1)$ il punto nel quale vogliamo che passi ed $(x, y)$ un generico punto di essa. Nel nostro caso

$$m = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{\cancel{(x_2 - x_1)}(x_2 + x_1)}{\cancel{x_2 - x_1}} = x_2 + x_1$$

e quindi l'equazione della nostra retta $y = r(x)$ è data da

$$y - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x - x_1)$$

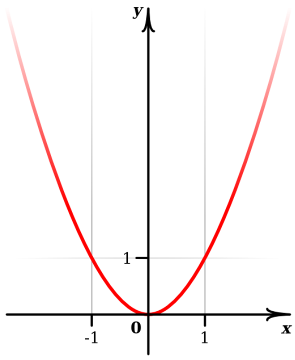
In definitiva la nostra retta è il grafico della funzione

$$y = r(x) = (x_2 + x_1)(x - x_1) + x_1^2$$

Dobbiamo verificare che $r(x) > f(x)$ $\forall x \in (x_1, x_2)$ (ovviamente $r(x_1) = f(x_1)$, $r(x_2) = f(x_2)$). Deve essere

$$\begin{array}{rcl} (x_2 + x_1)(x - x_1) + x_1^2 & > & x^2 \quad \forall x \in (x_1, x_2) \\ & \Updownarrow & \\ (x_2 + x_1)(x - x_1) & > & x^2 - x_1^2 \\ & \Updownarrow & \leftarrow \text{ perché } x > x_1 \\ x_1 + x_2 & > & x + x_1 \\ & \Updownarrow & \\ x_2 & > & x \qquad\qquad \text{vera} \end{array}$$

Quindi il grafico di $f(x) = x^2$ ha ragionevolmente l'aspetto della figura a lato. Ritorniamo ora alla pendenza della retta $y = r(x)$, che era




$$m = x_1 + x_2;$$

se facciamo ora $x_2$ tendere a $x_1$ (tenendo $x_1$ fermo) otteniamo

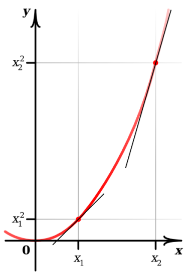
$$\lim_{x_2 \to x_1} m = 2x_1$$

La retta passante per il punto $(x_1, x_1^2)$ di pendenza $m = 2x_1$ si chiama **retta tangente al grafico** di $f(x) = x^2$ per il punto $(x_1, x_1^2)$; la sua equazione è

$$y - x_1^2 = 2x_1 (x - x_1)$$

e viene denotata con $y = T(x)$, cioè

$$T(x) = 2x_1 (x - x_1) + x_1^2 = 2x_1 x - x_1^2$$




Notiamo che la pendenza $m = 2x_1$ della retta tangente crescerà al crescere di $x_1$ e quindi la tangente si va verticalizzando al crescere di $x_1$; questo è coerente con quanto abbiamo visto riguardo la convessitù di $f(x) = x^2$.

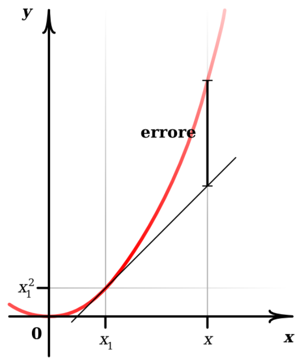
In generale, quando si può parlare di retta tangente, si dimostra che la condizione di convessità si può anche esprimere dicendo:

$f$ è convessa se $G(f)$ sta sempre sopra ogni sua retta tangente.

($G(f)$ denoterà d'ora in poi il grafico della funzione $f$)

Vediamo ora l'errore

$$E\left(x-x_1\right)=f\left(x\right)-T\left(x\right);$$




si ha

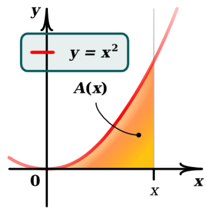
$$E\left(x-x_1\right)=x^2-\left(2x_1x-x_1^2\right)=\left(x-x_1\right)^2$$

Tale errore gode della seguente importante proprietà:

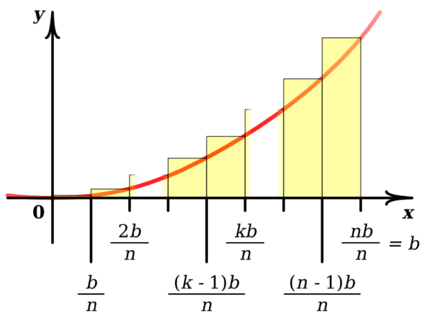
$$\lim_{x\to x_1}\frac{E\left(x-x_1\right)}{x-x_1}=\lim_{x\to x_1}\frac{f\left(x\right)-T\left(x\right)}{x-x_1}=\lim_{x\to x_1}\left(x-x_1\right)=0$$

proprietà che vedremo essere valida in generale ogni volta che approssimeremo una funzione $f(x)$ con la sua retta tangente (sempre che di retta tangente si possa parlare...)

Siamo adesso interessati a calcolare $A(b)$, dove in generale $A(x)$, $x\geq 0$ è l'area indicata nella figura a lato.




Useremo prima un modo elementare, già noto agli antichi greci, e lo confronteremo con un metodo molto interessante e utile, estremamente più pratico, soprattutto quando lo applicheremo in casi di funzioni più generali.




Primo modo. Dividiamo $[0,b]$ in $n$ intervallini uguali

$$\left[\frac{\left(k-1\right)b}{n},\frac{kb}{n}\right],\ k=1,2,\ldots,n$$

ed approssimiamo $A(b)$ (per eccesso) con l'area della scaletta in figura; poiché l'area del k-esimo scalino è

$$\text{base}\ \times\ \text{altezza}\ =\frac{b}{n}\left(\frac{kb}{n}\right)^2=\frac{k^2b^3}{n^2},$$

l'area totale della scaletta sarà

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2b^3}{n^2}=\frac{b^3}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

Il problema è quindi quello di calcolare la somma

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

Per fare ciò avremo bisogno di calcolare anche

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\ldots+n$$

Useremo in tutti e due i casi un ingegnoso trucchetto.

Cominciamo con il calcolare quest'ultima sommatoria. Partiamo dall'uguaglianza

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1;$$

Sommando le $n$ uguaglianze che si hanno al variare di $k$,

$$k = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$$

otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1,$$

il che è equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Da quest'ultima si ricava $2\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)^2 - n - 1 = n(n+1)$ e quindi

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}}$$

Ora, per calcolare la sommatoria dei $k^2$ ripercorriamo la stessa strada:

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

e quindi, come prima

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1,$$

Cioè, ricordando la soluzione ottenuta per la sommatoria dei $k$,

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n\,(n+1)}{2} + n,$$

il che è equivalente a

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n\,(n+1) + 2n}{2}$$

Da quest'ultima si ricava

$$\begin{aligned}
3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= (n+1)^3 - 1 - \frac{3n^2 + 5n}{2} \\
&= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n \cancel{+2} \cancel{-2} - 3n^2 - 5n}{2} \\
&= \frac{2n^3 + 2n^2 + n^2 + n}{2} \\
&= \frac{2n^2\,(n+1) + n\,(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)\left(2n^2 + n\right)}{2}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}}$$

Tornando ora alla nostra approssimazione per eccesso dell'area $A(b)$, abbiamo che

$$A\,(b) < \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{b^3}{n^3}\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

È intuitivo che l'approssimazione si potrà far diventare tanto accurata quanto vogliamo prendendo $n$ sufficientemente grande; notiamo che

$$\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n} =$$
$$= \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{b^3}{6}\cdot 2 = \frac{b^3}{3}$$

Concludiamo così che

$$A\,(b) = \frac{b^3}{3}.$$

Vediamo ora di ricavare $A(b)$ percorrendo una strada meno faticosa senz'altro più stimolante. Ci proponiamo di determinare la funzione $A(x)$, $x \geq 0$. Ovviamente $A(0) = 0$. Per determinare $A(x)$ calcoliamo la sua velocità di variazione in funzione di $x$ (che per facilitare l'interpretazione fisica può essere pensata come tempo). Abbiamo già visto che la velocità media della quantità $A(x)$ nell'intervallo $(x, x+h)$ è data dal rapporto

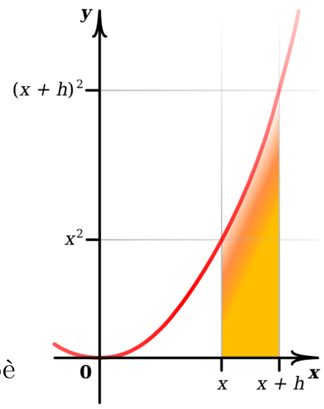
$$\frac{A\,(x+h) - A\,(x)}{h}$$

e che è ragionevole pensare che la velocità istantanea di $A(x)$ nell'istante $x$ sia data da

$$A'\,(x) = \lim_{h\to 0}\frac{A\,(x+h) - A\,(x)}{h}$$

(notiamo che numeratore e denominatore tendono a zero).

Per calcolare questo limite osserviamo che ($h > 0$)




$$hx^2 \leq A\,(x+h) - A\,(x) \leq h\,(x+h)^2$$

e quindi

$$x^2 \leq \frac{A\,(x+h) - A\,(x)}{h} \leq (x+h)^2$$

(analogo conto lasciato al lettore per $h < 0$).

Pertanto

$$x^2 \leq \lim_{h\to 0}\frac{A\,(x+h) - A\,(x)}{h} \leq x^2, \text{ cioè}$$

$$\boxed{A'(x) = x^2}$$

A questo punto, della funzione $A(x)$ sappiamo che

$$\begin{cases} A(0) = 0 \\ A'(x) = x^2 \quad \forall x \geq 0 \end{cases}$$

L'intuizione fisica ci dice che quello che sappiamo dovrebbe determinare completamente la funzione $A(x)$ (tutto questo però dovrà essere in seguito giustificato rigorosamente).

Consideriamo la funzione $F(x) = x^3/3$; ovviamente $F(0) = 0 = A(0)$. Calcoliamo la velocità $F'(x)$ di $F(x)$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{3h} \\ z = x + h \to \quad &= \lim_{h \to 0} \frac{z^3 - x^3}{3(z-x)} \\ &= \lim_{z \to x} \frac{z^3 - x^3}{3(z-x)} \\ &= \lim_{z \to x} \frac{\cancel{(z-x)}\left(z^2 + xz + x^2\right)}{3\cancel{(z-x)}} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Ricordiamo la divisione tra polinomi usata per il penultimo passaggio:

$$\begin{array}{cccc|c}
z^3 & & & -x^3 & z - x \\ \cline{5-5}
z^3 & -z^2x & & & z^2 + xz + x^2 \\ \cline{1-4}
\diagup & z^2x & & -x^3 & \\
 & z^2x & -x^2z & & \\ \cline{2-4}
 & \diagup & -x^2z & -x^3 & \\
 & & -x^2z & -x^3 & \\ \cline{3-4}
 & & \diagup & \diagup &
\end{array}$$

Quindi

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

Abbiamo così che

$$\begin{cases} F(0) = A(0) = 0 \\ F'(x) = A'(x) = x^2 \quad \forall x \geq 0 \end{cases}$$

Se la nostra modellizzazione della velocità istantanea è corretta, dobbiamo concludere che

$$A(x) = F(x) \quad \forall x \geq 0$$

cioè che

$$\boxed{A\left(x\right)=\frac{x^{3}}{3}\quad\forall x\geq 0}$$

In particolare $A(b) = b^3/3$, risultato che avevamo già ottenuto con il primo metodo. La quantità $A(b)$ si indica usualmente con

$$A\left(b\right)=\int_{0}^{b}x^{2}dx$$

e si chiama **integrale** di $f(x) = x^2$ nell'intervallo $(0, b)$. La funzione $A(x)$ verifica $A'(x) = f(x)$, $\forall x$: una funzione con questa proprietà si dice una **primitiva** di $f(x)$.

# Capitolo 1

# Il concetto di limite

## 1.1 Introduzione ai limiti

Dopo aver fatto questa lunga introduzione ed alla luce di quanto visto nelle esercitazioni (le funzioni più semplici, $x^p$, $|x|$, $\sin x$, $\cos x$, ecc., i loro movimenti e le loro proprietà) è arrivato il momento di introdurre il concetto di limite, derivata e quant'altro in maniera più formale e generale.

Il concetto di limite

La scrittura

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}, \quad \text{analogamente la scrittura} \quad \boxed{f(x) \xrightarrow{x \to x_0} l},$$

esprime il fatto che, se si prende $x$ sufficientemente vicino ad $x_0$ (ma $x \neq x_0$), il valore $f(x)$ diventa arbitrariamente vicino al numero $l$. Osserviamo che non è affatto necessario che la funzione $f$ sia definita in $x_0$ (ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

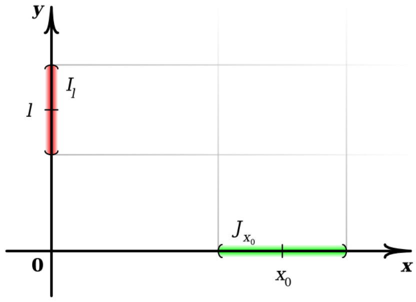
non è definita in $x = 1$, ma vale $f(x) \xrightarrow{x \to 1} 1$). In maniera più precisa:

**Definizione.** *Sia $f$ una funzione definita in un intorno di $x_0$. Diciamo che*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$$

*se e soltanto se, comunque scegliamo un intervallo $I_l$ centrato in $l$, piccolo quanto vogliamo, è possibile trovare un intervallo $J_{x_0}$ centrato in $x_0$ tale che*

$$f(x) \in I_l, \forall x \in J_{x_0}, x \neq x_0$$




Ponendo $I_l = (l-\epsilon, l+\epsilon)$ e $J_{x_0} = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ la definizione è del tutto **equivalente** ad una più amata/odiata, comunque più usata, che è la seguente

**Definizione.** *Sia $f$ una funzione definita in un intorno di $x_0$. Diciamo che*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = l}$$

*se e soltanto se, per ogni $\epsilon > 0$, è possibile trovare $\delta > 0$ tale che*

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Osservazione importante Una funzione che ha limite finito in un punto è limitata in un intorno di quel punto. In linguaggio matematico

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Longrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \exists I_{x_0} \ t.c. \ |f(x)| \leq M \ \forall x \in I_{x_0}$$

Valgono alcune prorietà dei limiti che sono molto naturali e che si riveleranno utilissime. Elenchiamo tali proprietà di seguito. Supponendo $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = q$ si ha

1. $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l + q$
2. $\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot q(x)] = l \cdot g$
3. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{q}$ (supposto $q \neq 0$)
4. 

   **Teorema** (Teorema dei carabinieri)**.** *Siano $f$, $g$, $h$ tre funzioni definite in un intorno di $x_0$ tali che*

   $$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

   *in tale intorno e tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l$; allora esiste $\lim_{x\to x_0} h(x)$ e vale $\lim_{x\to x_0} h(x) = l$.*

5. Se $\varphi(x)$ è limitata in un intorno di $x_0$ (cioè, se $|\varphi(x)| \leq M \ \forall x \in I_{x_0}$) e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, allora

   $$\lim_{x\to x_0} f(x)\, \varphi(x) = 0$$

Facciamo ora un paio di osservazioni molto utili:

**Osservazione 1**

$$f(x) < g(x)\ \forall x \in I_{x_0} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)\ ;$$

per i limiti può non valere il $<$, si pensi ad $f(x) = x^2\ ,\ g(x) = 2x^2\ ,\ x_0 = 0$

**Osservazione 2**

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} |g(x)| = |l|\ \ :$$

basta osservare che $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$.
Notiamo che in generale non vale il viceversa: si pensi a $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x \leq 0 \end{cases}$.
Il viceversa vale nel caso particolare di $x_0 = 0$.

## 1.2 Funzioni continue

Avendo a disposizione il concetto di limite possiamo introdurre quello di funzione continua:
**Definizione.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; diciamo che $f$ è **continua** in $x_0 \in [a, b]$ se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se $f$ è continua in ogni punto del suo dominio diciamo semplicemente che $f$ è continua.

Usando il linguaggio informale si potrebbe dire che una funzione è continua in $x_0$ quando $f(x)$ diventa arbitrariamente vicina ad $f(x_0)$ a patto di prendere $x$ sufficientemente vicino ad $x_0$. Oppure: $f(x)$ cambia di poco quando si cambia di poco il valore di $x$.

Con già in mano le proprietà dei limiti è banale osservare che somma, prodotto e quoziente (dove è definito) di funzioni continue sono ancora funzioni continue. Inoltre si può dimostrare che la composizione di funzioni continue è anch'esso una funzione continua, cioè se

$$g : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ ed } f : g([a, b]) \to \mathbb{R}$$

sono funzioni continue, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) \qquad \forall x_0 \in [a, b]\ \ .$$

Nel seguito per la composizione di funzioni $f(g(x))$ useremo anche la notazione $(f \circ g)(x)$.

Detto tutto questo, si osserva facilmente che le potenze (e quindi i polinomi) sono funzioni continue.

Anche le funzioni trigonometriche sono funzioni continue.

**Vediamo ad esempio** $\sin x$.

Ad esercitazioni avete visto che

$$0 < \sin x \leq x \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

e, poiché la funzione seno è dispari, si ha anche

$$x \leq \sin x < 0 \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right);$$

basta quindi applicare il teorema dei carabinieri per avere

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin 0$$

e dimostrare così la continuità di $\sin x$ in $x = 0$. Analogamente, da

$$1 - x < \cos x < 1 \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

si ricava che

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos 0$$

Per verificare la continuità di $\sin x$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ basta ora osservare che

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\left(x_0 + (x - x_0)\right) = \\ &= \sin x_0 \underbrace{\cos(x - x_0)}_{\substack{\downarrow \;\; x \to x_0 \\ 1}} + \cos x_0 \underbrace{\sin(x - x_0)}_{\substack{\downarrow \;\; x \to x_0 \\ 0}} \xrightarrow{x \to x_0} \sin x_0 \end{aligned}$$

In modo analogo si procede per il coseno.

**Osservazione importante**

Dalle disuguaglianze $\sin x \leq x \leq \tan x$ $\forall x \in (0, \pi/2)$, viste ad esercitazioni, si ottiene che

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ x \neq 0;$$

dal teorema dei carabinieri otteniamo allora un limite fondamentale:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned}\frac{\cos x-1}{x^2} &= \frac{\cos x-1}{x^2}\frac{\cos x+1}{\cos x+1}=\frac{\cos^2 x-1}{x^2}\frac{1}{\cos x+1}=\\ &= \frac{-\sin^2 x}{x^2}\frac{1}{\cos x+1}=-\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)^2\frac{1}{\cos x+1}\xrightarrow{x\to 0}-\frac{1}{2},\end{aligned}$$

cioè

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}}$$

Da questo segue immediatamente che

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0}$$

Infatti, $\dfrac{\cos x-1}{x}=x\dfrac{\cos x-1}{x^2}\xrightarrow{x\to 0}0\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$

## 1.3 Due teoremi fondamentali sulle funzioni continue

Un primo risultato fondamentale sulle funzioni continue è il

**Teorema** (Teorema di esistenza degli zeri)**.** *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, siano $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$, tali che $f(x_1)<0$ ed $f(x_2)>0$ (oppure $f(x_1)>0$ ed $f(x_2)<0$).*

*Allora esiste un punto $c\in(x_1,x_2)$ tale che $f(c)=0$.*

L'aria innoqua di questo teorema non deve nascondere la sua grande utilità. Ad esempio, consideriamo la funzione continua

$$f(x)=x^2-a \qquad (a>0)$$

Poiché $f(0)=-a<0$ ed $f(a+1)=a^2+a+1>0$, il teorema assicura l'esistenza di un punto $c\in(0,a+1)$ tale che $c^2-a=0$, cioè $c^2=a$. Abbiamo così dimostrato che esiste la radice quadrata di a. Tale radice è unica tra i reali non negativi perché $f(x)$ è strettamente crescente per $x\geq 0$.

Una conseguenza immediata del teorema di esistenza degli zeri è il seguente

**Corollario** (Teorema dei valori intermedi)**.** *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, siano $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$. Allora $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ ed $f(x_2)$.*

Dimostrazione. Posto $\lambda$ un valore compreso fra $f(x_1)$ ed $f(x_2)$, basta applicare il teorema dell'esistenza degli zeri alla funzione continua

$$g(x)=f(x)-\lambda$$

□

**Osservazione importante (proprietà della permanenza del segno)**
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, $f(x_0) > 0$. Allora esiste $I_{x_0}$ tale che $f(x) > 0 \ \forall x \in I_{x_0}$.
Infatti, sia $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$. Per la continuità di $f$ in $x_0$, si ha che

$$\exists I_{x_0} \ t.c. \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0}{2} \quad \forall x \in I_{x_0} \ ,$$

cioè

$$\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < 3\frac{f(x_0)}{2} \quad \forall x \in I_{x_0} \ .$$

Questo dice in particolare che $f(x) > 0 \ \forall x \in I_{x_0}$.

Bene, dal corollario precedente segue immediatamente che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e strettamente crescente (e quindi iniettiva), allora $f$ è suriettiva sull'intervallo $[f(a), f(b)]$ e quindi esiste la funzione inversa $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$, caratterizzata da

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in [a, b]$$

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = y \qquad \forall y \in [f(a), f(b)]$$

Questo risultato assicura l'esistenza di radici, delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche e di altre funzioni che vedremo in seguito. È importante sapere che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua e invertibile, allora la funzione inversa $f^{-1}$ è anch'essa continua.

Un altro risultato fondamentale sulle funzioni continue è il

**Teorema** (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua; allora esistono $x_m, x_M \in [a, b]$ tali che*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in [a, b] \, .$$

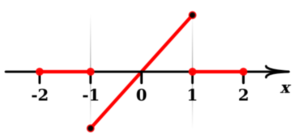
*$x_m$ si dice un **punto di minimo** di $f$, $f(x_m)$ è il **valore minimo** della $f$; analogamente, $x_M$ si dice un **punto di massimo**, $f(x_M)$ è il **valore massimo** della $f$.*

**Attenzione** È essenziale che il dominio della $f$ sia un intervallo chiuso e limitato e che la funzione sia continua. Senza queste ipotesi la tesi può essere falsa.

**Ad esempio**

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{non ha massimo in } (0, 1]$$
$$\text{non ha minimo in } (1, +\infty)$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad -2 \leq x \leq -1 \text{ oppure } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



non ha né massimo né minimo in $[-2,2]$.

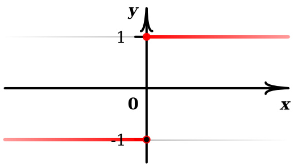
Dal teorema di Weierstrass e dal teorema dei valori intermedi segue che se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua, allora, detti

- $m$ valore minimo di $f$ in $[a,b]$
- $M$ valore massimo di $f$ in $[a,b]$,

risulta
$$f([a,b])=[m,M]$$

## 1.4 Approfondimenti sui limiti

Torniamo ai limiti. Non l'abbiamo ancora osservato esplicitamente, ma è evidente che il limite non sempre esiste. Un esempio banale è fornito dalla funzione




$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se} \quad x\geq 0 \\ -1 & \text{se} \quad x<0 \end{cases};$$

è chiaro che $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ non esiste.

Non abbiamo parlato finora di **limite destro** e **limite sinistro**, ma il concetto è del tutto naturale. La funzione $f$ dell'esempio precedente, pur non avendo limite in 0, possiede un limite destro

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=1$$

ed un limite sinistro

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-1$$

È evidente che se limite destro e limite sinistro esistono e sono uguali, allora esiste il limite.

Se consideriamo la funzione

$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{per} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad x=0 \end{cases};$$

è facile notare che non esistono $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$.

**Ad esempio** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f\left(\sin\frac{1}{x}\right) \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \sin t$, e quanto $t\to+\infty$ $\sin t$ continua ad oscillare fra $-1$ e 1.

Invece per la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} ;$$

si ha, grazie al teorema dei carabinieri, che $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$; poiché $g(0) = 0$, $g$ è continua anche in $x = 0$.

Introduciamo adesso qualche altra nozione sul tema limite per avere così una panoramica abbastanza esauriente sull'argomento: vediamo i concetti di limiti all'infinito e limiti infiniti.

**Definizione.** *Diremo che* $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty}$ *se e soltanto se* $\forall M > 0\ \exists \delta > 0$ *tale che*

$$0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ f(x) > M$$

*(il significato di* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *è lasciato al lettore)*

Quando siamo in questa situazione diciamo che la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale per $f$.

**Ad esempio** se $f(x) = 1/x^2$ si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$; se invece $f(x) = 1/x$ si ha $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$.

**Definizione.** *Diremo che* $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = l}$ *se e soltanto se* $\forall \epsilon > 0\ \exists a > 0$ *tale che*

$$x > a \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \epsilon$$

*(analogamente si definisce* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$*)*

Quando siamo in questa situazione diciamo che la retta orizzontale $y = l$ è un **asintoto orizzontale** di $f$ per $x \to +\infty$.

**Ad esempio** se $f(x) = \dfrac{x}{|x| + 1}$ si ha

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1, \ \lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$$

**Definizione.** *Diremo che* $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$ *se e soltanto se* $\forall M > 0\ \exists a > 0$ *tale che*

$$x > a \ \Rightarrow \ f > M$$

*(analogamente si definisce* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ , $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ , $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$*)*

Con queste notazioni la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale di $f(x) = \frac{1}{(x-3)^6}$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ mentre la retta $x = 3$ è un asintoto verticale per $f$).

In generale diremo che la retta

$$y = ax + b$$

è un asintoto di $f$ per $x \to +\infty$ se si ha che

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Da questa segue immediatamente che

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - a \right]$$

e quindi deve essere

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Calcolato $a$, il valore di $b$ è $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} - ax \right]$.
Analogamente si parla di asintoti per $x \to -\infty$.

**Esempio**: cerchiamo gli asintoti della funzione

$$f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1} \qquad (\text{definita per } |x| \geq 1) \; ;$$

si ha

$$\frac{f(x)}{x} = 2 + \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - 1} = \begin{cases} 2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} & \text{se} \quad x \geq 1 \\ 2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} & \text{se} \quad x \leq -1 \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3, \; \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1. \text{ Ora}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \to +\infty} \left( -x + \sqrt{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

e quindi la retta $y = 3x$ è un asintoto di $f$ per $x \to +\infty$ ;

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \to -\infty} \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{-x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

e quindi la retta $y = 3x$ è un asintoto di $f$ per $x \to -\infty$.

## 1.5 Forme Indeterminate

Osserviamo che il calcolo di limiti di rapporti, prodotti e somme diventa complicato in alcuni casi particolarmente delicati, dette **forme indeterminate**. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$, è facile convincersi che $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = +\infty$, ma se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ non è più così chiaro che cosa succeda con

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \left(\text{forma indeterminata } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Lo stesso si dica del limite $\lim_{x\to x_0} g(x)/f(x)$ quando $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (forma indeterminata $0/0$). Infatti se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

può essere qualunque cosa, o addirittura non esistere.

**Ad esempio**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0, \ \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{8x + x^2}{x} = 8, \ \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} \text{ non esiste,}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} \text{ non esiste.}$$

Abbiamo visto che il rapporto incrementale è una tipica forma indeterminata $0/0$. Altre forme indeterminate (cioè situazioni come quelle appena viste, nelle quali la sola conoscenza del limite delle funzioni $f$ e $g$ non permette di stabilire quanto fa il limite di $g/f$, $f \cdot g$, $f + g$ oppure $g^f$) sono

$$\frac{\infty}{\infty}, \ 0 \cdot \infty, \ \infty - \infty, \ 0^0, \ 1^\infty, \ \infty^0$$

Vediamo qualche esempio importante:

1. Siano $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ddots + a_1 x + a_0$, $a_n > 0$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ddots + b_1 x + b_0, \ b_m > 0$$

Si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad n > m \\ 0 & \text{se} \quad n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se} \quad n = m \end{cases}$$

(Il risultato si ottiene facilmente dividendo numeratore e denominatore per $x^n$)

2.

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

3.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \text{ (vedi paragrafo 1.2)}$$

Quando ne sapremo di più sulle derivate, avremo in mano uno strumento molto utile per le forme indeterminate $0/0$ e $\infty/\infty$.

## 1.6 Successioni

Questo è un buon momento per porre l'attenzione su un tipo particolare di funzioni: le funzioni

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R},$$

cioè le **funzioni definite sui numeri naturali**. Tali funzioni si chiamano **successioni** ed è molto più frequente vederle denotate con la scrittura

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

dove $a_n=f(n)$.

È evidente che per tali funzioni l'unico limite su cui si può investigare è il limite all'infinito; scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \quad (\text{ o semplicemente } \lim_n a_n)$$

Facendo l'opportuna traduzione della definizione di limite in questo particolare caso, si vede che

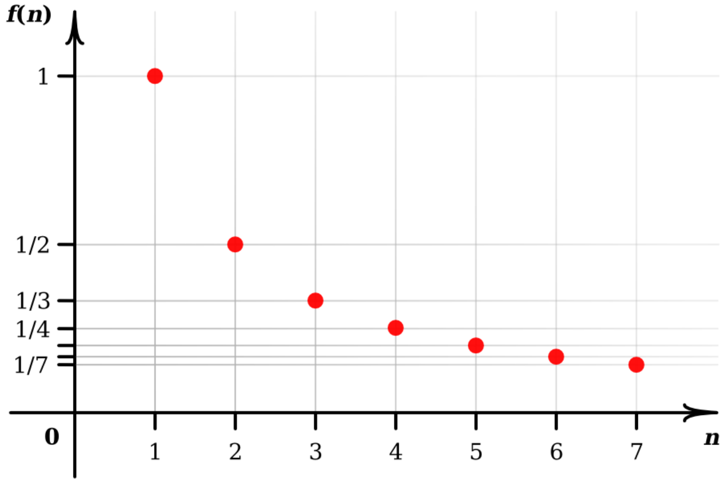
$$\lim_n a_n = l\in\mathbb{R}$$

se e solo se $\forall\epsilon>0\ \exists\overline{n}\in\mathbb{N}$ tale che

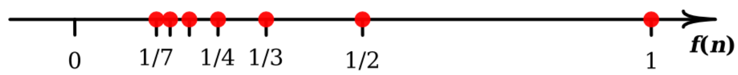
$$|a_n-l|<\epsilon \qquad \forall n\geq\overline{n}$$

(analogamente, $\lim_n a_n=+\infty$ se e solo se...)

Le successioni sono oggetti molto importanti in Analisi Matematica. Può essere comodo (ma questo dipende dalla sensibilità di ognuno) immaginare o descrivere i termini di una successione sull'asse delle $x$ invece che come punti di un grafico; ad esempio, $a_n=1/n$ si può rappresentare in due modi:




**oppure**




### Esempi

1. $a = \dfrac{1}{n}$; $\lim\limits_{n} a_n = 0$

2. $a_n = n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 2\cdot 1$; $\lim\limits_{n} a_n = +\infty$

3. $a_n = n^p$ $(p \in \mathbb{N}$ fissato$)$; $\lim\limits_{n} a_n = +\infty$

4. $a_n = q^n$ $(q>0)$; $\lim\limits_{n} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad q<1 \\ 1 & \text{se} \quad q=1 \\ +\infty & \text{se} \quad q>1 \end{cases}$

5. $a_n = \sqrt[n]{q}$ $(q>0)$; $\lim\limits_{n} a_n = 1$

6. $a_n = \sqrt[n]{n}$; $\lim\limits_{n} a_n = 1$

7. $a_n = \dfrac{q^n}{n^k}$; $\lim\limits_{n} a_n = \begin{cases} 0 & q \le 1 \\ +\infty & q>1 \end{cases}$

8. $a_n = \dfrac{q^n}{n!}$; $\lim\limits_{n} a_n = 0$

9. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

**Attenzione**: qui nel cercare il limite si rischia di fare un errore grossolano, cioè di dire che al crescere di $n$ la quantità $1+\frac{1}{n}$ tende a 1 e quindi si ha $1^n$, che è sempre 1.

Sbagliato! È vero che $1+\frac{1}{n}$ tende decrescendo a 1 quando cresce $n$, ma bisogna tener conto anche del fatto che mentre $1+\frac{1}{n}$ decresce il numero di fattori

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\text{numero di fattori}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

cresce e quindi il risultato non è scontato. Questa è una forma indeterminata e, più precisamente, una forma del tipo $1^\infty$. Nel caso di $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ si può dimostrare che

$$2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

e che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente. Questo permette di avere la certezza che esiste $\lim\limits_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Tale limite viene chiamato **numero di Nepero** e sarà denotato

$$e=\lim_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Il numero $e$ ci farà compagnia per tutto il corso.

OSSERVIAMO che ad esempio la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ è ancora una forma indeterminata $1^\infty$, ma in questo caso

$$\lim_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=+\infty$$

.

Bene, è arrivato ora il momento di introdurre il concetto di derivata.

# Capitolo 2

# Derivata

## 2.1 Derivata e sue proprietà

Se guardiamo il grafico di una funzione (continua e senza spigoli) ci accorgiamo che sarebbe in generale estremamente utile identificare i tratti "in salita" e i tratti "in discesa", ma per questo abbiamo bisogno di una definizione di "pendenza del grafico in un punto".

Se la funzione è un polinomio di primo grado, cioè se

$$f(x) = mx + q \ ,$$

il grafico è una retta e la risposta è facilissima: la pendenza del grafico (in senso "stradale": rapporto tra quanto si sale e quanto ci si sposta in orizzontale) è data dal **coefficiente angolare** $m$. In sostanza, per chi si sposta da sinistra verso destra, se $m > 0$ il grafico è in "salita", se $m = 0$ è "piano" e se $m < 0$ è in "discesa".

Se prendiamo però una funzione il cui grafico non sia una retta, la pendenza non sarà più costante ma potrà cambiare da punto a punto.

Se prendiamo sulla retta reale due punti $x_0$ ed $x_0 + h$ abbastanza vicini, è ragionevole pensare che la "pendenza" del grafico di $f$ in $x_0$ sia vicina alla pendenza della retta che passa per i due punti corrispondenti sul grafico $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Tale pendenza è data dall'espressione

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ ,$$

detta **rapporto incrementale**.

È ragionevole pensare che prendendo $h$ sempre più piccolo (e quindi i due punti sempre più vicini) avremo un'approssimazione sempre migliore della pendenza del grafico di $f$ nel punto $(x_0, f(x_0))$.

**Definizione.** *La pendenza del grafico di $f$ per $x = x_0$ si chiama* ***derivata*** *di $f$ in $x_0$ e si indica con $f'(x_0)$ oppure con $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ oppure $\dfrac{df}{dx}(x_0)$. Tale pendenza è definita da*

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} \;, \quad \textit{(purché il limite esista e sia finito)}$$

*Se il limite non esiste o è infinito, non è definita la pendenza e diciamo che la funzione non è derivabile in $x_0$. Se $f'(x_0)$ esiste, la* ***retta tangente*** *al grafico di $f$ per $x = x_0$ sarà la retta passante per $(x_0, f(x_0))$ la cui pendenza coincide con quella del grafico stesso: essa avrà dunque equazione:*

$$\boxed{y = f'(x)(x - x_0) + f(x)}$$

Vediamo subito con un esempio l'utilità (e la potenza) della nozione di derivata. Consideriamo la funzione

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1;$$

si tratta di un polinomio di terzo grado, che non è di per se stesso troppo complicato, ma il cui grafico non è semplice da indovinare.

Calcoliamo il rapporto incrementale di $f$ tra $x_0$ e $x_0 + h$: troviamo

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{4(x_0+h)^3-6(x_0+h)^2+1-\left(4x^3-6x^2+1\right)}{h} \\
&= \frac{\cancel{4x_0^3}+12x_0^2h+12x_0h^2+4h^3-\cancel{6x_0^2}-6h^2-12x_0h+\cancel{1}-\cancel{4x_0^3}+\cancel{6x_0^2}-\cancel{1}}{h} \\
&= \frac{12x_0^2h+12x_0h^2+4h^3-6h^2-12x_0h}{h} \\
&= 12x_0^2 + 12x_0h + 4h^2 - 6h - 12x_0 \text{ e quindi}
\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 12x_0^2 - 12x_0 = 12x_0(x_0 - 1);$$

$$\text{cioè} \qquad f'(x_0) = 12x_0(x_0 - 1)\;\; \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

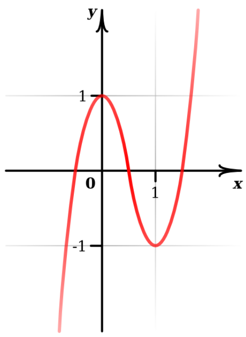
Studiando il segno di questa derivata scopriamo che il grafico di $f$ è in “salita” per $x_0 < 0$, in “discesa” tra 0 e 1 e di nuovo in “salita” per $x_0 > 1$.

Se calcoliamo

$$f(0) = 1,\; f(1) = -1$$

e osserviamo che

$$\lim_{x_0\to -\infty} f(x) = -\infty, \;\; \lim_{x_0\to +\infty} f(x) = +\infty,$$




possiamo tracciare un grafico ragionevolmente preciso di $f$. Vediamo di formalizzare queste idee, dimostrando che

$$f'(x) = 0\, \forall x \in (a,b) \;\text{ implica } f \text{ costante in } \;(a,b)$$

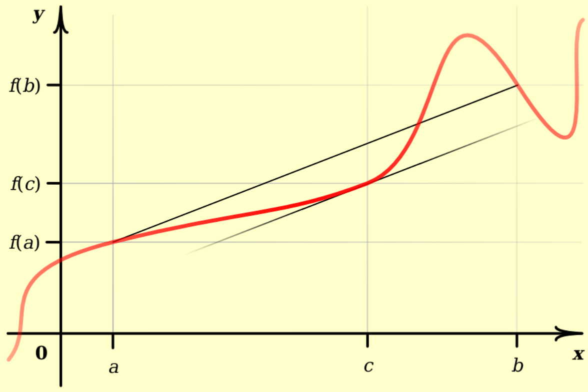
e che

$$f'(x) > 0 \, \forall x \in (a, b) \text{ implica } f \text{ strettamente crescente in } (a, b) .$$

Sono infatti molto naturali, ma non di semplice dimostrazione. Per fare ciò premettiamo un risultato molto importante.

**Teorema** (Teorema del valore medio differenziale (o di Lagrange))**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, $f$ derivabile in $(a, b)$. Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che*

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)}$$




L'idea geometrica del teorema è semplice: afferma l'esistenza di un punto $c \in (a, b)$ dove $f$ ha pendenza uguale alla pendenza della retta che congiunge i punti $(a, f(a))$, $(b, f(b))$: Noi ne dimostreremo il seguente caso particolare:

**Teorema** (Teorema di Rolle)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, $f$ derivabile in $(a, b)$ e tale che $f(a) = f(b)$. Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.*

**Dimostrazione.** Il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di massimo $M$ e di minimo $m$ di $f$ in $[a, b]$. Se $M = m$ allora $f$ è costante e quindi $f'(x) = 0 \, \forall x \in (a, b)$. Se $m < M$ e $f(x_m) = m$, $f(x_M) = M$, allora almeno uno dei punti $x_m$, $x_M$ è interno ad $(a, b)$. Supponiamo ad esempio che sia $x_m$ interno ad $(a, b)$ e vediamo che allora $f'(x_m) = 0$. Infatti, poiché $f(x_m) \le f(x_m + h) \, \forall h$ abbastanza piccolo, risulta

$$h > 0 \Rightarrow \frac{f(x_m + h) - f(x_m)}{h} \ge 0 \Rightarrow \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_m + h) - f(x_m)}{h} \ge 0$$

$$h < 0 \Rightarrow \frac{f(x_m + h) - f(x_m)}{h} \le 0 \Rightarrow \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_m + h) - f(x_m)}{h} \le 0$$

e quindi

$$0 \le f'(x_m) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_m + h) - f(x_m)}{h} \le 0,$$

da cui $f'(x_m) = 0$. Basta quindi prendere $c = x_m$ e si ha la tesi.
Il caso $x_M$ interno ad $(a, b)$ si affronta in modo analogo. □

**Osservazione** Per inciso abbiamo dimostrato che, se $x_m$ è un punto di minimo interno ad $[a, b]$, allora $f'(x_m) = 0$ (ragionamento analogo se fosse stato un punto di massimo). Teniamolo presente quando ci dedicheremo alla ricerca di punti di massimo e minimo interni ad un intervallo $[a, b]$: se la funzione è derivabile, in tali punti la fuzione dovrà avere derivata nulla.

**Corollario** (del teorema di Lagrange).

| | | | |
|---|---|---|---|
| *L1)* | $f'(x) = 0 \, \forall x \in (a, b)$ | $\Rightarrow$ | $f(x)$ *è costante in* $(a, b)$ |
| *L2)* | $f'(x) > 0 \, \forall x \in (a, b)$ | $\Rightarrow$ | $f(x)$ *è strettamente crescente in* $(a, b)$ |
| *L3)* | $f'(x) \geq 0 \, \forall x \in (a, b)$ | $\Rightarrow$ | $f(x)$ *è crescente in* $(a, b)$ |
| *L4)* | $f'(x) = g'(x) \; \forall x \in (a, b)$ | $\Rightarrow$ | $f(x) - g(x)$ *è costante in* $(a, b)$ |

In $L2$), anche se $f$ è derivabile, non vale il viceversa: si pensi ad esempio ad $x^3$

**Dimostrazione.** L1) $\forall x_1, x_2 \in (a, b) \; \exists c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

e quindi $f(x_2) - f(x_1) = 0 \forall x_1, x_2 \in (a, b)$, cioè $f(x_2) = f(x_1) \forall x_1, x_2 \in (a, b)$ e quindi $f$ è costante in $(a, b)$.

L2) Siano $x_1, x_2 \in (a, b)$ $x_1 < x_2$, sia $c \in (x_1, x_2)$ tale che $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$; ma allora, poiché $x_2 - x_1 > 0$ , deve essere anche $f(x_2) - f(x_1) > 0$, cioè $f(x_2) > f(x_1)$.

L3) Allo studente.

L4) Risulta $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0 \; \forall x \in (a, b)$ quindi, per L1), $f(x) - g(x) = k$ (costante) $\forall x \in (a, b)$ ; cioè $f(x) = g(x) + k \forall x \in (a, b)$. □

Calcoliamo ora la derivata di alcune funzioni. Al momento l'unico strumento che abbiamo a disposizione è la definizione, ma tra poco, quando avremo visto le principali proprietà della derivazione, molti calcoli risulteranno più semplici.

1. La derivata di $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{- x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

2. La derivata di $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h - x)\left[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2\right]}{h} = \lim_{h \to 0} \left[(x+h)^2 + (x+h)x + x^2\right] = 3x^2$$

3. In generale, si ha

$$(x^p)' = px^{p-1} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

4. La derivata di $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \forall x > 0$$

5. In generale si ha

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \ \forall x > 0 \ , \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

6. Le derivate di $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \Big[ \sin x \underbrace{\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right)}_{\substack{\downarrow \ x\to x_0 \\ 1}} + \underbrace{\frac{\sin h}{h}\cos x}_{\substack{\downarrow \ x\to x_0 \\ 0}} \Big] = \cos x \ , \end{aligned}$$

cioè $(\sin x)' = \cos x$

Analogamente si calcola $(\cos(x))' = -\sin(x)$

7.

$$\text{Sia } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo $f'(0)$; si ha
$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$, cioè $f'(0) = 0$. Per il calcolo di $f'(x)$ per $x \neq 0$ aspettiamo di avere qualche strumento in più.

Vediamo ora un risultato semplice ma importante e di seguito un elenco di proprietà relative all'operazione di derivazione (una sorta di algebretta, come abbiamo fatto per i limiti).

**Teorema.** *Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in (a,b)$, allora $f$ è anche continua in $x_0$.*

**Dimostrazione.** Dobbiamo vedere che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, cioè che $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$; basta osservare che

$$\lim_{h\to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

□

Osserviamo che il viceversa non è vero; $f(x) = |x|$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$, ma non è derivabile in $x = 0$.

**Proprietà delle derivate.** Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in (a, b)$. Allora:

1. $f + g$ è derivabile in $x_0$ e si ha $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $f \cdot g$ è derivabile in $x_0$ e si ha $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. se inoltre $g(x_0) \neq 0$ allora $\dfrac{f}{g}$ è derivabile in $x_0$ e si ha $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

**Dimostrazione.** Dimostriamo la seconda, mentre la prima e la terza sono lasciate al lettore. Si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0) + f(x_0+h)\, g(x_0) - f(x_0+h)\, g(x_0)}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)\,[g(x_0+h) - g(x_0)] + g(x_0)\,[f(x_0+h) - f(x_0)]}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} f(x_0+h)\, \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x_0)\, \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \\
&= f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)
\end{aligned}$$

□

**Esempio.** Usiamo la terza proprietà per calcolare la derivata di $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$; si ha

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

cioè

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Osserviamo, poichè $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, che può essere comoda anche la scrittura

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

C'è un'altra proprietà molto importante perché insieme alle tre precedenti permette di calcolare miriadi di derivate senza usare la definizione.

**Teorema** (Derivata di una funzione composta (regola della catena)). *Sia $f$ definita in un intorno di $x$, derivabile in $x$, e sia $g$ una funzione definita in un intorno di $y = f(x)$, derivabile in $y$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in $x$ e si ha*

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

**Esempi**

Calcoliamo la derivata di $\sin\left(x^2\right)$. Ponendo $f(x) = x^2$ e $g(y) = \sin y$, risulta

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = \sin\left(x^2\right)$$

Applicando quindi la regola della catena si ottiene

$$\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = g'\left(x^2\right) \cdot f'(x) = \cos\left(x^2\right) \cdot 2x$$

Se volessimo calcolare invece la derivata di $(\sin x)^2$, ponendo $f(x) = \sin x$ , $g(y) = y^2$, risulterebbe

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = (\sin x)^2$$

Applicando quindi la regola della catena si otterrebbe

$$\left((\sin x)^2\right)' = g'(\sin x) \cdot f'(x) = 2 \sin x \cos x$$

Allo stesso modo si può ottenere

$$\left(\tan\left(x^3\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2(x^3)} \cdot 3x^2 \quad , \quad \left((\tan x)^3\right)' = 3(\tan x)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Con il tempo non sarà più necessario introdurre le funzioni $f, g$, ma il calcolo verrà automatico, ad esempio

$$\left((x + \sin x)^5\right)' = 5(x + \sin x)^{5-1} \cdot (x + \sin x)' = 5(x + \sin x)^4 (1 + \cos x)$$

**Osservazione** La formula della derivata di una funzione composta si chiama regola della catena perchè vale anche per la composizione di tre o più funzioni. Più formalmente, si ha

$$(h \circ g \circ f)'(x) = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$(z \circ h \circ g \circ f)'(x) = z'(h(g(f(x))))h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

e così via.........

## 2.2 Logaritmo ed esponenziale

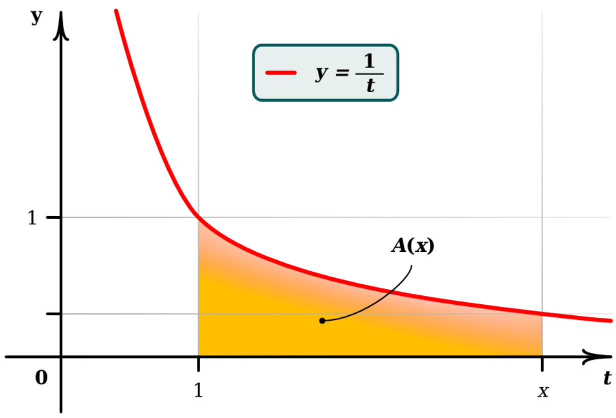
È arrivato il momento di introdurre due nuove funzioni che, insieme ai polinomi e alle funzioni trigonometriche, sono l'asse portante del nostro corso.

Se scriviamo la tabella delle derivate delle potenze

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\dots$ | $\dots$ |
| $\frac{x^4}{4}$ | $x^3$ |
| $\frac{x^3}{3}$ | $x^2$ |
| $\frac{x^2}{2}$ | $x$ |
| $x$ | $1$ |
| $-\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{x^2}$ |
| $-\frac{1}{2x^2}$ | $\frac{1}{x^3}$ |
| $-\frac{1}{3x^3}$ | $\frac{1}{x^4}$ |
| $\dots$ | $\dots$ |

Salta subito all'occhio che nella colonna destra manca la funzione $\frac{1}{x}$. Questo è dovuto al fatto che nessuna funzione del tipo $f(x) = ax^p$, $a \in \mathbb{R}$, può avere come derivata $\frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$, infatti dovrebbe essere

$$(ax^p)' = pax^{p-1} = x^{-1} \qquad \forall x \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad pax^p = 1 \qquad \forall x \neq 0 \text{ è impossibile.}$$




Siamo quindi interessati a trovare una funzione $L(x)$ tale che

$$L'(x) = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$$

(cioè $L$ è quello che abbiamo chiamato **primitiva** di $\frac{1}{x}$).

Definiamo, per $x > 0$,

$$L(x) = \begin{cases} \text{area}\left\{(t, y) : 1 \leq t \leq x, `0 \leq y \leq \dfrac{1}{t}\right\} & \text{per } x \geq 1 \\ -\text{area}\left\{(t, y) : x \leq t \leq 1, `0 \leq y \leq \dfrac{1}{t}\right\} & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

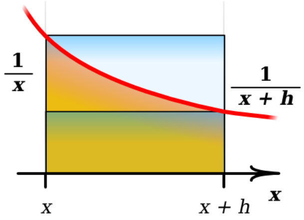
o con scrittura più breve

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad (x > 0)$$

(tenendo conto della convenzione che, se $x < 1$, allora $\int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_x^1 \frac{dt}{t}$)

Sia $x \geq 1$; per $h > 0$ si ha

$$h\frac{1}{x+h} < L\left(x+h\right) - L\left(x\right) < h\frac{1}{x}$$



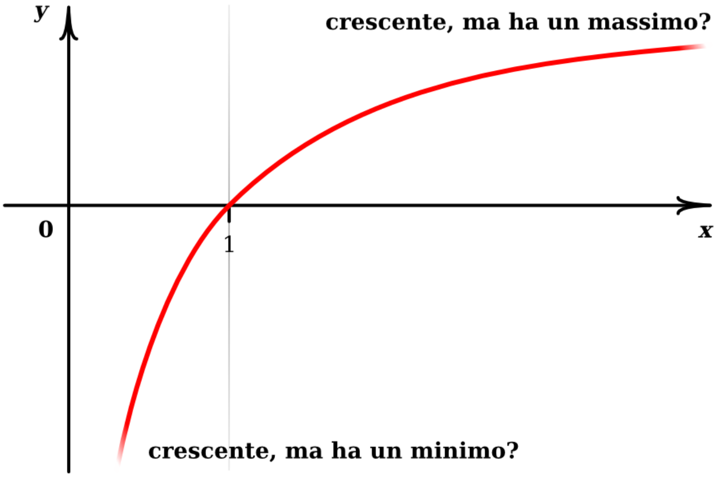

e quindi

$$\frac{1}{x+h} < \frac{L\left(x+h\right) - L\left(x\right)}{h} < \frac{1}{x}, \text{ da cui}$$

$\boxed{L'\left(x\right) = \frac{1}{x}}$ (per $h < 0$ e per $0 < x < 1$ si procede in modo analogo)

Studio della funzione $y = L\left(x\right)$, $x > 0$.

| | |
|---|---|
| $L(1) = 0$ | $L'(x) = \frac{1}{x} > 0$ quindi $L$ crescente e concava |
| $L(x) > 0$ se $x > 1$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} L'(x) = 0$ |
| $L(x) < 0$ se $x < 1$ | $\lim\limits_{x \to 0} L'(x) = +\infty$ |




Ci si chiede fino a dove cresca la funzione al tendere di $x$ a $+\infty$ e fino a dove decresca al tendere di $x$ a 0. Per rispondere a queste domande dimostriamo la proprietà fondamentale di questa funzione $L$.

**Teorema** (proprietà fondamentale della funzione $L$).

$$L\left(a \cdot b\right) = L\left(a\right) + L\left(b\right) \qquad \forall a > 0,\ b > 0$$

**Dimostrazione.** Poniamo $G(x) = L(ax)$ e calcoliamo $G'(x)$:

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{L(a(x+h)) - L(ax)}{h} = a\frac{L(ax+ah) - L(ax)}{ah} =$$

$$\overset{\substack{z=ax\\k=ah}}{=} a\frac{L(z+k) - L(z)}{k} \xrightarrow{h\to 0\Rightarrow k\to 0} aL'(z) = a\frac{1}{z} = a\frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$

Quindi $G'(x) = L'(x)\ \forall x > 0$. Ma allora esiste una costante $K$ tale che

$$G(x) = L(x) + K\ \forall x > 0,$$

cioè

$$L(ax) = L(x) + K\ \forall x > 0;$$

prendendo $x = 1$ si ottiene $L(a) = L(1) + K = K$ e quindi

$$L(ax) = L(x) + L(a)\ \ \forall x > 0,$$

□

Possiamo adesso dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} L(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0, x>0} L(x) = -\infty$$

Infatti, reiterando la proprietà precedente, si ottiene

$$L(2^n) = nL(2) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

e, poiché $L(2) > 0$, si ha subito che $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$. Notando poi che

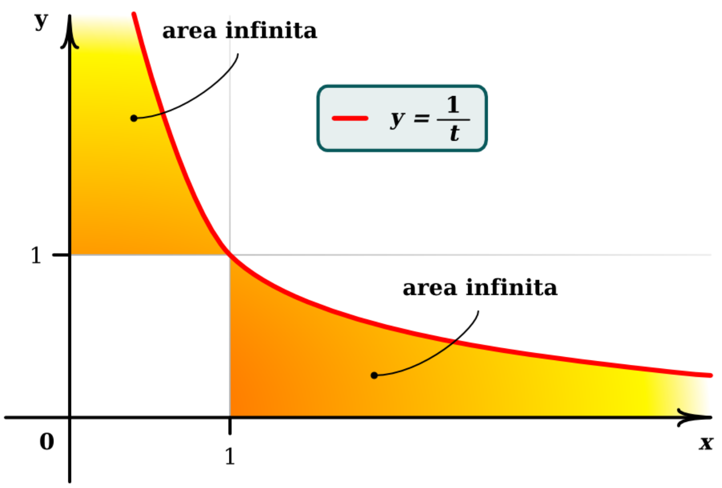
$$0 = L(1) = L(2^n \cdot 2^{-n}) = L(2^n) + L(2^{-n})$$

e quindi che

$$L(2^{-n}) = -nL(2),$$

si ottiene subito che $\lim\limits_{x\to 0, x>0} L(x) = -\infty$.

Il significato geometrico di questi due limiti è indicato nella figura seguente:



**Definizione.** *si definisce il numero* **e (di Nepero)** *il numero tale che*

$$L(e) = 1$$

Naturalmente dobbiamo dimostrare che tale numero $e$ coincide con con il numero $e$ introdotto nel paragrafo 1.6. Ed infatti

$$L\left(\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_n L\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_n \left(nL\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) =$$
$$= \lim_n \frac{L\left(1+\frac{1}{n}\right) - L(1)}{\frac{1}{n}} = L'(1) = 1.$$

D'ora in poi useremo la notazione standard

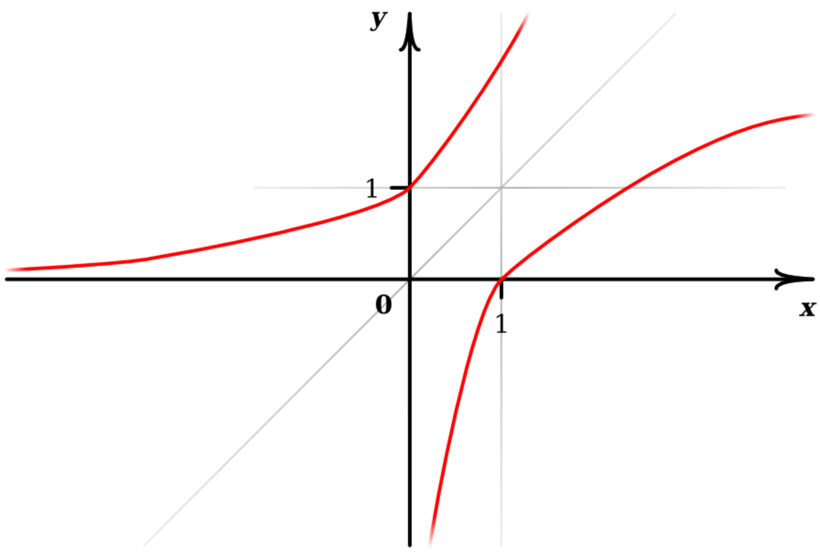
$$L(x) = \log(x)$$

e chiameremo la nostra funzione **logaritmo** di $x$.

Poiché $\log(x)$ è una funzione strettamente crescente e continua, sappiamo che è invertibile, con inversa continua. Denoteremo con $E$ tale funzione, che è caratterizzata da

$$E(\log(x)) = x, \qquad \forall x > 0$$
$$\log(E(x)) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$

I grafici delle funzioni $E(x)$ e $\log(x)$ sono, come sappiamo, simmetrici rispetto alla retta $y = x$ e quindi abbiamo la situazione in figura:




Abbiamo in particolare che $\mathbf{E(1)} = \mathbf{E}(\log \mathbf{e}) = \mathbf{e}$

Calcoliamo la derivata di $E(x)$:

$$\frac{E(x+h) - E(x)}{h} \overset{\substack{x+h=\log b \\ x=\log a}}{=} \frac{E(\log b) - E(\log a)}{\log b - \log a} = \frac{b-a}{\log b - \log a} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\log b - \log a}{b-a}} \xrightarrow{h\to 0 \Rightarrow b \to a} \frac{1}{\log' a} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = a = E(x),$$

quindi

$$E'(x) = E(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ora, dalla proprietà fondamentale del logaritmo

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \qquad \forall x > 0,\ y > 0$$

segue la proprietà fondamentale della funzione $E$:

**Teorema** (proprietà fondamentale della funzione $E$)**.**

$$E(a+b) = E(a) \cdot E(b), \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

DIMOSTRAZIONE. Posto $a = \log(x)$, $b = \log(y)$, si ha

$$E(a+b) = E(\log(x) + \log(y)) = E(\log(xy)) = xy = E(a) \cdot E(b)$$

□

Reiterando questa proprietà si ottiene subito che

$$E(n) = [E(1)]^n = e^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e con qualche piccola fatica in più, si può dimostrare che

$$E(q) = e^q \qquad \forall q \in \mathbb{Q}$$

Questo suggerisce la seguente

**Definizione** (esponenziale)**.** *Definiamo*

$$e^x = E(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

*La funzione $e^x$ si chiama **funzione esponenziale**.*

Notiamo che tale definizione lo è, effettivamente, solo per $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

NOTA: la funzione $\log(x)$ si chiama anche **logaritmo in base e** di $x$ o **logaritmo naturale** di $x$ e si denota a volte con $\log_e(x)$ o $\ln(x)$.

Riassumendo, abbiamo introdotto due nuove funzioni

$$\log(x) \ \text{ ed } e^x$$

con le seguenti proprietà

| | |
|---|---|
| $\log : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ | $exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$ |
| $\log\left(e^{x}\right) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$ | $e^{\log(x)} = x \qquad \forall x > 0$ |
| $\log\left(a \cdot b\right) = \log\left(a\right) + \log\left(b\right)$ | $e^{a+b} = e^{a} \cdot e^{b}$ |
| $\left(\log x\right)' = \dfrac{1}{x}$ | $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log^{p}\left(x\right)}{\sqrt[n]{x}} = 0 \qquad \forall n,p \in \mathbb{N}$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{p}}{e^{x}} = 0 \qquad \forall p \in \mathbb{N}$ |

Le ultime due proprietà riguardanti i limiti di forme indeterminate date dal rapporto tra logaritmo e radici e tra esponenziale e potenze sono molto importanti e con pazienza si potrebbero dimostrare con disuguaglianze opportune e con l'uso del teorema dei carabinieri. Noi invece le dimostreremo usando un teorema estremamente utile (teorema di De L'Hôpital) anche in molte altre occasioni per il calcolo delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

## 2.3 Approfondimenti sulle derivate

**Teorema** (teorema di De L'Hôpital). *Siano $f, g$ due funzioni derivabili in un intorno di $x_0$. Supponiamo che sia $g'\left(x\right) \neq 0$ in tale intorno e che*

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = \lim_{x\to x_0} g\left(x\right) = 0 \qquad \textit{oppure} \qquad \lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = \lim_{x\to x_0} g\left(x\right) = \infty$$

*Se esiste (finito o infinito) il limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$, allora esiste anche il limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ e si ha*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}}$$

*Il teorema è vero anche se $x_0 = \pm\infty$.*

Non dimostreremo questo teorema ma lo applichiamo per dimostrare, ad esempio, che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se volessimo dimostrare che, ad esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2}}{e^{x}} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\log x\right)^{2}}{x^{\frac{1}{10}}} = 0$$

basterà applicare due volte il teorema di De L'Hôpital; si ha infatti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^2}{x^{\frac{1}{10}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\log x\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{10}x^{\frac{1}{10}-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{20\log x}{x^{\frac{1}{10}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{20\frac{1}{x}}{\frac{1}{10}x^{\frac{1}{10}-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{200}{x^{\frac{1}{10}}}=0$$

Calcoliamo $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x(\log x)^2$, $n\in\mathbb{N}$; scrivendo questo limite nella forma $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{(\log x)^2}{\frac{1}{x}}$, siamo ricondotti ad una forma $\frac{\infty}{\infty}$ e possiamo applicare la regola di De L'Hôpital; risulta

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x(\log x)^2=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{(2\log x)\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=-2\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=2\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x=0$$

In questo modo si può dimostrare che in generale vale

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}x^p(\log x)^k=0\quad\forall p,k\in\mathbb{N}$$

Per concludere il discorso su logaritmo ed esponenziale, definiamo un'altra funzione, detta **esponenziale generale** o **esponenziale di base** $a$. Sia $a>0$; poiché $a=e^{\log(a)}$, risulta naturale definire

$$\boxed{a^x=\left(e^{\log(a)}\right)^x=e^{x\log(a)}}$$

Le seguenti proprietà sono conseguenza immediata delle definizioni e delle proprietà di $e^x$:

1. $\log(a^x)=\log\left(e^{x\log(a)}\right)=x\log(a)$
2. $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$
3. $(a^x)^y=a^{xy}$
4. $(a^x)'=a^x\log(a)$

   Dimostriamo quest'ultima: per $a\neq1$ abbiamo

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\frac{a^h-1}{h}=a^x\frac{e^{h\log(a)}-e^0}{h}=$$

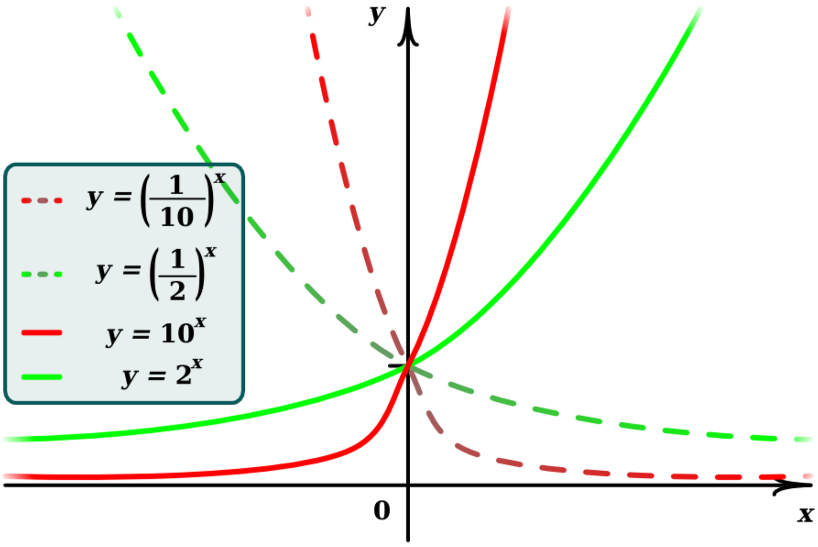
$$=a^x\log(a)\frac{e^{h\log(a)}-e^0}{h\log(a)}\xrightarrow{h\to0}a^x\log(a)\left(e^x\right)'\Big|_{x=0}=a^x\log(a)$$

   Se invece $a=1$ abbiamo $a^x=1\ \forall x$ e la proprietà è banalmente dimostrata.

Notiamo che

$$a > 1 \implies a^x \text{ è strettamente crescente}$$

$$a < 1 \implies a^x \text{ è strettamente decrescente}$$




Se $a > 0$, $a \neq 0$, la funzione $a^x$ è invertibile; la sua inversa si chiama **logaritmo in base** $a$ di $x$ e si indica con $\log_a(x)$.

Bene, ora che abbiamo a disposizione una buona quantità di funzioni con le loro proprietà (polinomi, trigonometriche, logaritmo e le loro inverse), ed abbiamo fatto una considerevole mole di conti, osservazioni *et similia*, possiamo scrivere qui di seguito un piccolo *vademecum* per lo studio di una qualsiasi funzione costruita sommando, moltiplicando, componendo tali funzioni.

Prima di fare questo schemino, introduciamo i concetti di massimo e minimo relativi (o locali).

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$; un punto $x_0 \in (a, b)$ si dice **punto di massimo relativo** per $f$ se esiste un intorno $I_{x_0}$ di $x_0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in I_{x_0}$$

Il valore $f(x_0)$ si dice **massimo relativo** di $f$.

Analogamente si definiscono un **punto di minimo relativo** e un **minimo relativo** .

Quando in futuro studieremo una funzione, saremo interessati alla ricerca del suo massimo e del suo minimo assoluti o globali, dei suo massimi e minimi relativi o locali, della sua "curvatura" (convessità o concavità), dei suoi eventuali asintoti, ecc. ecc.

Cominciamo con lo studiare una funzione continua definita in un intervallo chiuso $[a, b]$,

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

Il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza del massimo e del minimo assoluti. Se ci sono punti dove la funzione non è derivabile, tali punti vanno studiati a parte, assieme agli estremi $x = a$ e $x = b$. Per quanto riguarda gli altri punti, si cercheranno quelli dove $f'(x) = 0$, detti **punti critici**. Lo studio del segno della derivata dirà se sono punti di massimo o minimo relativi oppure se sono punti cosiddetti di **sella**, cioè punti dove cambia la curvatura. La curvatura sarà data dalla crescenza (convessità) o decrescenza (concavità) della derivata. Un'osservazione utile: la crescenza o decrescenza della derivata è data a sua volta dal segno della sua derivata, cioè dal segno di quella che si chiama **derivata seconda**, che si denota con $f''(x)$.

Riassumendo possiamo dire

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ è un punto di minimo relativo}$$

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ è un punto di massimo relativo}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) = (f'')'(x_0) \neq 0 \end{array}\right\} \implies x_0 \text{ è un punto di sella (a tangente orizzontale).}$$

Una volta individuati tali punti, non rimane che il confronto con gli eventuali punti di non derivabilità e con gli estremi $x = a$, $x = b$ dell'intervallo.

Chiaramente se la funzione è definita in un intervallo che non è chiuso e limitato, il teorema di Weierstrass non è più applicabile e non è detto che la funzione abbia massimo e/o minimo assoluto: potrebbe essere superiormente o inferiormente illimitata. Supponiamo ad esempio di avere $f$ definita in $(a, b]$ (o in $(-\infty, b]$); per verificarne la limitatezza o meno di $f$ bisogna studiare

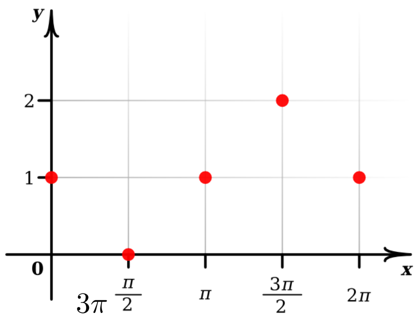
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Facciamo un paio di esempi.

### Esempio 1

Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 - \sin(x)$. Si ha $f(0) = 1$, $f(2\pi) = 1$. In generale, se ci sono punti in cui è facile calcolare il valore della funzione, vale la pena farlo. Qui ad esempio si ha

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ f(\pi) = 2,\ f\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 2$$




Calcoliamo i punti dove $f'(x) = 0$; deve essere

$$-\cos(x) = 0 \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3\pi}{2}$$

Questi sono punti candidati ad essere di massimo o minimo locale. Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\cos(x) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ oppure } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

Questo significa che $f$ decresce in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ e cresce in $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; se ne deduce che $\frac{\pi}{2}$ è punto di minimo relativo, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\frac{3\pi}{2}$ è punto di massimo relativo, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$. Poiché non ci sono punti di non derivabilità, resta solo confrontare questi valori con $f(0)$ ed $f(2\pi)$; si ha

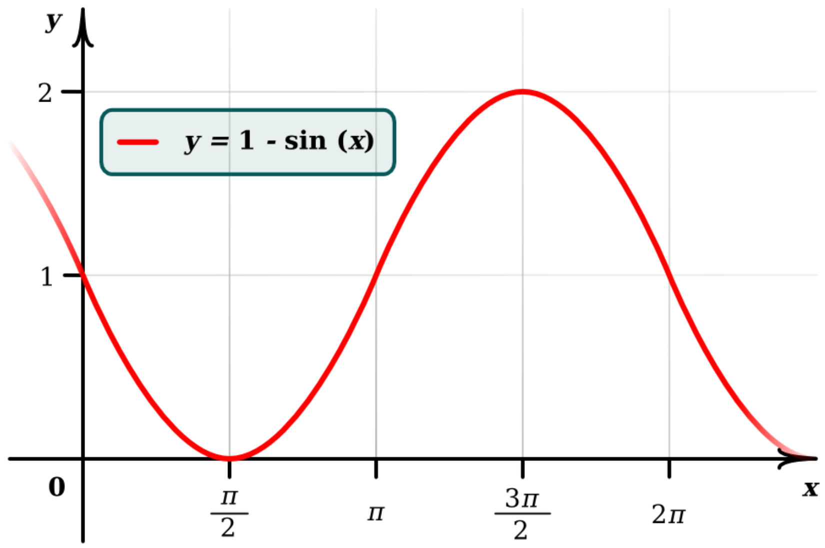
$$0 < f(0) = 1 < 2 \qquad \text{ed} \qquad 0 < f(2\pi) = 1 < 2$$

e quindi $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ sono punti di minimo e massimo assoluto per la funzione $f$, il valore minimo è 0, mentre il valore massimo è 2. Per finire, studiamo la curvatura di $G(f)$: si ha

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (-\cos(x))' = \sin(x),$$

quindi $f'$ cresce dove $\sin(x) > 0$, cioè in $0 < x < \pi$, e decresce dove $\sin(x) < 0$, cioè in $\pi < x < 2\pi$. Si avrà dunque che $f$ è convessa in $[0, \pi]$ e concava in $[\pi, 2\pi]$. Possiamo disegnare adesso il grafico di $f$ in maniera accurata, magari dopo aver anche guardato a che cosa tende la sua derivata quando $x$ si avvicina agli estremi dell'intervallo:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-\cos(x)) = -1, \qquad \lim_{\substack{x\to 2\pi\\ x<2\pi}} (-\cos(x)) = -1$$




**Esempio 2**

Sia $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} & \text{in } -1 \leq x \leq 0 \\ x & \text{in } 0 < x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{in } x > 1 \end{cases}$$

La prima cosa da fare è guardare dove si raccordano le tre diverse espressioni di $f$, cioè i punti $x = 0$ e $x = 1$. Si vede subito che

$$\frac{1}{2} = f(0) \neq \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0,$$

quindi $f$ non è continua in $x = 0$ (e a maggior ragione non è derivabile in $x = 0$). Si vede anche subito che

$$1 = f(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(-x^2 + 4x - 2\right) = 1$$

e quindi $f$ è continua in $x = 1$. Poi vedremo che in $x = 1$ la $f$ non è derivabile.

In ognuno degli intervalli $[-1, 0]$ e $(0, 1]$ il grafico di $f$ è costituito di segmenti di retta, quindi non ci sono da cercare punti critici, ma solo da osservare che

$$f(-1) = 1, \; f(0) = \frac{1}{2}, \; \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0, \; f(1) = 1$$

Studiamo $f(x)$ in $(1, +\infty)$:

$$f'(x) = -2x + 4 = \begin{cases} > 0 & \text{per } x < 2 \\ = 0 & \text{per } x = 2 \\ < 0 & \text{per } x > 2 \end{cases} ;$$

se ne deduce che $x = 2$ è un punto di massimo relativo, $f(2) = 2$.

Vediamo ora se la funzione è derivabile in $x = 1$. Si ha, usando la regola di De L'Hôpital,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = 1,$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (-2x + 4) = 2 \neq 1$$

e quindi $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ non esiste, cioè $f$ non è derivabile in $x = 1$.

Vediamo come si comporta la $f$ quando $x \to +\infty$. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^2 + 4x - 2\right) = \lim_{x \to +\infty} \left[-x\left(x + 4 + \frac{2}{x}\right)\right] = -\infty$$

Vediamo dove $G(f)$ interseca l'asse delle $x$; deve essere

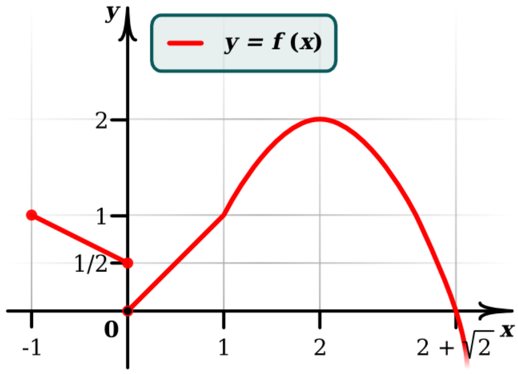
$$-x^2 + 4x - 2 = 0 \qquad \text{e quindi} \qquad x = 2 \pm \sqrt{2}$$

e poiché deve essere $x > 1$, avremo $x = 2 + \sqrt{2}$.

Infine, studiamo la curvatura di $G(f)$ in $(1, +\infty)$,

$$f''(x) = (-2x + 4)' = -2 < 0 \;\Rightarrow\; G(f) \text{ è concavo.}$$

Riassumendo lo studio fatto si ricava che $x = 2$ è un punto di massimo assoluto, valore massimo $f(2) = 2$, e poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, la $f$ non ha minimo. Inoltre $f$ è lineare a tratti in $[-1, 1]$ e concava per $x > 1$. Possiamo adesso disegnare il grafico di $f$ (vedi figura).




**Osservazione**: lo studio di funzione è importante anche per la ricerca di soluzioni di equazioni. Se volessimo sapere quante soluzioni ha ad esempio l'equazione

$$3\log(x) = 3x^2 + 1 \ ,$$

la strada da percorrere sarebbe quella di studiare le due funzioni $3\log(x)$ , $3x^2 + 1$ e vedere dove si incontrano, oppure, spesso più semplice, poichè l'equazione è equivalente all'equazione

$$f(x) = 3\log(x) - 3x^2 - 1 = 0$$

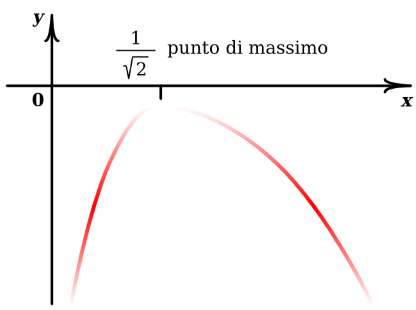
studiare la la funzione $f(x)$ per vedere se $G(f)$ incontra l'asse delle $x$. Facciamolo. Intanto notiamo che $f$ è definita solo per $x > 0$ e che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-x^2\left(3 + \frac{1}{x^2} - 3\frac{\log(x)}{x^2}\right)\right] = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$$

Inoltre $f'(x) = \dfrac{3}{x} - 6x = \dfrac{3}{x}\left(1 - 2x^2\right)$ e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & \text{per } 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ = 0 & \text{in } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ < 0 & \text{per } x > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$




Risulta allora chiaro che

$$\left[\begin{array}{l} \text{se } f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0 \text{ ci sono due soluzioni} \\ \text{se } f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \text{ c'è un'unica soluzione} \\ \text{se } f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0 \text{ non ci sono soluzioni} \end{array}\right.$$

Ora $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - 3\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 =$
$-3\log\left(\sqrt{2}\right) - \dfrac{3}{2} - 1 < 0$ perché $\log\left(\sqrt{2}\right) > \log(1) = 0$. Quindi $\nexists$ soluzione dell'equazione $3\log(x) = 3x^2 + 1$.

Conviene precisare che spesso in matematica è già molto importante sapere se un'equazione ha o meno soluzioni, e se ne ha, quante sono, prima di affrontare eventualmente il problema di trovare il loro valore numerico.

INSERIRE DISCORSETTO DI EQUAZIONI CON PARAMETRI e CONFRONTO TRA FUNZIONI per risolvere DISEQUAZIONI

È arrivato il momento di formalizzare un concetto che peraltro abbiamo già abbondantemente usato: il concetto di area e di integrale.

# Capitolo 3

# Integrazione

## 3.1 Significato e definizione di integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa, cioè

$$f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [a, b]$$

Vogliamo definire l'area dell'insieme

$$S(f) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Siano $x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, punti in $[a, b]$ tali che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b;$$

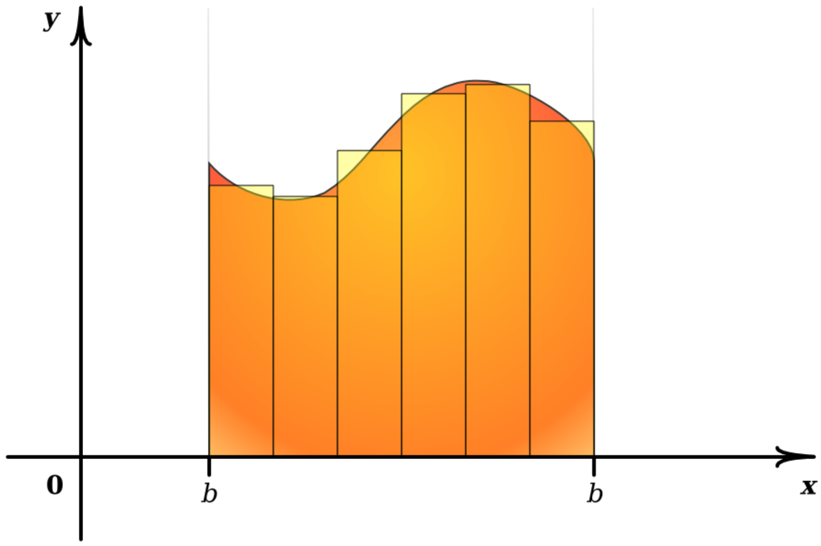
in questo modo $[a, b]$ risulta diviso in $n$ intervalli

$$[x_{i-1}, x_i], \; i = 1, 2, \ldots, n$$

Per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ scegliamo un punto $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e consideriamo il rettangolo di base $[x_{i-1}, x_i]$ e altezza $f(\bar{x}_i)$, la cui area è evidentemente $f(\bar{x}_i)(x_{i-1}, x_i)$. La somma

$$\boxed{\mathcal{R}_n = \sum_{i=0}^{n} f(\bar{x}_i)(x_{i-1}, x_i)}$$

si chiama **somma di Riemann**.




È del tutto ragionevole pensare che prendendo le lunghezze degli intervallini $[x_{i-1}, x_i]$ sempre più piccola (e quindi necessariamente prendendo $n$ sempre più grande), le somme $\mathcal{R}_n$ approssimeranno sempre di più quella che dovrebbe essere l'area di $S(f)$. Se per semplicità prendiamo tutti gli intervallini $[x_{i-1}, x_i]$ della stessa lunghezza, e quindi

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \qquad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

risulta

$$\mathcal{R}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} f(\bar{x}_i)$$

Nelle prime pagine dell'introduzione abbiamo già usato questa idea per calcolare l'area sotto la parabola $y = x^2$, $0 \leq x \leq b$. In quel caso abbiamo preso come $\bar{x}_i$ l'estremo destro dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, cioè $\bar{x}_i = x_i$, ottenendo così approssimazionei per eccesso dell'area cercata; risultava

$$\mathcal{R}_n = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{b^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \searrow^{n} \frac{b^3}{3}$$

La freccia $\searrow$ sta a indicare che $\dfrac{b^3}{6}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$ è decrescente. Se avessimo preso invece $\bar{x}_i = x_{i-1}$, avremo ottenuto approssimazioni per difetto,

$$\mathcal{R}_n = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{b^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \nearrow_{n} \frac{b^3}{3}$$

dove adesso $\nearrow$ indica che $\dfrac{b^3}{6}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$ è crescente.

In generale si ha il seguente

**Teorema.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua; allora esiste il limite*

$$\lim_n \mathcal{R}_n$$

*e tale limite è indipendente dalla scelta dei punti $\bar{x}_i$. Tale limite viene detto integrale da $a$ a $b$ della funzione $f$ e si scrive*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

*In realtà questo limite esiste ed è indipendente dalla scelta dei punti $\bar{x}_i$ anche in casi più generali. In questi casi diremo che $f$ è integrabile. Ad esempio, se $a < c < b$ ed $f$ è continua in $[a,c]$ e $[c,b]$, allora $f$ è integrabile in $[a,b]$.*

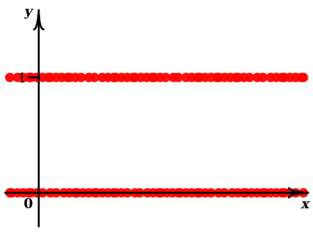
**Osservazione** Il limite di cui si parla nel teorema esiste anche se $f$ cambia segno in $[a,b]$. In questo caso l'integrale corrisponde alla somma algebrica delle aree sopra e sotto l'asse delle $x$.

**Nota** Non vogliamo qui addentrarci nel dettaglio della questione, ma è interessante notare che se la funzione non è continua le cose non vanno sempre così lisce, cioè ci sono funzioni per le quali il comportamenteo delle somme di Riemann non è indipendente dalla scelta degli $\bar{x}_i$ e quindi si possono ottenere limiti diversi a seconda della scelta di tali punti. In questo caso non si può parlare di integrale.

**Esempio** Per fare un esempio introduciamo una funzione diabolica, la **funzione di Dirichlet** in $[0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Poiché in ogni intervallo ci sono sia punti razionali che irrazionali, già tentare di disegnare il grafico di questa funzione crea dei problemi.




La funzione di Dirichlet è un esempio di funzione discontinua in ogni punto. Per quanto riguarda le relative somme di Riemann, vediamo che se si prende $\bar{x}_i \in \mathbb{Q}\ \forall i$, si ha

$$\mathcal{R}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \xrightarrow{n} 1$$

mentre se si prende $\bar{x}_i \notin \mathbb{Q}\ \forall i$, risulta

$$\mathcal{R}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 0 = 0 \xrightarrow{n} 0$$

Quindi, non è possibile parlare di integrale di $f(x)$. La funzione di Dirichlet non è integrabile.

## 3.2 Proprietà degli integrali

Come per i limiti e le derivate, vediamo un elenco di proprietà anche per l'integrale:

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue; allora

1. $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

3. Se $c \in (a, b)$, allora $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

4. $f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$; in particolare $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$, dove $m$ ed $M$ sono rispettivamente il valore minimo e massimo di $f$ in $[a, b]$.

5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ è in generale diverso da $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \cdot \int_a^b g(x)\, dx$.

   **Ad esempio** se $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$ e $a = 0$, si ha

   $$\int_0^b f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^b x^2 = \frac{b^3}{3}, \text{ mentre}$$

   $$\int_0^b f(x)\, dx \cdot \int_0^b g(x)\, dx = \frac{b^3}{3} \cdot b = \frac{b^4}{3} \neq \frac{b^3}{3} \text{ se } b \neq 1$$

Per comodità definiamo

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

Dimostriamo ora il

**Teorema** (Teorema del valor medio integrale)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua; allora $\exists c \in (a, b)$ tale che*

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$$

**Dimostrazione.** Abbiamo visto nella quarta proprietà che

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f\,(x)\,dx \leq M\,(b-a)\,,\ \text{cioè}$$

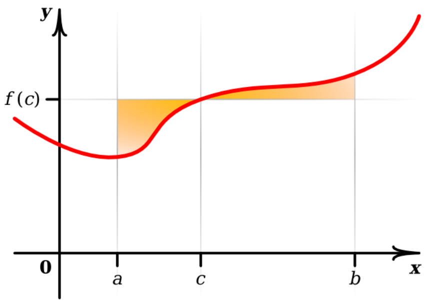
$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f\,(x)\,dx \leq M\ .$$

Poiché, grazie al teorema dei valori intermedi, $f$ assume tutti i valori tra $m$ ed $M$, $\exists c \in (a, b)$ tale che

$$f\,(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f\,(x)\,dx\ ,$$

come volevasi dimostrare. □

Il significato geometrico di questo teorema è immediato ed è illustrato sulla figura a lato.




Abbiamo già visto che anche per una funzione semplice come $f\,(x) = x^2$, il calcolo del suo integrale mediante le somme di Riemann non è molto agevole (vedi introduzione). Per giungere ad un metodo che spesso permette di calcolare in modo semplice un integrale, introduciamo il concetto di **primitiva** o **antiderivata**.

**Definizione** (Primitiva)**.** *Si dice che una funzione* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è una primitiva in* $[a, b]$ *di* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *se e solo se*

$$F'\,(x) = f\,(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Conoscendo molte funzioni con le loro derivate è immediato ricondursi a molte funzioni con le loro primitive. Ad esempio, $x^2$ è una primitiva di $2x$,

$$\frac{x^{p+1}}{p+1}\ \text{è una primitiva di}\ x^p\ \text{per}\ p \neq 1$$

$\log\,(x)$ è una primitiva di $\dfrac{1}{x}$, $e^x$ è una primitiva di $e^x$, $-\cos\,(x)$ è una primitiva di $\sin\,(x)$. Ed ancora, $\arctan x$ è una primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$, $\tan x$ è una primitiva di $\frac{1}{\cos^2 x}$, ecc. ecc. In realtà durante il corso abbiamo già affrontato il problema delle primitive nella ricerca dell'area del sottografico di $x^2$ e nella definizione del logaritmo.

È immediato notare che se $F\,(x)$ è una primitiva di $f\,(x)$, anche

$$G\,(x) = F\,(x) + k \qquad (k\ \text{costante})$$

lo è; infatti

$$G'(x) = F'(x) + k' = F'(x) + 0 = f(x)$$

.

Quindi quando conosciamo una primitiva di $f$, in realtà ne conosciamo infinite. Più interessante è il viceversa, e cioè che se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora ogni altria primitiva di $f(x)$ è della forma $F(x) + k$, $k$ costante (e quindi, trovata una primitiva di $f(x)$, le abbiamo trovate tutte). Precisamente si ha il seguente

**Teorema.** *Se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di $f(x)$, allora*

$$G(x) - F(x) = \text{ costante}$$

Dimostrazione. È immediata, in quanto

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x$$

□

## 3.3 La funzione integrale

**Definizione** (funzione integrale)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile; la* ***funzione integrale*** *associata è definita mediante*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad a \leq x \leq b$$

*$F(x)$ rappresenta l'area con segno da $a$ a $x$, la variabile è l'estremo superiore di integrazione.*

C'è da notare l'uso del simbolo $t$ per la variabile di integrazione: è chiaro che si può usare un simbolo qualunque (meglio non $x$ per evitare confusione); tali simboli, come l'indice $i$ in una sommatoria $\sum_{i=1}^{3} a_i$, si dicono muti proprio perché la scelta del nome non cambia nulla.

Siamo ora in grado di dimostrare un teorema estremamente importante, che, tra le altre cose, darà anche una ricetta utilissima per il calcolo di integrali:

**Teorema** (Teorema fondamentale del calcolo integrale). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ la funzione integrale associata; si ha*

1. *Se $f$ è continua in $[a, b]$, allora $F$ è derivabile in $[a, b]$ e si ha*
$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$
2. *Se $G(x)$ è una qualunque primitiva di $f(x)$, si ha*
$$\int_a^b f(t)\,dt = G(t)|_a^b = G(b) - G(a)$$
*dove $G(t)|_a^b = G(b) - G(a)$ è semplicemente una notazione.*

Dimostrazione.

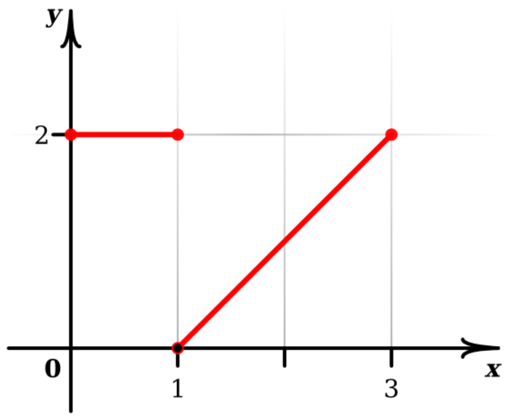
1. Sia $x \in [a, b]$; si ha
$$\frac{F(x+h) - F(h)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} =$$
$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \frac{hf(c_x)}{h} = f(c_x) \xrightarrow{h \to 0} f(x) \ ,$$
dove $c_x$ è un punto opportuno tra $x$ ed $x+h$ (vedi il teorema del valor medio integrale) ed inoltre si ha che $h \to 0 \ \Rightarrow \ c_x \to x$ ed $f$ è continua.
2. Sia $G(x)$ una primitiva di $f(x)$; per 1. anche $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ e quindi esiste una costante $k$ tale che
$$F(x) = G(x) + k \qquad \forall x \in [a, b]$$
Poiché $F(a) = 0$, risulta $k = -G(a)$ e quindi
$$F(x) = G(x) - G(a);$$
In particolare, per $x = b$, otteniamo
$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$$

□

È interessante notare che, anche se $f(x)$ ha dei punti di discontinuità (ma rimane limitata), la funzione $F(x)$ è una funzione continua.

Facciamo un esempio Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

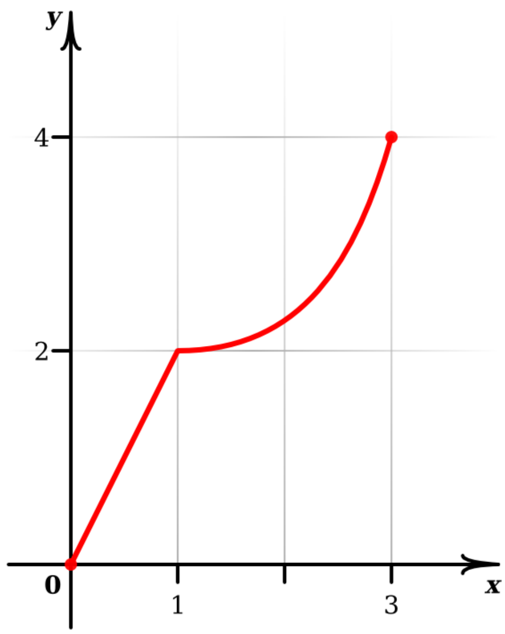



Posto $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, si ottiene facilmente che

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 + \frac{(x-1)^2}{2} & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

cioè

$$F(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{2} & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$




Si ha $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} F(x) = 2 = F(1)$ e quindi $F(x)$ è continua in $x = 1$. Si osservi che tuttavia $F$ non è derivabile in $x = 1$.

Osserviamo che, per quanto riguarda la parte 2. del teorema, essa ci assicura che, se conosciamo una primitiva $G(x)$ della funzione $f(x)$, per calcolare l'integrale di quest'ultima non dovremo più calcolare le somme di Riemann e farne il limite, ma basterà semplicemente calcolare $G(x)$ nei due estremi dell'intervallo.

La prima 1. del teorema ci assicura che ogni funzione $f(x)$ continua ha una primitiva. È suggestivo scrivere

$$\left( \int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x)$$

Questa scrittura esplicita il legame tra integrazione e derivazione, mostrando come, in un certo senso, esse siano una l'operazione inversa dell'altra. Proprio per questo storicamente si è usata la notazione dell'integrale anche per indicare le primitive. Precisamente si ua la nozione di integrale indefinito

**Definizione** (integrale indefinito)**.** *Si dice* ***integrale indefinito*** *di $f$ e si scrive*

$$\int f(x)\,dx \qquad \left(\text{o anche semplicemente } \int f\right)$$

*una primitiva arbitraria di $f(x)$.*

Quindi, mentre $\int_a^b f(x)\,dx$ è un numero, $\int f(x)\,dx$ è una funzione scelta in un insieme di funzioni che differiscono per una costante.

**Ad esempio**

$$\int e^x dx = e^x, \ \int \frac{1}{x} = \log|x| \ \ (x \neq 0), \ \int \cos(x)\,dx = \sin(x), \ \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Tenendo conto delle proprietà delle derivate si vede immediatamente che per l'integrale indefinito vale:

$$\int (f+g) = \int f + \int g, \ \int kf = k\int f \qquad (k \text{ costante})$$

**Nota** La parte 1. del teorema fondamentale del calcolo integrale ci assicura l'esistenza di $\int f(x)\,dx$ per ogni funzione $f(x)$ continua. Questo non signifia che $\int f(x)\,dx$ si possa sempre calcolare esplicitamente mediante combinazioni di funzioni elementari (polinomi, radici, logaritmi, esponenziali e funzioni trigonometriche). Ad esempio,

$$\int e^{x^2} dx, \ \int \frac{\sin x}{x} dx, \ \int \cos\left(x^2\right) dx$$

non sono calolabili esplicitamente.

## 3.4 Calcolo degli integrali

Nonostante conosciamo le primitive delle funzioni più importanti, non è immediato come trovare le primitive di funzioni anche dall'aspetto molto semplice come ad esempio $\log(3x)$ o $x \sin x$. Per questo vedremo adesso due tecniche molto utili:

1. l'integrazione per parti
2. l'integrazione per sostituzione

### 3.4.1 Integrazione per parti

La formula della derivata di un prodotto dice che $f'g = (fg)' - fg'$;
ne segue che $\displaystyle\int f'g = \int (fg)' - \int fg'$, cioè

$$\boxed{\int f'g = fg - \int fg'}$$

Per l'integrale definito corrispondente, si ha

$$\boxed{\int_a^b f'g = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b fg'}$$

Ovviamente questa formula è comoda quando $\int fg'$ risulta più semplice di $\int f'g$ e chiaramente sta a noi decidere, quando abbiamo l'integrale di un prodotto, quale dei due fattori considerare come $f'$ e quale come $g$.

**Facciamo un esempio** $\displaystyle\int xe^x dx$ si può vedere come $\displaystyle\int \left(\frac{x^2}{2}\right)' e^x dx$ oppure come $\displaystyle\int x\,(e^x)'$. Qui non ci sono dubbi: nel primo caso l'integrazione per parti addirittura complicherebbe le cose, mentre nel secondo caso sembra che le cose migliorerebbero. Proviamo:

$$\int (e^x)'\, x dx = e^x x - \int e^x\,(x)'\,dx = e^x x - \int e^x dx = e^x x - e^x = e^x\,(x-1)$$

Negli integrali $\displaystyle\int P(x) \sin x\; dx$ e $\displaystyle\int P(x) \cos x\; dx$, dove $P(x)$ è un polinomio, conviene scegliere $\sin x$ e $\cos x$ come $f'(x)$; negli integrali $\displaystyle\int P(x)\, e^x$ conviene scegliere come $f'(x)$ la funzione $e^x$. E ancora, negli integrali $\displaystyle\int P(x) \log x$ conviene scegliere come $f'(x)$ la funzione $P(x)$. L'esperienza è comunque molto importante. Vediamo un caso particolare: il calcolo della primitiva di $\log x$ (anche se $\log x$ non sembra essere un prodotto...). Trucchetto:

$$\int \log x\; dx = \int 1 \cdot \log x\; dx = \int (x)' \log x\; dx = x \log x - \int x\,(\log x)'\,dx =$$

$$= x \log x - \int 1 \cdot dx = x \log x - x = x\,(\log x - 1)\;\;.$$

Questo trucchetto può essere comodo anche in altri casi: provate con il calcolo della primitiva di $\arctan x$ . È una primitiva da sapere!

### 3.4.2 Integrazione per sostituzione

Dalla formula di derivazione di una funzione composta si ha che, se $G(t)$ è una primitiva di $g(t)$ (cioè $G'(t) = g(t)$), allora $G(f(x))$ è una primitiva di $g(f(x)) \cdot f'(x)$; infatti

$$(G(f(x)))' = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$$

Quindi, posto $t = f(x)$, da $G(f(x)) = G(t) = \int g(t)\,dt$, risulta

$$\boxed{\int g(t)\,dt = \int g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx}$$

Per l'integrale definito corrispondente, si ha

$$\boxed{\int_a^b g(t)\,dt = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx}$$

Un modo semplice per ricordare questa regola è il seguente: se $t = f(x)$, allora $\frac{dt}{dx} = f'(x)$ e, trattando $dt$ e $dx$ come entità a sé stanti, ricaviamo

$$dt = f'(x)\,dx$$

Se adesso consideriamo $\displaystyle\int g(t)\,dt$, possiamo passare a $\displaystyle\int g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx$ semplicemente sostituendo $t$ con $f(x)$ e $dt$ con $f'(x)\,dx$. Sembra tutto un po' magico, però funziona. Anche con l'integrazione per sostituzione conta molto l'esperienza e l'allenamento. Facciamo un esempio: calcoliamo

$$\int \log(5t)\,dt$$

Se fosse $\displaystyle\int \log t dt$, lo sapremo fare; l'idea è quindi quella di "cambiare variabile", ponendo $5t = x$, cioè

$$t = \frac{x}{5}, \text{ quindi } dt = \frac{1}{5}dx$$

Risulta così

$$\int \log(5t)\,dt = \int \log x \cdot \frac{1}{5}dx = \frac{1}{5}\int \log x dx = \frac{1}{5}x(\log x - 1) = \frac{1}{5} \cdot 5t(\log(5t) - 1) =$$
$$= t(\log(5t) - 1)$$

Facciamo un altro esempio: calcoliamo $(x > 0)$

$$\int xe^{x^2}\,dx$$

Ponendo $x^2 = t$ ed avendo quindi $2xdx = dt$, si ottiene

$$\int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

AGGIUNGERE ALCUNI INTEGRALI GENERALI e commento SUGLI INTEGRALI QUOZIENTI di POLINOMI

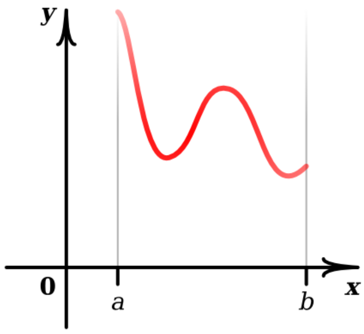
## 3.5 Integrale improprio

Torniamo ora all'integrale definito. Sinora abbiamo considerato

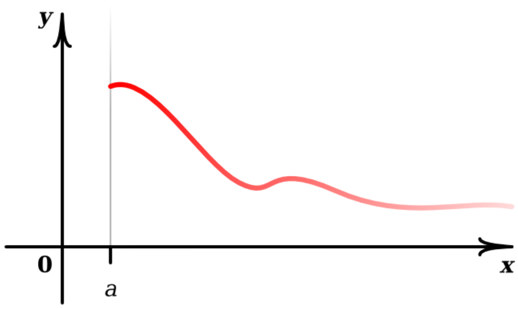
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

quando $f$ è continua in $[a,b]$. Vogliamo consideraro ora i due casi seguenti:

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ quando $f$ è continua in $(a,b]$ (quindi $f$ può essere illimitata)




2. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $f$ continua in $[a,+\infty)$ (quindi l'intervallo può essere illimitato)




(analogamente, i casi $f$ continua in $[a,b)$, $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$). Integrali di questo tipo vengono detti **impropri**. L'estensione è del tutto naturale:

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{def}{=} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$

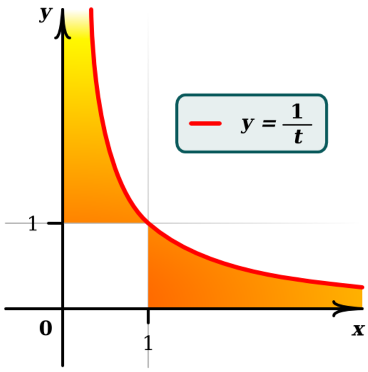
   Notiamo che con l'integrale $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ non ci sono problemi, in quanto $f$ è continua in $[a+\varepsilon,b]$ per $\varepsilon>0$. Se il precedente limite esiste finito diremo che l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è **convergente**; se il limite esiste infinito diremo che l'integrale è **divergente**; se invece il limite non esiste, non si potrà parlare di $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

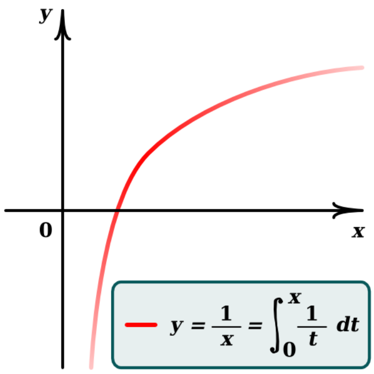
   Un caso in cui il limite $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ esiste sicuramente (finito o infinito) è quando $f(x)\geq 0\ \forall x\in(a,b]$; infatti, in questo caso $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$ cresce quando $\varepsilon\to 0$.

2. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$; come prima, con l'integrale $\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$, $t \in \mathbb{R}$, non vi sono problemi perché $f$ è continua in $[a,t]$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $t > a$.

   Come prima, se il limite precedente esiste finito diremo che l'integrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è **convergente**, se esiste infinito che l'integrale è **divergente** e se non esiste non parleremo di $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

   Se $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq a$ l'integrale $\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ è una quantità che cresce al crescere di $t$ e quindi in questo caso il limite $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ esiste sicuramente (finito o infinito).




Notiamo che in realtà abbiamo già incontrato due integrali di questo tipo quando abbiamo introdotto il logaritmo, da noi definito come

$$\log x \overset{def}{=} \int_1^x \frac{1}{t}dt \qquad (x > 0)$$

(anche se non avevamo dato ancora la definizione formale di integrale). Studiando questa funzione abbiamo visto che

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t}dt = +\infty,$$

cioè che

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}dt = +\infty}$$

e che

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\int_1^x \frac{1}{t}dt =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(-\int_x^1 \frac{1}{t}dt\right) = -\infty,$$

cioè che

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{t}dt = +\infty}$$

Vediamo ora che

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \leq 1 \quad \text{(cioè, l'integrale è divergente)} \\ \frac{1}{p-1} & \text{se } p > 1 \quad \text{(cioè, l'integrale è convergente)} \end{cases}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \geq 1 \quad \text{(cioè, l'integrale è divergente)} \\ \frac{1}{1-p} & \text{se } p < 1 \quad \text{(cioè, l'integrale è convergente)} \end{cases}$

Il caso $p = 1$ è appena stato fatto. Per $p \neq 1$ si ha

$$\int_1^t \frac{1}{x^p}dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^t = \frac{t^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \xrightarrow{t\to+\infty}$$

$$\xrightarrow{t\to+\infty} \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{se } -p+1<0 \quad \text{cioè se } p>1 \\ +\infty & \text{se } -p+1>0 \quad \text{cioè se } p<1 \end{cases}$$

$$\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x^p}dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_\varepsilon^1 = \frac{1}{-p+1} - \frac{\varepsilon^{-p+1}}{-p+1} = \frac{1}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p} \xrightarrow[\varepsilon>0]{\varepsilon\to0}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to0\ \varepsilon>0} \begin{cases} \frac{1}{1-p} & \text{se } 1-p>0 \quad \text{cioè se } p<1 \\ +\infty & \text{se } 1-p<0 \quad \text{cioè se } p>1 \end{cases}$$

Gli integrali appena calcolati sono molto importanti perché spesso la convergenza o meno di integrali di altre funzioni invece di essere studiata direttamente con la definizione usando primitive e limite, viene dedotta per confronto con integrali come questi. Tali integrali si riveleranno inoltre fondamentali per lo studio di nuovi oggetti che introdurremo più avanti.

**Un esempio estremamente interessante** è lo studio della convergenza di

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$$

(interessante perché questo integrale è molto importante nella teoria delle probabilità e perché $e^{-t^2}$ è una funzione la cui primitiva non è calcolabile esplicitamente). Sappiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$$

e quindi esiste $x_0$ tale che $\dfrac{x^2}{e^{x^2}} \leq 1\ \forall x \geq x_0$, cioè

$$\frac{1}{e^{x^2}} < \frac{1}{x^2} \qquad \forall x \geq x_0$$

Si ottiene

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\left[\overbrace{\int_0^{x_0} e^{-t^2}dt}^{\text{finito}} + \int_{x_0}^x e^{-t^2}dt\right] =$$

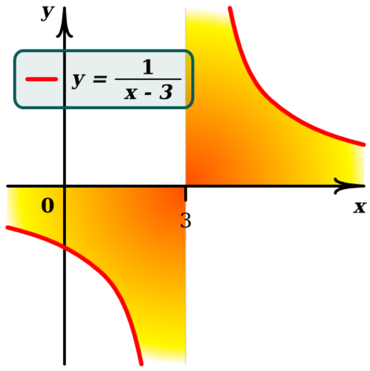
$$= \int_0^{x_0} e^{-t^2}dt + \lim_{x\to+\infty}\int_{x_0}^x e^{-t^2}dt \leq \int_0^{x_0} e^{-t^2}dt + \lim_{x\to+\infty}\int_{x_0}^x \frac{1}{t^2}dt =$$

$$= \int_0^{x_0} e^{-t^2}dt + \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt < +\infty$$

**Attenzione** Quando si ha un integrale da calcolare, bisogna sempre accertarsi se è improprio o meno, altrimenti si rischia di prendere grosse cantonate.

Ad esempio, affrontando con leggerezza

$$\int_0^4 \frac{dx}{x-3}$$




si ricava scorrettamente

$$\int_0^4 \frac{dx}{x-3} = \log\left|x-3\right|_0^4 = \log(1) - \log(3) = -\log(3)$$

mentre osservando che $\dfrac{1}{x-3}$ è discontinua in $x = 3$, si ha che

$$\int_0^4 \frac{dx}{x-3} = \int_0^3 \frac{dx}{x-3} + \int_3^4 \frac{dx}{x-3}$$

è improprio. In questo caso si ha

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-3} = -\infty, \qquad \int_3^4 \frac{dx}{x-3} = +\infty$$

e l'integrale $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x-3}$ non esiste.

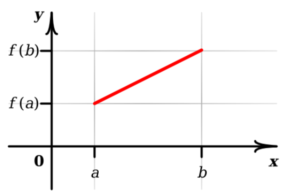
Concludiamo l'argomento sull'integrale rispondendo ad una domanda molto interessante. Finora ci siamo occupati di misurare l'area del sottografico di una funzione continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ci chiediamo adesso quanto sia la lunghezza del grafico

$$G(f) = \{(x, f(x)),\ a \le x \le b\}$$

di una funzione.

Se $f(x) = mx + q$ la risposta è semplice; grazie al **teorema di Pitagora** tale lunghezza, che indicheremo con

$$l_{[a,b]}(f)$$




è data da

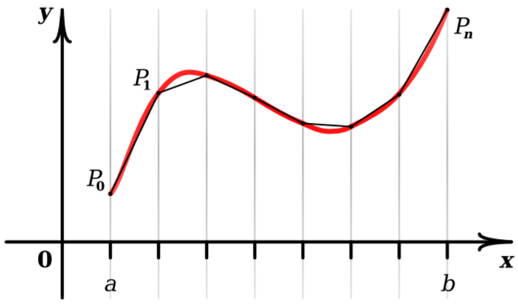
$$\begin{aligned} l_{[a,b]}(f) &= \sqrt{[f(b) - f(a)]^2 + (b-a)^2} = \\ &= \sqrt{(mb \cancel{+q} - ma \cancel{-q})^2 + (b-a)^2} = \\ &= \sqrt{m^2(b-a)^2 + (b-a)^2} = \\ &= (b-a)\sqrt{1+m^2} \end{aligned}$$

Ma già se $f(x) = x^2$, la risposta tarda ad arrivare. Come fare? L'idea è molto intuitiva. Cercare di approssimare la funzione con segmenti (di cui si sa calcolare la lunghezza) e poi vedere che succede alla somma delle lunghezze di questi segmenti via via che l'approssimazione si fa più fine, facendo crescere all'infinito il numero dei segmenti approssimanti.

Facciamo una figura e vediamo di scrivere in maniera precisa quello che si vuol fare. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in $n$ parti (uguali per semplicità) mediante i punti

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1$$




Siano $P_k = (x_k, f(x_k))$, $k = 0, 1, \ldots, n$ i punti corrispondenti sul grafico della funzione. Se uniamo con segmenti questi punti, otteniamo quella che si chiama **poligonale iscritta** nel grafico di $f$, e che indicheremo con $\mathcal{P}_n$. Se chiamiamo $l_{k,k-1}$ la lunghezza del segmento che congiunge $P_k$ con $P_{k-1}$, grazie al teorema di Pitagora abbiamo

$$l_{[a,b]}(\mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} l_{k,k-1} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f(x_k) - f(x_{k-1})]^2 + (x_k - x_{k-1})^2}$$

Supponiamo $f$ derivabile, con derivata $f'$ continua; grazie al **teorema di Lagrange** esistono punti $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tali che

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

e quindi

$$l_{[a,b]}(\mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 \left(1 + f'^2(c_k)\right)} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(c_k)}$$

Ma questo non è altro che una somma di Riemann relativa alla funzione continua $\sqrt{1 + f'^2}$ e quindi

$$\lim_{n} l_{[a,b]}(\mathcal{P}_n) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Questo giustifica la seguente

**Definizione** (Definizione di lunghezza)**.** *La lunghezza $l_{[a,b]}(f)$ di $G(f)$ si definisce come:*

$$l_{[a,b]}(f) \overset{def}{=} \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(c_k)} dx$$

Purtroppo, il calcolo di integrali di questo tipo, anche per funzioni molto semplici, non è in generale particolarmente agevole.

**Ad esempio** Se $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$, si ha

$$l_{[0,1]}(x^2) = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}$$

Vi sfido a calcolare quest'integrale: vi consiglio l'integrazione per sostituzione ponendo $\sqrt{1 + 4x^2} = 2x + t$. Buon lavoro!

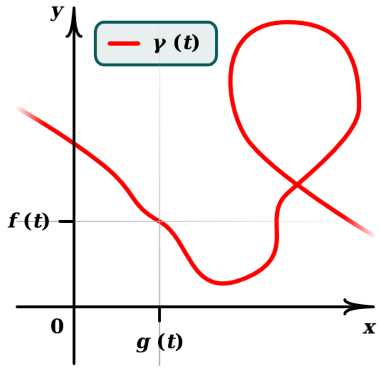
Consideriamo infine non un grafico, ma una curva piana $\gamma$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

$$\begin{cases} f : [a,b] \to \mathbb{R} \\ g : [a,b] \to \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{derivabili con derivate continue}$$

Definiamo la lunghezza di $\gamma$ mediante

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g'^2(t) + f'^2(t)}dt$$




**Ad esempio** Una circonferenza di raggio $r$ può essere rappresentata in forma parametrica mediante

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e quindi la sua lunghezza è data da

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r\sin(t))^2 + (r\cos(t))^2}dt = \int_0^{2\pi} r\sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2}dt = 2\pi r$$

risultato a tutti ben noto.

È chiaro che il grafico di una funzione $f$ è un caso particolare di curva (è una curva che interseca al più una volta le rette $x = x_0$); una sua parametrizzazione naturale è

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

Ma cambiamo completamente argomento.

# Capitolo 4

# Successioni e serie

## 4.1 Richiami alle successioni

Abbiamo già visto i concetti di successione e di limite di una successione.

Finora le successioni che abbiamo considerato erano espresse in forma "esplicita", cioè del tipo

$$a_n = \frac{1}{n}, \; a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \; a_n = \sqrt[n]{n}, \quad \text{eccetera;}$$

per ogni $n$ il termine n-esimo era chiaro esplicitamente. Non sempre è così: a volte una successione può essere definita **per ricorrenza**, cioè ogni termine è definito a partire dai precedenti; ad esempio

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} ; \qquad \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + b_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

È chiaro che nelle successioni per ricorrenza è necessario definire esplicitamente il primo o i primi termini di modo che la ricorrenza possa cominciare. Nei due esempi precedenti si ha

$$a_0 = 1, \; a_1 = 1 + a_0 = 2, \; a_2 = 1 + a_1 = 3, \; a_3 = 1 + a_2 = 4, \ldots$$

e si capisce che $a_n = n \; \forall n \in \mathbb{N}$ (in questo caso $a_n$ ha anche una formulazione esplicita), mentre

$$b_0 = 1, \; b_1 = 1, \; b_2 = b_1 + b_0 = 2, \; b_3 = b_2 + b_1 = 3, \; b_4 = b_3 + b_2 = 5,$$

e così via... (in questo caso $b_n$ non ha, almeno ad una prima occhiata, una formulazione esplicita).

**Esempio** Un'altra successione che abbiamo incontrato in precedenza è la successione

$$S_n = S_n(q) = q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=1}^{n} q^k$$

Questa formulazione non è esplicita, ma noi sappiamo che

$$S_n(q) = \begin{cases} \frac{q-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

e quindi abbiamo anche una sua formulazione esplicita.

**Un altro esempio importante** di successione è costituito dalle somme di Riemann. Se prendiamo una partizione $x_0 = a, x_1, \cdot\cdot, x_k, \cdot\cdot, x_n = b$ di $[a, b]$, le somme di Rimann sono date da

$$\mathcal{R}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

L'integrale era definito come il limite della successione $\mathcal{R}_n$.

Una successione che ha limite finito si dice **convergente**. Riassumiamo le definizioni e le proprietà riguardanti le successioni:

1. $a_n$ si dice **limitata** se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $|a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $a_n$ è **crescente** se $a_n \leq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$;

   $a_n$ è **decrescente** se $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$;

   Le successioni crescenti o decrescenti vengono dette **monotone** (se nelle definizioni vale il minore o il maggiore stretto vengono dette **strettamente monotone**);
3. se $a_n$ è convergente allora è limitata. Non vale il viceversa; ad esempio la successione $a_n = (-1)^n$ è limitata ma non è convergente;
4. Se $a_n$ è monotona ma non limitata allora $\lim_n a_n = \pm\infty$
5. se $a_n$ tende a 0 e $b_n$ è limitata, allora $a_n \cdot b_n$ tende a zero

Parliamo adesso di serie.

## 4.2 Serie

Le serie sono successioni molto particolari. Ne abbiamo già vista una:

$$S_n = S_n(q) = \sum_{k=1}^{n} q^k$$

In generale, data una succesione $a_n$, si può considerare la **successione delle somme parziali di** $a_n$, cioè

$$
\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = S_1 + a_2 = a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
&S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k
\end{aligned}
$$

La successione $S_n$ si chiama **serie di termine generale** $a_n$.

### Vediamo alcuni esempi

1. $a_n = q$; si ha $S_n = nq$
2. $a_n = q^n$; si ha $S_n = S_n(q)$

   Questa serie si chiama **serie geometrica di ragione** $q$;
3. $a_n = \frac{1}{n}$; si ha $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

   Questa serie si chiama **serie armonica**.

Interessante è cercare di capire quando queste particolari successioni che sono le serie hanno limite e quando tale limite è finito.

### Definizioni

1. Una serie si dice **convergente** se esiste $\lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$.

   Scriveremo in maniera suggestiva

   $$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

   e diremo che $S$ è la **somma della serie**.

   Abbiamo così dato un senso alla somma di un numero infinito di termini. Spesso si usa il simbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ non solo per indicare la somma della serie (ossia il limite della successione $S_n$), ma anche per indicare la serie stessa (ossia la successione $S_n$). Questo non crea in generale confusione.
2. Una serie si dice **divergente** se esiste $\lim_n S_n = \pm\infty$.

   Scriveremo anche

   $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty$$

**OSSERVAZIONE** Se il termine generale $a_n$ è positivo, si osserva immediatamente che la serie ha sempre limite, finito o infinito (quindi la serie converge o diverge). Nel primo caso scriveremo anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

3. Una serie si dice **indeterminata** se $\nexists \lim_n S_n$; ad esempio

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

si ha

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

cioè $S_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$, che non ha limite.

**NOTA IMPORTANTE**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R} \text{ (cioè la serie converge) } \Rightarrow a_n \xrightarrow{n} 0$$

(detto a parole, il termine generale di una serie convergente tende a zero). Infatti, sia

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ si ha}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \xrightarrow{n} S - S = 0$$

Questa condizione **è necessaria** ma **non sufficiente** affinché una serie converga (vedremo tra poco esempi di serie non convergenti il cui termine generale tende a zero). Quindi può essere utile solo per dimostrare la non convergenza di una serie.

**AD ESEMPIO**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} = +\infty \text{ perché } a_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n} 1 \neq 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ non converge, perché } a_n = (-1)^n \text{ non tende a zero (non ha limite)}$$

Questa utilità non è da sottovalutare. Siccome le serie, a parte qualche raro caso, non si riescono a calcolare, quello che in generale si fa è utilizzare vari criteri per lo studio della convergenza o meno e quindi, se accade che il termine generale non tende a zero, già si sa come la serie si comporta.

Prima di cominciare a vedere i vari criteri per lo studio della convergenza delle serie, vediamo un paio di esempi particolarmente importanti che saranno di aiuto in seguito.

**Esempi**

1. Il primo esempio sarà una delle poche serie di cui si riesce a calcolare la somma; la conosciamo già: è la **serie geometrica** di ragione $q$. Si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \lim_n \sum_{k=1}^{n} q^k = \begin{cases} \lim_n \dfrac{q-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{q}{1-q} & \text{se } |q|<1 \\ \nexists & \text{se } q \le -1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \end{cases} \\ \lim_n n = +\infty \text{ se } q = 1 \end{cases}$$

**Nota** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k = 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ se $|q| < 1$.

Se vi ricordate, questa serie è stata fondamentale per il calcolo degli sviluppi decimali periodici.

2. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ si chiama **serie armonica generalizzata**.

Questa serie è divergente per $p \le 1$ e convergente per $p > 1$. Quindi, questa serie con $0 < p \le 1$ mostra che una serie può essere divergente anche se il termine generale tende a zero.

Il comportamento della serie armonica generalizzata segue immediatamente dal criterio del confronto integrale, enunciato nella prossima sezione.

## 4.3 Criteri di convergenza delle serie

I primi cinque criteri che tratteremo saranno per serie a termini positivi.

**Criterio del confronto integrale.** Sia $f \ge 0$, continua e decrescente in $[1, +\infty)$; allora

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < +\infty$$

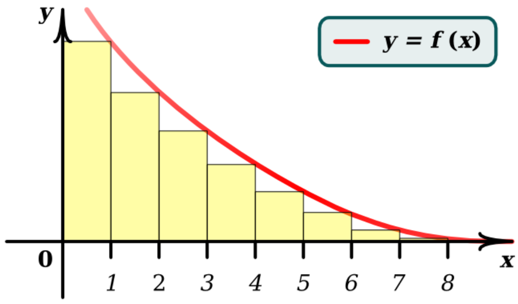
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = +\infty$$

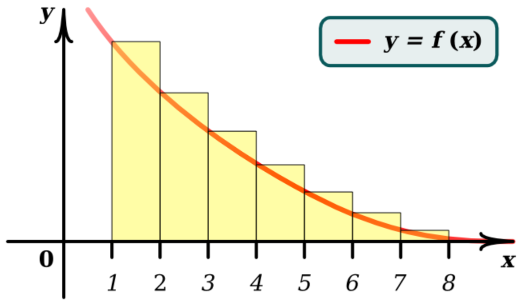
Quindi, quanto detto per la serie armonica generalizzata segue ricordando che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx < +\infty \text{ per } p > 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = +\infty \text{ per } p \leq 1$$

Non dimostriamo questo criterio: è facile farsene una ragione guardando le seguenti figure:




$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \geq \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$$

Conosciamo ora il comportamento della serie geometrica e della serie armonica generalizzata, ma siamo in grado di studiare il comportamento di moltissime altre serie, semplicemente usando due criteri molto naturali ma molto potenti.

**Criterio del confronto.**

$$a_n \geq 0,\ b_n \geq 0,\ a_n \geq b_n\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

**Criterio del confronto asintotico.**

$$\begin{array}{l} a_n \geq 0,\ b_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_n \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0,\ L \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hanno lo stesso comportamento}$$

Facciamo un paio di esempi

**Esempio 1** Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{3^n}$. Si ha

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n} 0$$

è verificata la condizione necessaria e quindi la serie potrebbe convergere. Ora

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n < +\infty$$

perché è una serie geometrica con ragione $\frac{2}{3} < 1$. Quindi per il criterio del confronto, anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{3^n}$ è convergente.

**Esempio 2** Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{4n^4+3n^2}$.

Si ha $a_n = \frac{n^2+1}{4n^4+3n^2} \xrightarrow{n} 0$; è verificata la condizione necessaria e pertanto la serie potrebbe convergere.

Ad occhio $a_n$ sembra comportarsi come $b_n = \frac{1}{4n^2}$; calcolo quindi

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n}$$

si ha

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{4n^2\left(n^2+1\right)}{4n^4+3n^2} = 1 > 0$$

Allora, poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$ è convergente, per il criterio del confronto asintotico lo sarà anche la serie di partenza.

Ci sono altri due criteri importanti per lo studio delle serie a termini positivi:

**Criterio del rapporto.**

Sia $a_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n} L$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{se } L < 1 & \text{allora } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \\ \text{se } L > 1 & \text{allora } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \\ \text{se } L = 1 & \text{allora nulla può dirsi in generale } \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \end{array}\right.$$

**Criterio della radice.**

Sia $a_n > 0$, $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n} L$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{se } L < 1 & \text{allora } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \\ \text{se } L > 1 & \text{allora } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \\ \text{se } L = 1 & \text{allora nulla può dirsi in generale } \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \end{array}\right.$$

Facciamo anche qui un paio di esempi:

**Esempio 1**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n};\ a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

si ha

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{2}{3} \xrightarrow{n} \frac{2}{3} < 1$$

e quindi la serie converge.

**Esempio 2**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; \; a_n = \frac{1}{n!}$$

si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n} 0 < 1$$

e quindi la serie converge.

Passiamo adesso alle serie il cui termine generale è di segno variabile. A questo proposito introduciamo un nuovo concetto di convergenza.

**Definizione.** *(convergenza assoluta)*
*Diciamo che la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, ***converge assolutamente*** *se e soltanto se* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

La cosa più importante da notare è la seguente **proprietà**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

A parole questo significa che se una serie converge assolutamente, allora converge (si dice anche **semplicemente**).

Quindi, il primo passo da fare quando si vuole studiare una serie il cui termine generale è di segno variabile è quello di vedere se converge assolutamente (per la convergenza assoluta abbiamo visto un sacco di criteri). Se non c'è convergenza assoluta, non abbiamo molte risorse. L'unico criterio che desidero presentare qui riguarda serie con termine generale di segno variabile ma di un tipo speciale.

**Definizione.** *(serie a termini di segno alterno)*
*Una serie del tipo*

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \;\; a_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$$

*si dice* ***serie a segni alterni****.*

Per queste serie c'è il seguente importante criterio di Leibniz.

**Criterio di Leibniz.**

$$\left.\begin{array}{r} a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \\ a_n \text{ decrescente, } \ a_n \downarrow 0 \end{array}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \in \mathbb{R}$$

Non dimostriamo qui questo criterio, ma facciamo un esempio.

**Esempio**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Questa serie **non** converge assolutamente; infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che è una serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ con $p = \frac{1}{2} < 1$ e quindi divergente. Poiché $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, il criterio di Leibniz si applica e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}$$

## 4.4 Serie di potenze

L'ultima parte sulle serie riguarderà serie in cui i termini non sono numeri, ma funzioni di una variabile, ad esempio

$$a_n = a_n(x) = \frac{1}{n^8} \cos(nx)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\left| \frac{1}{n^8} \cos(nx) \right| \leq \frac{1}{n^8}$$

e quindi, per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} \cos(nx)$ converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Noi studieremo in particolare serie il cui termine generale sarà della forma

$$a_n = a_n(x) = c_n (x - x_0)^n$$

dove $c_n$ è una successione data e $x_0$ è un numero fissato. Una serie di questo tipo si chiama **serie di potenze**.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1 (x - x_0) + c_2 (x - x_0)^2 + c_3 (x - x_0)^3 + \dots$$

Le serie di potenze si possono pensare come la naturale generalizzazione dei polinomi.

Facciamo qualche esempio

**Esempio 1**

$$c_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N},\ x_0 = 0$$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ è la serie geometrica di ragione $x$. Sappiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ per $|x| < 1$ e non si ha convergenza per $|x| \geq 1$.

**Esempio 2**

$$c_n = \frac{1}{n!} \ \forall n \in \mathbb{N},\ x_0 = 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Applicando il criterio del rapporto si trova

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{|x|^n}{n!} = \frac{1}{n+1}|x| \xrightarrow{n} 0 < 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e di conseguenza la serie è convergente (assolutamente) $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vedremo più avanti che la somma di queste serie è una funzione molto importante e ben nota, cioè che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

**Esempio 3**

$$c_n = n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_0 = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

Applicando il criterio della radice, si trova

$$\sqrt[n]{n\,|x|^n} = \sqrt[n]{n}\,|x| \xrightarrow{n} |x|$$

Quindi, la serie converge assolutamente per $|x| < 1$ e non converge per $|x| > 1$. Per $|x| = 1$ il termine generale della serie non tende a zero (e quindi anche per $|x| = 1$ la serie non converge).

**Nota** In generale, se $a_n = c_n\,(x - x_0)^n$, si ha

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|c_{n+1}|\,|x-x_0|^{n+1}}{|c_n|\,|x-x_0|^n} = \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}|x-x_0|$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n|\,|x-x_0|^n} = \sqrt[n]{|c_n|}\,|x-x_0|$$

Da quest'osservazione e da quanto fatto negli ultimi due esempi si capisce che i criteri del rapporto e della radice sono particolarmente utili nello studio della convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$. Infatti, si può facilmente dimostrare che vale il seguente teorema

**Teorema.** *Sia* $\lim_n \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_n \sqrt[n]{|c_n|} = L$*; allora, posto*

$$r = \begin{cases} +\infty & \text{se } L = 0 \\ \dfrac{1}{L} & \text{se } 0 < L < +\infty \\ 0 & \text{se } L = +\infty \end{cases}$$

*si ha*

$$r = +\infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \qquad \text{converge assolutamente } \forall x \in \mathbb{R}$$

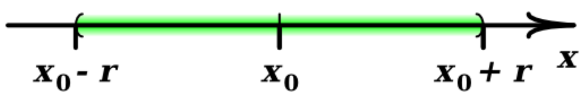
$$r = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \qquad \text{non converge per alcun } x \neq x_0$$

$$0 < r < +\infty \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \qquad \begin{array}{l} \text{converge assolutamente per } |x - x_0| < r \\ \text{non converge per } |x - x_0| > r \end{array}$$

**Definizione.** *(raggio di convergenza)*
*La quantità* **r** *nel teorema precedente si chiama* ***raggio di convergenza*** *della serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$.

Il teorema precendente dice quindi che una serie di potenze converge assolutamente in un intervallo aperto centrato in $x_0$, e precisamente nell'intervallo

$$(x_0 - r,\; x_0 + r)$$




e non converge fuori dall'intervallo chiuso $[x_0 - r, x_0 + r]$

OSSERVIAMO che il teorema non ci dice nulla su come si comporta la serie nei punti $x = x_0 - r$ e $x = x_0 + r$, cioè negli estremi dell'intervallo di convergenza (ciò non è stupefacente poiché i punti $x_0 - r$ e $x_0 + r$ sono quelli in cui i limiti dei criteri del rapporto e della radice applicati alla serie sono uguali ad 1 e quindi non significativi). Negli estremi $x_0 - r$ e $x_0 + r$ la convergenza va studiata caso per caso, essendo possibili tutte le seguenti situazioni

$$\text{zona di convergenza} \;=\; \begin{cases} (x_0 - r,\; x_0 + r) \\ [x_0 - r,\; x_0 + r) \\ (x_0 - r,\; x_0 + r] \\ [x_0 - r,\; x_0 + r] \end{cases}$$

(la convergenza negli estremi può essere anche solo semplice)

### Esempi

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n;\ r=1$ in $x=1$ la serie diverge a $+\infty$

in $x=-1$ la serie è indeterminata
l'intervallo di convergenza è I=(-1,1)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};\ r=1$ in $x=1$ la serie diverge a $+\infty$

in $x=-1$ la serie converge semplicemente (criterio di Leibniz)
l'intervallo di convergenza è I=[-1,1)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};\ r=e$ in $x=\pm 1$ la serie converge assolutamente

l'intervallo di convergenza è $I=[-1,1]$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}(x-x_0)^n;\ r=e$ in $x-3=e$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1$ e diverge a $+\infty$

in $x-3=-e$ la serie diventa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}(-e)^n =$

$\displaystyle= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}(-1)^n e^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ed è indeterminata
l'intervallo di convergenza è $I=(3-e, 3+e)$

**Nota** Osseriviamo che si potrebbe definire il raggio di convergenza anche se i limiti del teorema precedente non esistessero, ma ciò esula dagli scopi del nostro corso.

Enunciamo ora, senza dimostrarlo, un teorema molto importante ed utile sulle serie di potenze:

**Teorema.** *Sia* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *convergente per* $|x|<r$*; allora esiste*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)'$$

*e vale*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad \forall x \in (-r, r)$$

*(cioè, le serie di potenze si possono derivare termine a termine).*

**Esempio 1** Da $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x|<1$, ricaviamo

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)', \text{ cioè } \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \forall x : |x| < 1$$

**Esempio 2** Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$; allora

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \overset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x)$$

Abbiamo così scoperto che

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

quindi $f(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Esempio 3** Integrando l'uguaglianza

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n, \ |t| < 1$$

fra 0 ed $x$, $-1 < x < 1$, si ottiene

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \, dt = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots\right) dt =$$

$$= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \ldots \Big]_0^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Poiché

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \log(1+t)]_0^x = \log(1+x) - \log(1) = \log(1+x)$$

risulta

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

**Esempio 4** Analogamente, a partire da

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-t^2\right)^n, \ |t| < 1$$

si ottiene

$$\arctan(x) = \ldots \text{ provate a farlo!}$$

Dopo questi esempi viene abbastanza naturale domandarsi se ogni funzione si possa scrivere come una serie di potenze e, se sì, se ci sia un modo sistematico per farlo.

Facciamo un conto:

Supponiamo che $f(x)$ sia sviluppabile in serie di potenze,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

e vediamo come devono essere i coefficienti della serie. Si ha $f(0) = c_0$ e, derivando, si ottiene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots$$

da cui $f'(0) = c_1$. Derivando ancora si ottniene

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + \ldots$$

da cui $f''(0) = 2c_2$, cioè $c_2 = \dfrac{f''(0)}{2}$. Derivando un'altra volta si ottiene

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) c_n x^{n-3} = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4 x + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2c_5 x^2 + \ldots$$

da cui $f'''(0) = 3 \cdot 2c_3$, cioè $c_3 = \dfrac{f'''(0)}{3 \cdot 2} = \dfrac{f'''(0)}{3!}$.

In generale, si ottiene

$$\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

e quindi possiamo affermare che se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $|x| < r$, allora si ha precisamente

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

Questa serie si chiama serie di **Taylor** della funzione $f$ centrata in $x_0 = 0$.

**Nota** Lo studente può notare che se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, $|x - x_0| < r$, allora

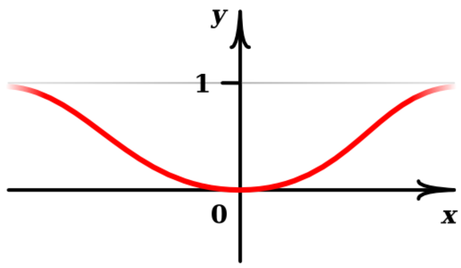
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Infatti, basta porre $t = x - x_0$, $g(t) = f(t + x_0) = f(x)$ ed applicare quanto fatto prima a

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \;\; |t| < r$$

In particolare, se $f$ è sviluppabile in serie di Taylor, centrata in $x_0 = 0$, allora $f$ è derivabile infinite volte in $x_0 = 0$. Il viceversa purtroppo **non è vero**; ad esempio, se

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$




risulta $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

cioè

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \;\; \forall x \neq 0$$

Diamo allora la seguente definizione.

**Definizione.** *Diremo che $f(x)$* ***è sviluppabile in serie di Taylor*** *in un intorno dell'origine se esiste $r > 0$ tale che*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \forall x : |x| < r$$

*In generale, $f(x)$ si dice sviluppabile in serie di Taylor in un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste $r > 0$ tale che*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \qquad \forall x : |x - x_0| < r$$

A questo punto siamo interessati a vedere se ci sono condizioni che permettano di assicurare la sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor.

Per trovare tali condizioni, facciamo un passo indietro per parlare di **polinomi di Taylor**.

La storia dei polinomi di Taylor comincia con un polinomio di grado 1, cioè una retta. Vi ricordate che se $f$ era una funzione derivabile e consideravamo la sua retta tangente $T(x)$ per $x = x_0$, cioè

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

si aveva $T(x_0) = f(x_0)$ e

$$\frac{E_1(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - T(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

Se ora $f$ è due volte derivabile in $x_0$ e consideriamo il polinomio di secondo grado

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

risulta $P_2(x_0) = f(x_0)$ e

$$\frac{E_2(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

infatti

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = \\ \text{Hôpital} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - f''(x_0) \right] = 0 \end{aligned}$$

Immaginerete già come va avanti la storia: se $f$ è tre volte derivabile in $x_0$ consideriamo il polinomio di grado 3

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

L'approssimazione di $f$ con $P_3$ è ancora migliore nel senso che $P_3(x_0) = f(x_0)$ e inoltre

$$\frac{E_3(x)}{(x - x_0)^3} = \frac{f(x) - P_3(x)}{(x - x_0)^3} \xrightarrow{x \to x_0} 0, \text{ infatti}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_3(x)}{(x - x_0)^3} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3}{(x - x_0)^3} = \\ \text{Hôpital} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \frac{f'''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{3(x - x_0)^2} = \\ \text{Hôpital} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0) - f'''(x_0)(x - x_0)}{6(x - x_0)} = \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x \to x_0} \left[ \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} - f'''(x_0) \right] = 0 \end{aligned}$$

In generale, se $f$ è derivabile $n$ volte in $x_0$, posto

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$E_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

avremo $E_n(x_0) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{E_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

**Definizione.** *Sia $f$ derivabile $n$ volte in $x = x_0$; il polinomio*

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

*si chiama* ***polinomio di Taylor*** *della funzione $f$ centrato in $x = x_0$.*

Si vede facilmente che $P_n$ è **l'unico** polinomio di grado al più $n$ a verificare i due risultati generali appena visti.

Osservazione Non avrete mancato di osservare che $P_n$ non è altro che la somma parziale n-esima della serie di Taylor centrata in $x = x_0$ della funzione $f(x)$.

Che cosa manca quindi per poter affermare che la somma della serie di Taylor di $f$ è proprio $f$? Deve essere

$$\boxed{\lim_n E_n(x) = 0}$$

cioè

$$\boxed{\lim_n \left[f(x) - P_n(x)\right] = 0}$$

Riguardo all'errore $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, noi abbiamo visto che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x - x_0} = 0$$

ma questo riguarda la bontà dell'approssimazione quando $x \to x_0$. Come capire invece qualcosa riguardo all'approssimazione di $f(x)$ con $P_n(x)$ quando $n \to +\infty$? Ci viene in aiut0 una scrittura più esplicita dell'errore, che deriva da un sapiente uso del teorema di De L'Hôpital. Si dimostra che, se $f$ è $n+1$ volte derivabile in un intorno di $x_0$, allora, per ogni $x$ in tale intorno esiste $c$ compreso fra $x$ ed $x_0$ tale che

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}} \text{ resto di Lagrange}$$

Si ha quindi

$$\boxed{f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}$$

Ecco che in questo modo, se ad esempio la derivata $(n+1)$-esima della funzione $f$ è limitata,

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M \qquad \forall x \text{ nell'intorno di } x_0$$

ho che l'errore $E_n(x) \xrightarrow{n} 0$ $\forall x$ nell'intorno di $x_0$ e quindi $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor. Infatti

$$|E_n(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \le M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n} 0$$

Vediamo qualche esempio

**Esempio 1** Scriviamo il polinomio di Taylor di grado $n$ centrato in $x = 0$ di $f(x) = \sin x$. Si ha

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x, \;\; f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\sin x, \;\; f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x, \;\; f'''(0) = -1$$

$$f''''(x) = \sin x, \;\; f''''(0) = 0$$

e si vede che si ricomincia da capo. Abbiamo così che in generale

$$\begin{cases} f^{(n)}(x) = \pm \sin x \\ f^{(n)}(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{se } n \text{ è pari}$$

$$\begin{cases} f^{(n)}(x) = \pm \cos x \\ f^{(n)}(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{se } n \text{ è dispari}$$

e quindi

$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Inoltre

$$E_{2n+1}(x) = \sin x - P_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \frac{\pm \sin c}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

dove $c$ è un punto opportuno fra 0 e $x$. Si ha quindi

$$|E_{2n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow{n} 0 \qquad \forall x$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Esempio 2** Analogamente si può vedere che

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

**Esempio 3** Recuperiamo seguendo questa via anche l'informazione che avevamo già ottenuto sull'esponenziale e cioè che

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\begin{array}{ccccc} f(x)=e^x & f'(x)=e^x & f''(x)=e^x & \dots & f^{(n)}(x)=e^x \\ f(0)=1 & f'(0)=1 & f''(0)=1 & & f^{(n)}(0)=1 \end{array}$$

Risulta perciò

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$$

$$E_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=e^c\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n}0$$

Quindi

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad\forall x\in\mathbb{R}$$

**Esempio 4** Lascio a voi ottenere lo sviluppo di $f(x)=\log(1+x)$ centrato in $x=0$

**Attenzione all'errore!**

È bene conoscere a memoria lo sviluppo delle funzioni che vengono usate più frequentemente:

$$e^x,\ \log(1+x),\ \sin x,\ \cos x,\ \frac{1}{1-x},\ \arctan x,\ \text{eccetera}$$

Segnaliamo che la formula del binomio di Newton

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\qquad n\in\mathbb{N}$$

dove $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$, si generalizza per esponente $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

dove $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$.

A partire dalle serie di Taylor delle funzioni più note si possono trovare velocemente tantissimi altri sviluppi senza dover fare ogni volta il calcolo del corrispondente polinomio di Taylor di grado $n$. Basta fare opportune sostituzioni; ad esempio da

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}+\ldots$$

si può ricavare lo sviluppo di $e^{20x}$ ponendo $20x=t$; si ha

$$e^{20x}=1+20x+\frac{(20x)^2}{2}+\frac{(20x)^3}{3!}+\ldots+\frac{(20x)^n}{n!}+\ldots$$

ed anche

$$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{3!}+\ldots+\frac{\sin^n x}{n!}+\ldots$$

e così via.

Concludiamo questo argomento parlando di due situazioni dove è evidente l'utilità degli sviluppi di Taylor:

1. Nel calcolo dei limiti, quando siamo di fronte a delle forme indeterminate, approssimando con i corrispondenti polinomi di Taylor le funzioni che compaiono. In questi casi è spesso semplice capire che cosa succede, anche in casi in cui l'uso ripetuto del teorema di De L'Hôpital sarebbe piuttosto complicato. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+\ldots}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+\ldots\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots\right)=1$$

2. Nel calcolo di integrali di funzioni che non hanno primitive esprimibili elementarmente. Con la formula di Taylor, usando il resto di Lagrange, si può approssimare l'integrale con l'accuratezza voluta. Ad esempio

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\frac{1}{x}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\pm\sin c\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right]dx\pm\int_0^1\sin c\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}dx$$

Il primo integrale si calcola tranquillamente, mentre l'errore (secondo integrale) si maggiora facilmente

$$|\text{ Errore }|\le\int_0^1|\sin c|\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}dx\le\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}dx=\frac{1}{(2n+2)\,(2n+2)!}$$

# Capitolo 5

# Equazioni differenziali

## 5.1 Equazione differenziale ordinaria

### 5.1.1 Definizione

Un'**equazione differenziale ordinaria** è una relazione del tipo

$$g\left(t, y\left(t\right), y'\left(t\right), \ldots, y^{(n)}\left(t\right)\right) = 0$$

tra una variabile indipendente $t$, una **funzione incognita** $y\left(t\right)$ ed un numero finito delle sue derivate $y'\left(t\right)$, $y''\left(t\right)$, ..., $y^{(n)}\left(t\right)$; $g$ è una funzione di $n+2$ variabili nota.

L'equazioe si dice di **ordine** $n$ se la derivata di ordine massimo che compare è quella n-esima. In particolare, un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine sarà del tipo

$$g\left(t, y\left(t\right), y'\left(t\right)\right) = 0$$

Osserviamo che se in questa equazione si può esplicitare la derivata di ordine massimo, si avrà un'equazione della forma

$$y^{(n)}\left(t\right) = f\left(t, y\left(t\right), y'\left(t\right), \ldots, y^{(n-1)}\left(t\right)\right)$$

più facilmente affrontabile. L'equazione di ordine 1 diventa

$$y'\left(t\right) = f\left(t, y(t)\right)$$

Il problema di esplicitare la derivata di ordine massimo è un problema generale (teorema della funzione implicita) che non riguarda l'essenza della teoria delle equazioni differenziali ordinarie. Le equazioni sopra si dicono in **forma normale** e sarà di questo tipo di equazioni che ci occuperemo nel seguito.

Cominciamo a studiare l'equazione di primo ordine in forma normale

$$\boxed{y'\left(t\right) = f\left(t, y\left(t\right)\right)}$$

Aggiungiamo anche una **condizione iniziale** (o condizione di "passaggio")

$$\boxed{y(t_0) = y_0}$$

Si ha così il problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

noto come **problema di Cauchy**.

### 5.1.2 Alcuni esempi importanti

**Esempio** 1798: il modello malthusiano di crescita della popolazione mondiale è governato dall'equazione

$$y'(t) = ay(t)$$

dove $a > 0$, $a = \alpha - \beta$, $\alpha$ è il tasso di natalità, $\beta$ è il tasso di mortalità (sperimentalmente si ottiene $a \simeq \frac{1}{50}$).

In questo modello la popolazione cresce proporzionalmente alla popolazione esistente e quindi, se $y_0 = y(0)$ è la popolazione al tempo $t = 0$, l'andamento della popolazione mondiale sarà dato dalla soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Osserviamo che questo modello descrive anche il modello di crescita del capitale bancario e, se $a < 0$, potrebbe essere anche il modello del decadimento di un materiale radioattivo.

Se scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = a$$

ed integriamo ambo i membri tra 0 e $t$, otteniamo

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{y(\tau)} d\tau = \int_0^t a d\tau = at$$

Ma

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{y'(\tau)}{y(\tau)} d\tau &= \\ \left[ \begin{array}{c} y(\tau) = s \\ y'(\tau)\, d\tau = ds \end{array} \right] &= \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{ds}{s} = \\ &= \log|s|\Big]_{y(0)=y_0}^{y(t)} = \\ &= \log|y(t)| - \log|y_0| = \\ &= \log \frac{|y(t)|}{|y_0|} = \\ y(t) \text{ sarà positivo} &= \log \frac{y(t)}{y_0} \end{aligned}$$

e quindi $\log\left(\frac{y(t)}{y_0}\right) = at$, da cui

$$\frac{y(t)}{y_0} = e^{at}$$

cioè

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{at}}$$

(Teniamo bene a mente il metodo con cui abbiamo trovato $y(t)$, ci sarà molto utile in seguito, anche in casi più generali!)

Se volessimo sapere in quanto tempo $\bar{t}$ raddoppia la popolazione? Dev'essere $y(\bar{t}) = 2y_0$, cioè $2 = e^{a\bar{t}}$, quindi

$$2 = e^{\frac{\bar{t}}{50}} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{t} = 50\log(2) \simeq 35 \qquad (\log(2) = 0.69314\ldots)$$

Quindi, il modello di Malthus prevede il raddoppio della popolazione ogni 35 anni circa. Tuttavia, nei modelli di crescita di una popolazione, la crescita non avviene in modo lineare; ad esempio,quando la popolazione aumenta troppo, si può verificare un problema di scarsità di risorse e quindi la crescita rallenta. Sono stati proposti molti modelli che cercano di descrivere più fedelmente l'evoluzione di una popolazione data, tenendo appunto conto di fatti come il rapporto tra popolazione e risorse disponibili, o come la competizione con altre popolazioni o ancora come la possibilità di malattie.

**Esempio** Un'alternativa di questo tipo è stata proposta da Verhulst nel 1845, il quale modellizza la dinamica della popolazione con l'equazione

$$\boxed{y'(t) = [a - by(t)]\,y(t)} \qquad a > 0,\, b > 0$$

in cui il tasso di crescrita $a - by(t)$ non è più costante, ma decresce linearmente al crescere della popolazione $y(t)$. Questa equazione è nota come **equazione della logistica**. Per risolverla, scriviamola nella forma

$$\frac{y'(t)}{[a - by(t)]\,y(t)} = 1 \qquad (\text{supposto } y(t) \neq 0,\ a - by(t) \neq 0)$$

e come prima, integriamo ambo i membri tra 0 e $t$. Otteniamo

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{[a - by(\tau)]\,y(\tau)}d\tau = \int_0^t 1 d\tau = t$$

Ma

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{y'(\tau)}{[a-by(\tau)]\,y(\tau)}d\tau &= \\ &= \int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{s(a-bs)} = \\ &= \frac{1}{a}\int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{s} + \frac{b}{a}\int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{a-bs} = \\ &= \frac{1}{a}\log\left(\frac{y(t)}{y_0}\right) + \frac{b}{a}\left(-\frac{1}{b}\right)\log\left(\frac{a-by(t)}{a-by_0}\right) = \\ &= \frac{1}{a}\log\left(\frac{y(t)(a-by_0)}{y_0(a-by(t))}\right)\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{ricordiamo che se } C \neq D \text{ si può sempre scrivere} \\ \dfrac{Ax+B}{(x-C)(x-D)} = \dfrac{M}{x-C} + \dfrac{N}{x-D}\end{array}\right]$$

e quindi, passando all'esponenziale

$$\frac{y(t)(a-by_0)}{y_0(a-by(t))} = e^{at}, \quad \text{cioè } \frac{y(t)}{a-by(t)} = \frac{y_0}{a-by_0}e^{at}$$

Possiamo ora ricavare $y(t)$, che è definita implicitamente da quest'ultima uguaglianza. Si ha

$$y(t) = (a-by(t))\frac{y_0}{a-by_0}e^{at} = \frac{ay_0}{a-by_0}e^{at} - \frac{by_0}{a-by_0}y(t)e^{at}$$

da cui

$$y(t)\left[1+\frac{by_0}{a-by_0}e^{at}\right] = \frac{ay_0}{a-by_0}e^{at}, \quad \text{cioè}$$

$$y(t) = \frac{a-by_0}{a-by_0+by_0e^{at}}\cdot\frac{ay_0}{a-by_0}e^{at} = \frac{ay_0e^{at}}{a-by_0+by_0e^{at}} = \frac{ay_0}{by_0+(a-by_0)e^{-at}}$$

e infine

$$\boxed{y(t) = \frac{a}{b+\frac{a-by_0}{y_0}e^{-at}}}$$

dove $y_0 > 0$ e, come avevamo supposto nelle pagine precedenti, $a - by_0 \neq 0$.
Se $a-by_0 = 0$, cioè $y_0 = \frac{a}{b}$, non posso più scrivere l'equazione nella forma $\frac{y'(t)}{[a-by(t)]\,y(t)} = 1$.
In questo caso la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'(t) = [a-by(t)]\,y(t) \\ y(0) = \dfrac{a}{b}\end{cases}$$

è la costante $\frac{a}{b}$, cioè $y(t) = \frac{a}{b}$, $\forall t$.

**Osservazione** Facciamo solo un'altra osservazione. Notiamo che la soluzione trovata un attimo fa verifica

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \frac{a}{b}$$

e quindi la popolazione tende a stabilizzarsi attorno ad un valore di equilibrio che risulta dalla compensazione di fattori favorevoli ($a$) e sfavorevoli ($b$).

L'andamento della popolazione, a seconda che $\frac{a}{b}$ sia maggiore, uguale o minore di $y_0$, è riportato in figura (vedremo più avanti un'analisi qualitativa della soluzione).


$$\left( \text{se } y_0 < \frac{1}{2}\frac{a}{b},\ y(t) \text{ cambia curvatura in } \frac{a}{2b} \right)$$

### 5.1.3 Esistenza e unicità della soluzione

Torniamo a considerare il **problema di Cauchy** in generale

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ci sarebbe estremamente utile avere un **teorema di esistenza ed unicità** che dicesse che il problema ha soluzione e che questa soluzione è unica. Nel caso in cui l'equazione differenziale rappresenti il modello di una situazione reale, è evidente l'importanza fisica e filosofica di un risultato di esistenza ed unicità di questo tipo: se il modello è corretto, il sistema dovrà evolvere in qualche modo (e quindi ci devono essere soluzioni del problema di Cauchy), mentre l'unicità di soluzione corrisponde al requisito di **ripetibilità di un esperimento** (il sistema deve reagire nello stesso modo se sono identiche le condizioni iniziali: **determinismo**). Facciamo qui di seguito due osservazioni che ci faranno capire meglio che teorema ci dovremmo aspettare.

**Osservazione 1** Anche se il secondo membro dell'equazione

$$f(t, y(t))$$

è estremamente regolare, possiamo sperare solo in un teorema di esistenza ed unicità **locale**, che ci assicuri l'esistenza di una soluzione in un opportuno intorno del punto (o tempo) iniziale $t_0$. Vediamo con un paio di esempi:

**Esempio 1** $\begin{cases} y'(t) = y^2(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ; usando lo stesso metodo di prima, scrivendo l'equazione nella forma

$$\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 1$$

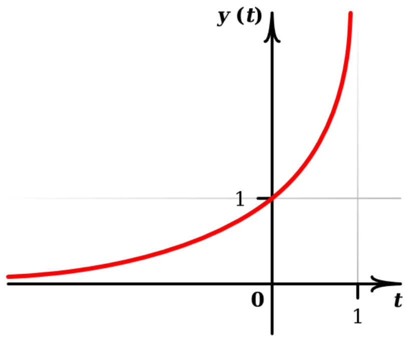
ed integrando fra 0 e $t$, otteniamo

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{y^2(\tau)} d\tau = \int_0^t 1 \cdot d\tau = t$$

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{y^2(\tau)} d\tau = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{s}\Big]_{y_0}^{y(t)} = -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = 1 - \frac{1}{y(t)}$$

risulta

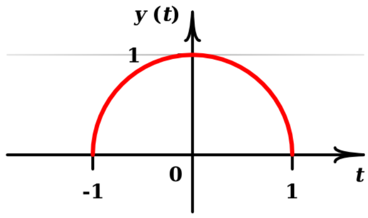
$$1 - \frac{1}{y(t)} = t$$




Esplicitando $y(t)$, si ottiene $\boxed{y(t) = \frac{1}{1-t}}$. La funzione $y(t) = \frac{1}{1-t}$ ha un asintoto verticale in $t = 1$ e quindi la soluzione del problema è definita solo per $t < 1$.

**Esempio 2** $\begin{cases} y'(t) = -\dfrac{t}{y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ; procedendo come in precedenza ci riduciamo a calcolare

$$\int_0^t y'(\tau)\, y(\tau)\, d\tau = \int_0^t -\tau d\tau = \frac{t^2}{2}$$




ottenendo così

$$\frac{1}{2} y^2(t) - \frac{1}{2} = -\frac{t^2}{2}$$

e quindi

$$y^2(t) = 1 - t^2, \text{ cioè}$$

$$y(t) = \sqrt{1 - t^2}$$

(scelgo la radice positiva per via della condizione iniziale). Ma la funzione $y(t) = \sqrt{1-t^2}$ è definita solo in $-1 \leq t \leq 1$.

**Osservazione 2** Vediamo ora che la sola continuità della funzione $f(t, y)$ non garantisce unicità di soluzione.

$$f(t, y) \text{ continua in } (t_0, y_0) \text{ significa semplicemente che}$$

$$\begin{matrix} t_n \xrightarrow{n} t_0 \\ y_n \xrightarrow{n} y_0 \end{matrix} \qquad \Longrightarrow \qquad f(t_n, y_n) \xrightarrow{n} f(t_0, y_0)$$

Di questo concetto ci occuperemo più avanti

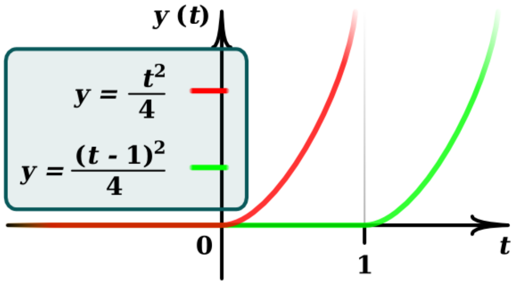
**Ad esempio** il problema

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni. Infatti, si vede subito che $y(t) = 0$ è una soluzione e inoltre procedendo come negli esempi precedenti, scopriamo che la funzione $y(t) = \frac{t^2}{4}$, $\forall t > 0$ è anch'essa una soluzione; infatti $\int_0^t \frac{y'(\tau)}{\sqrt{y(\tau)}} d\tau = \int_0^t 1 d\tau$, cioè $\sqrt{y(t)} = \frac{t}{2}$ e quindi $y(t) = \frac{t^2}{4}$. Si fa poi presto ad osservare che sono soluzioni anche tutte le funzioni

$$y(t) = \begin{cases} \frac{(t-a)^2}{4} & \text{se } t > a \\ 0 & \text{se } t \leq a \end{cases}$$

dove $a > 0$.




A questo punto è chiaro che il nostro teorema di esistenza ed unicità potrà darci soltanto un risultato di esistenza locale e che per avere l'unicità dovremo chiedere di più che la sola continuità della funzione $f = f(t, y)$. Le nostre forze non ci permettono di enunciare e dimostrare un tale teorema: avremmo bisogno di più teoria. Per questo motivo soprassediamo, dicendo solo che se la funzione $f = f(t, y)$ è continua e inoltre, guardata come funzione di $y$, ha derivata limitata, allora il problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione in un intorno di $t = t_0$ e tale soluzione è unica.

## 5.2 Risolvere il problema di Cauchy

### 5.2.1 Equazioni differenziali a variabili separabili

Concentriamoci in questo corso su classi di equazioni per le quali tutto fila liscio. Ad esempio, il trucchetto usato per risolvere i semplici problemi considerati in precedenza, si applica a tutta una classe di equazioni differenziali dette a **variabili separabili**.

Supponiamo che sia

$$f(t,y) = \frac{A(t)}{B(y)}$$

dove $A(t)$ e $B(t)$ sono due funzioni continue, definite rispettivamente in intorni di $t_0$ ed $y_0$ e supponiamo inoltre che sia

$$B(y_0) \neq 0$$

Allora possiamo dice che esiste un intorno di $t_0$ dove il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{A(t)}{B(y(t))} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione ed essa è unica.

L'idea della dimostrazione è la stessa usata nei nostri esempi. Deve essere

$$\int_{t_0}^{t} B(y(\tau))\, y'(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau$$

cioè

$$\int_{y_0}^{y(t)} B(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau$$

Da un punto di vista pratico ci sono due problemi: trovare le primitive delle funzioni $A$ e $B$ (cosa non sempre possibile in termini di funzioni elementari) ed esplicitare la $y(t)$, che l'integrazione dà solo in forma implicita. Questi due problemi vanno affrontati caso per caso

### 5.2.2 Equazioni lineari del primo ordine

Un'altra classe di equazioni del primo ordine che si possono risolvere esplicitamente con degli specifici passaggi è costituito dalle **equazioni lineari del primo ordine**; esse sono della forma

$$\boxed{y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t)}$$

dove $a(t)$, $b(t)$ sono funzioni continue assegnate.

L'equazione si dice **lineare** per il fatto che l'operatore $L$ definito da

$$L(y) = y' + ay$$

è un operatore lineare; infatti

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$$

$\forall c_1, c_2$ costanti, $\forall y_1, y_2$ funzioni derivabili.

Vediamo ora che il problema di Cauchy associato

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha soluzione (**globale**, cioè definita $\forall t \in \mathbb{R}$) e tale soluzione è unica. Inoltre, la soluzione si trova in forma esplicita.

Il trucco è trovare una primitiva $A(t)$ di $a(t)$ e moltiplicare l'equazione per $e^{A(t)}$; si ottiene

$$e^{A(t)} y'(t) + a(t)\, e^{A(t)} y(t) = b(t)\, e^{A(t)}$$

A questo punto osserviamo che il membro di sinistra è la derivata del prodotto $e^{A(t)} y(t)$; si ha così

$$\left(e^{A(t)} y(t)\right)' = b(t)\, e^{A(t)}$$

Basta ora essere in grado di trovare la primitiva $F(t)$ di $b(t)\, e^{At}$ per avere

$$\left(e^{A(t)} y(t)\right)' = F'(t)$$

e quindi

$$e^{A(t)} y(t) = F(t) + k$$

da cui

$$y(t) = e^{-A(t)}\left[F(t) + k\right]$$

imponendo ora ad $y(t)$ la condizione $y(t_0) = y_0$ si determina la costante $k$ e si ha la soluzione.

**Per fare un esempio** risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - 2ty(t) = te^{t^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Si ha $a(t) = -2t$, $A(t) = -t^2$, e quindi, moltiplicando l'equazione per $e^{-t^2}$, si ottiene

$$\underbrace{e^{-t^2} y'(t) - 2te^{-t^2} y(t)}_{\left(e^{-t^2} y(t)\right)'} = t$$

Poiché, posto $F(t) = \dfrac{t^2}{2}$, si ha $F'(t) = t$, l'equazione diventa

$$\left(e^{-t^2} y(t)\right)' = \left(\frac{t^2}{2}\right)'$$

e quindi

$$e^{-t^2} y(t) = \frac{t^2}{2} + k$$

da cui

$$y(t) = e^{t^2}\frac{t^2}{2} + e^{t^2}k$$

Imponendo $1 = y(0) = e^0 \cdot 0 + e^0 \cdot k = k$, si ottiene la soluzione

$$y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)$$

### 5.2.3 Caso generale

Ritorniamo al caso generale $y'(t) = f(t, y(t))$. Prima di affrontare la ricerca di una soluzione (almeno approssimata), osserviamo che se abbiamo l'esistenza e l'unicità della soluzione, allora per ogni punto del piano passa una ed una sola soluzione dell'equazione differenziale. Questa semplice osservazione consente spesso di fare uno studio qualitativo delle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria: in altre parole, è spesso possibile disegnare con buona approssimazione l'andamento delle soluzioni **senza dover risolvere esplicitamente la soluzione**.

Come esempio potremo riprendere un caso trattato precedentemente, quello dell'equazione della logistica, dove abbiamo trovato esplicitamente la soluzione. Vedremo adesso che cosa è possibile dedurre dall'equazione senza risolverla. Consideriamo il caso $a = b = 1$. Il problema è

$$\begin{cases} y'(t) = (1 - y(t))\, y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Osservazione utile

Notiamo innanzitutto che $f(t, y) = f(y) = (1 - y)\, y$ è regolare e non dipende da $t$. In questo caso l'equazione si dice **autonoma**; non è difficile verificare che le equazioni autonome hanno la seguente proprietà: se $y(t)$ è soluzione, anche $g(t) = y(t - t_0)$, ottenuta tramite una traslazione lungo l'asse delle $t$, è ancora soluzione. Infatti se $y(t)$ è soluzione, cioè $y'(t) = f(y(t))$, allora $g'(t) = (y(t - t_0))' = y'(t - t_0) \cdot 1 = f(y(t - t_0)) = f(g(t))$ (si veda anche l'equazione vista precedentemente $y' = \sqrt{y}$)

Ma torniamo a noi. La derivata della funzione $f(y) = (1 - y)\, y$, che qui è appunto funzione della sola variabile $y$, è limitata in qualunque intorno di qualunque punto $(t_0, y_0)$, infatti

$$f'(y) = 1 - 2y$$

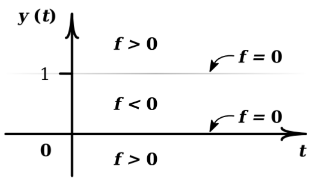
È possibile quindi applicare il teorema di esistenza ed unicità locale per qualunque punto iniziale $(t_0, y_0)$. Inoltre

$$f(t,y) = f(y) = 0 \text{ se } y = 0 \text{ o se } y = 1$$

si hanno dunque due soluzioni costanti

$$y(t) = 0 \quad \forall t, \; y(t) = 1 \quad \forall t$$

Grazie al teorema di esistenza e unicità locale una qualunque altra soluzione non potrà dunque intersecare le rette orizzontali $y = 0$ e $y = 1$.




Osserviamo poi che la funzione $f$ $(= y')$ è positiva per $y \in (0,1)$, mentre è negativa se $y > 1$ o $y < 0$. Ne segue che le soluzioni contenute nella striscia $0 < y < 1$ sono crescenti, mentre le soluzioni contenute nei semipiani $y < 0$ o $y > 1$ sono decrescenti. Inoltre, per la ragione detta sopra (l'invalicabilità delle rette $y = 0$ e $y = 1$), se la soluzione è contenuta in uno di questi tre insiemi nell'istante iniziale, è costretta a rimanervi per tutto il suo tempo di vita.

Vediamo che cosa succede ad una soluzione con dato iniziale $y(0) = y_0$, con $0 < y_0 < 1$; una tale soluzione rimarrà sempre nella striscia $0 < y < 1$ e sarà quindi sempre crescente. Avremo esistenza globale (la soluzione non può divergere a $\pm\infty$ in quanto è confinata nella striscia) e grazie alla monotonia esisteranno

$$l_1 = \lim_{t\to+\infty} y(t) \text{ ed } l_2 = \lim_{t\to-\infty} y(t)$$

(la soluzione ha due **asintoti orizzontali**. In realtà deve essere $l_1 = 1$ e $l_2 = 0$, perché quando una funzione $y(t)$ monotona e derivabile si avvicina ad un asintoto orizzontale per $t \to \pm\infty$ la derivata deve sempre tendere a 0 e d'altra parte il secondo membro dell'equazione si annulla solo per $y = 0$ e per $y = 1$. In effetti, passando al limite per $t \to +\infty$ nell'equazione si ottiene

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t)(1 - y(t)) = l_1(1 - l_1)$$

e quindi $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$ solo se $l_1 = 1$. Analogamente

$$\lim_{t\to-\infty} y'(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t)(1 - y(t)) = l_2(1 - l_2)$$

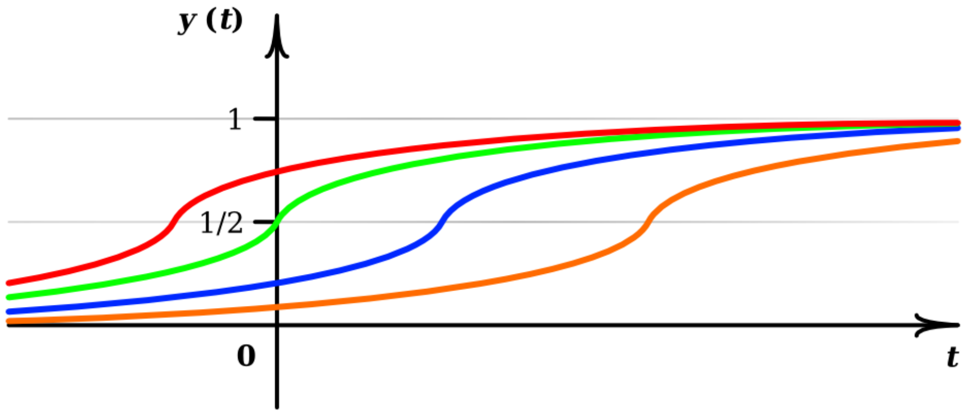
e quindi $\lim_{t\to-\infty} y'(t) = 0$ solo se $l_2 = 0$.

Se vogliamo studiare anche la convessità della nostra soluzione $y(t)$, $0 < y(t) < 1$, derivando l'equazione si ottiene

$$\begin{aligned} y''(t) &= (1 - y(t))' \, y(t) + (1 - y(t)) \, y'(t) = \\ \text{perché } y'(t) = (1 - y(t)) \, y(t) \quad &= -2y'(t) \, y(t) + y'(t) = \\ &= -2y(t)(1 - y(t)) \, y(t) + y(t)(1 - y(t)) = \\ &= \underbrace{y(t)}_{>0} \cdot \underbrace{(1 - y(t))}_{>0} \cdot \underbrace{(1 - 2y(t))}_{>0 \text{ se } y(t) < \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Quindi la funzione $y(t)$ è convessa in $0 < y(t) < \frac{1}{2}$ ed è concava in $\frac{1}{2} < y(t) < 1$, cioè passa da convessa a concava proprio a metà altezza.

Possiamo adesso disegnare con una certa accuratezza le soluzioni $y(t)$ corrispondenti ad un dato iniziale $y_0 \in (0, 1)$.




Veniamo ora alle soluzioni $y(t)$ con $y(0) = y_0 > 1$: esse sono decrescenti e con un ragionamento identico a quello fatto in precedenza si può dimostrare che

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 1$$

Per $t$ negativi invece tali soluzioni devono divergere a $+\infty$ (non ci può essere un asintoto orizzontale perché il secondo membro dell'equazione non si annulla per alcun $y > 1$). Il problema però è capire se questo avviene per $t \to -\infty$ o se invece la soluzione diverge in tempo finito, cioè se $\exists \bar{t} < 0$ tale che

$$\lim_{\substack{t \to \bar{t} \\ t > \bar{t}}} y(t) = +\infty$$

Vogliamo dimostrare che effettivamente c'è un **asintoto verticale** e quindi non si ha esistenza globale. Se separiamo le variabili e integriamo fra 0 e $t$ (conto peraltro già fatto) otteniamo

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{y(\tau)(1 - y(\tau))} d\tau = \int_0^t 1 d\tau = t \text{ cioè } \int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{s(1 - s)} = t$$

In sostanza l'integrale di sinistra (negativo) ci dice quanto tempo ci mette la soluzione ad arrivare all'altezza $y(t)$. In particolare, per rispondere alla nostra domanda, dovremo calcolare

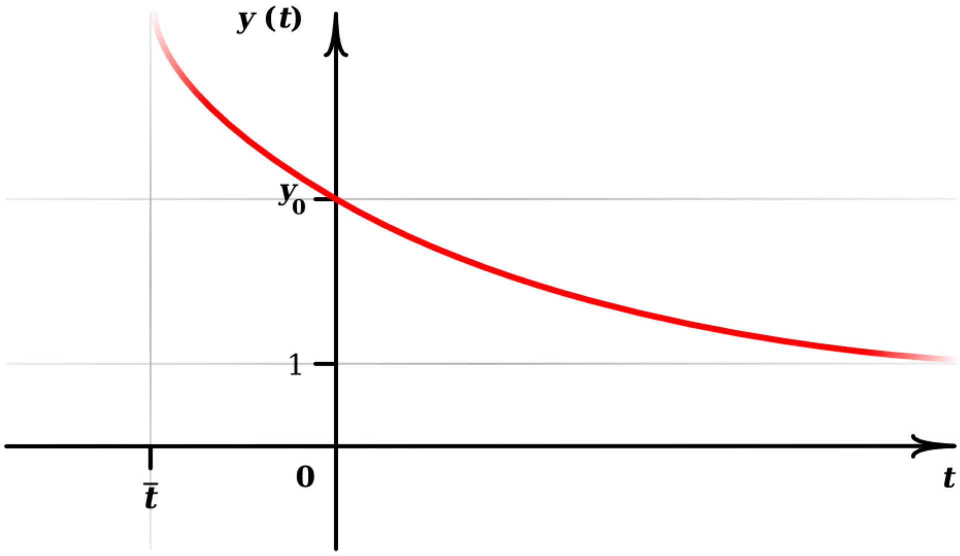
$$\bar{t} = \int_{y_0}^{+\infty} \frac{ds}{s(1-s)} = \lim_{y\to+\infty} \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s(1-s)}$$

Se questo limite è finito ci darà l'ascissa $\bar{t}$ dell'asintoto verticale, se invece è infinito sapremo che la soluzione esiste per ogni $t$ negativo. Anche senza calcolare l'integrale (cosa peraltro già fatta), possiamo usare la stima

$$|\bar{t}| = \left| \int_{y_0}^{+\infty} \frac{da}{s(1-s)} \right| \le \int_{y_0}^{+\infty} \frac{ds}{s(s-1)} \le \int_{y_0}^{+\infty} \frac{ds}{(s-1)^2} = \frac{1}{y_0 - 1}$$

e concludere che l'integrale è finito e quindi c'è asintoto verticale (e non esistenza globale).

In ultimo, $y''(t) > 0$ (il conto è lo stesso di prima) e quindi le soluzioni sono convesse. Anche per le soluzioni $y(t)$ con $y_0 > 1$ possiamo adesso disegnare un grafico abbastanza accurato




Lascio a voi fare analoghi ragionamenti per descrivere il comportamento delle soluzioni per $y_0 < 0$. Torna tutto, confrontando i nostri grafici con la soluzione esplicita trovata in precedenza?

Vedremo adesso un paio di metodi che permettono di ricavare o quanto meno di approssimare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

essi sono

1. la risoluzione per serie
2. il metodo di Eulero

### 5.2.4 Metodo di risoluzione per serie

L'idea è semplice: bisogna supporre che la soluzione del problema di Cauchy sia una funzione $y(t)$ sviluppabile in serie di potenze, cioè

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

e, usando il teorema di derivazione, risolvere l'equazione come uguaglianza tra due serie di potenze.

Poiché due serie di potenze sono uguali se e soltanto se lo sono tutti i loro coefficienti, da tale uguaglianza e dalla condizione iniziale ricaviamo man mano gli $a_n$ ed abbiamo così la funzione $y(t)$, o almeno una sua approssimazione.

**Ma facciamo un esempio** con un'equazione di cui conosciamo già la soluzione. Sarà gratificante vedere che arriveremo proprio dove già sapevamo di dover arrivare. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = ky(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(ci aspettiamo di trovare $y(t) = e^{kt}$). Supponiamo che sia $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$: si ha

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

e quindi l'equazione diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Poiché con un semplice cambio di indice, $i = n-1$, la serie a sinistra diventa $\sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} t^i$, posso riscrivere ancor meglio l'equazione:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n = k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Ora, poiché affinché le due serie siano uguali, devono essere ugualie i loro coefficienti, dovrà essere

$$(n+1) a_{n+1} = k a_n \qquad \forall n = 0, 1, 2....., \text{ cioè}$$

$$a_{n+1} = k\frac{a_n}{n+1} \qquad \forall n = 0, 1, 2.....$$

I coefficienti risultano così essere definiti mediante una relazione di ricorrenza e la condizione iniziale del problema di Cauchy mi dà il termine di partenza; infatti, da $y(0) = 1$ ricavo

$$a_0 = 1$$

La regola di ricorrenza trovata mi dà allora

$$a_1 = \frac{k}{1} = k, \ a_2 = k\frac{k}{2} = \frac{k^2}{2}, \ a_3 = k\frac{\frac{k^2}{2}}{3} = \frac{k^3}{3!}, \ a_4 = k\frac{\frac{k^3}{3!}}{4} = \frac{k^4}{4!}$$

e, in generale,

$$a_n = \frac{k^n}{n!}$$

Ho quindi trovato che la soluzione è

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kt)^n}{n!} = e^{kt}$$

**Nota** Poiché una serie di potenze si può derivare quanto si vuole, è chiaro che questo metodo non è limitato alle equazioni differenziali del primo ordine. Potete anticipare un esempio cercando di risolvere il seguente problema di Cauchy del secondo ordine:

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

[ È naturale che nei problemi si Cauchy del secondo ordine le condizioni iniziali siano due e siano di questo tipo, per poter determinare univocamente la soluzione (quando tutto va bene!) ]

La soluzione di questo problema si vede al volo; se $y(t) = \sin(t)$, si ha $y'(t) = \cos(t)$ e $y''(t) = -\sin(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e quindi $y(t) = \sin(t)$ è soluzione di tale problema. Anche $z(t) = \cos(t)$ verifica l'equazione differenziale, ma non le condizioni iniziali, in quanto $z(0) = 1$, $z'(0) = 0$.

Provate a scrivere l'equazione supponendo che la soluzione $y(t)$ sia sviluppabile in serie di potenze: dovreste trovare

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

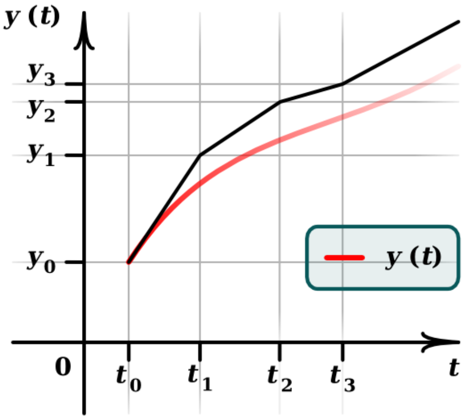
### 5.2.5 Metodo di Eulero

Un metodo per trovare un'approssimazione numerica della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è il cosiddetto **metodo delle tangenti** o **metodo di Eulero**, essendo stato Eulero il primo ad usarlo.

L'idea alla base del metodo è la seguente. Partendo da $(t_0, y_0)$ approssimo la soluzione $y(t)$ per un breve tratto, fino a $t = t_1$, con la sua retta tangente $y_1(t)$ (la cui pendenza $y'(t_0) = f(t_0, y_0)$ è fornita dall'equazione). Partendo poi da $(t_1, y_1(t_1)) = (t_1, y_1)$ considero per un breve tratto, fino a $t = t_2$, la retta $y_2(t)$ che ha pendenza $f(t_1, y_1)$. Riparto ora da $(t_2, y_2(t_2) = (t_2, y_2))$, eccetera.




Scriviamo formalmente quello che abbiamo detto supponendo di muoverci ogni volta di un tratto $h$ sull'asse delle ascisse. L'equazione della retta tangente alla soluzione $y(t)$ per $(t_0, y_0)$ è

$$y_1(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0), \qquad t \in [t_0, t_0 + h] = [t_0, t_1]$$

Sia $y_1 = y_1(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0) h$ e consideriamo adesso la retta $y_2(t)$ per $(t_1, y_1)$ con pendenza $f(t_1, y_1)$: la sua equazione è

$$y_2(t) = y_1 + f(t_1, y_1)(t - t_1), \qquad t \in [t_1, t_1 + h] = [t_1, t_2]$$

Consideriamo adesso la retta $y_3(t)$ per $(t_2, y_2)$ con pendenza $f(t_2, y_2)$: la sua equazione è

$$y_3(t) = y_2 + f(t_2, y_2)(t - t_2), \qquad t \in [t_2, t_2 + h] = [t_2, t_3]$$

eccetera.

Procedendo in questo modo al passo $(n+1)$-esimo considero la retta $y_{n+1}(t)$ per $(t_n, y_n)$ con pendenza $f(t_n, y_n)$: la sua equazione è

$$y_{n+1}(t) = y_n + f(t_n, y_n)(t - t_n), \qquad t \in [t_n, t_n + h] = [t_n, t_{n+1}]$$

In questo modo abbiamo costruito una **poligonale di vertici**

$$(t_n, y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

dove $(t_0, y_0)$ è il punto iniziale e

$$(t_{n+1}, y_{n+1}) = (t_0 + (n+1)\,h, y_n + f\,(t_n, y_n)\,h) \qquad \forall n \geq 0$$

È ragionevole pensare che queste poligonali convergano, quando $h \to 0$, alla soluzione $y\,(t)$ problema di Cauchy. Questo può essere dimostrato ma richiede strumenti matematici più sofisticati di quelli presentati in questo corso.

L'approssimazione in molti casi è molto lenta, ma ci sono metodi per migliorarla: questo comunque sarà argomento per i vostri corsi di analisi numerica. Vediamo invece il metodo di Eulero in pratica in un caso molto semplice; consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'\,(t) = y\,(t) \\ y\,(0) = 1 \end{cases}$$

[ Come in precedenza ci rifacciamo ad un problema noto, per avere la soddisfazione di riottenere il risultato per altra strada e poter aver subito conferma dell'esattezza dei nostri conti ]

In questo caso abbiamo $f\,(t, y\,(t)) = y\,(t)$ e quindi

$$y_1 = y_0 + f\,(t_0, y_0)\,h = 1 + y\,(t_0)\,h = 1 + y_0 h = 1 + h$$

$$y_2 = y_1 + f\,(t_1, y_1)\,h = y_1 + y_1 h = y_1\,(1+h) = (1+h)^2$$

$$y_3 = y_2 + f\,(t_2, y_2)\,h = y_2 + y_2 h = y_2\,(1+h) = (1+h)^3$$

e, in generale, $y_n = (1+h)^n$. Se come passo $h$ prendiamo $1/n$, abbiamo che

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è un'approssimazione di $y\,(t)$ nel punto $t_n = 0 + nh = 1$, cioè

$$y\,(1) \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ma sappiamo che la nostra soluzione è $y\,(t) = e^t$ ed è quindi

$$y\,(1) = e$$

Ancora una volta tutto torna, perché $\lim\limits_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

### 5.2.6 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Passiamo adesso alle **equazioni differenziali di ordine superiore**. Noi studieremo solo la classe delle equazioni **differenziali lineari del secondo ordine** e più precisamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)\, y'(t) + b(t)\, y(t) = r(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

dove $a(t)$, $b(t)$, $r(t)$ sono funzioni continue date.

Per questo tipo di problema abbiamo esistenza ed unicità (non lo dimostreremo). Ci limiteremo inoltre al caso in cui $a(t)$ e $b(t)$ sono costanti,

$$a(t) = a \quad \forall t, \qquad b(t) = b \quad \forall t$$

Il problema si può affrontare in tre passi:

1. cercare la soluzione generale $y_o(t)$ dell'**equazione omogenea associata**, cioè dell'equazione
$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

2. cercare una soluzione particolare $y_p(t)$ dell'equazione non omogenea ed avere quindi la soluzione generale $y(t) = y_o(t) + y_p(t)$ di tale equazione

3. imporre le condizioni iniziali e determinare quindi univocamente la soluzione del problema di Cauchy

Facciamo un passo alla volta.

**Passo 1** Concentriamoci sull'**equazione omogenea**

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

Per l'equazione lineare omogenea del primo ordine

$$y'(t) + ay(t) = 0 \qquad (a \text{ costante})$$

sappiamo già che la soluzione generale è

$$y(t) = ce^{-at} \qquad (c \text{ costante})$$

Questo suggerisce di provare a trovare, anche per quella del secondo ordine, soluzioni del tipo

$$y(t) = e^{kt} \qquad (k \text{ costante})$$

Poiché $y'(t) = ke^{kt}$, $y''(t) = k^2e^{kt}$, sostituendo nell'equazione, deve essere

$$k^2e^{kt} + ake^{kt} + be^{kt} = 0$$

cioè

$$e^{kt}\left(k^2 + ak + b\right) = 0$$

che è verificato solo se

$$\boxed{k^2 + ak + b = 0}$$

Se il polinomio (detto **polinomio caratteristico**) di secondo grado

$$P(k) = k^2 + ak + b$$

ha due radici reali $k_1 \neq k_2$ distinte, allora

$$y_1(t) = e^{k_1t} \qquad y_2(t) = e^{k_2t}$$

sono soluzione dell'equazione omogenea del secondo ordine. Ma per individuarle tutte, come si può fare? Si può dimostrare, ma noi non lo faremo, che l'insieme di tutte le soluzioni $U(t)$ dell'equazione lineare omogenea del secondo ordine formano uno **spazio vettoriale di dimensione** 2. Basta quindi avere **due soluzioni indipendenti** per avere una base dello spazio e per poter scrivere ogni soluzione come combinazione lineare di queste due. In particolare, se

$$k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ k_1 \neq k_2$$

allora $e^{k_1t}$, $e^{k_2t}$ sono due soluzioni indipendenti e quindi ogni soluzione dell'omogenea si scrive come

$$y_o(t) = c_1e^{k_1t} + c_2e^{k_2t},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Nel caso di una radice doppia del polinomio caratteristico

$$k_1 = k_2 \in \mathbb{R}$$

si può dimostrare che oltre alla soluzione $e^{k_1t} = e^{k_2t}$, c'è anche la soluzione

$$y(t) = te^{k_1t}$$

Vediamolo: si ha $k_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = -\dfrac{a}{2}$ e

$$y'(t) = e^{k_1t} + tk_1e^{k_1t}$$

$$y''(t) = k_1e^{k_1t} + tk_1^2e^{k_1t} + k_1e^{k_1t} = tk_1^2e^{k_1t} + 2k_1e^{k_1t}$$

e quindi l'equazione è verificata, infatti

$$tk_1^2e^{k_1t} + 2k_1e^{k_1t} + ae^{k_1t} + atk_1e^{k_1t} + bte^{k_1t} = e^{k_1t}\left(tk_1^2 + 2k_1 + a + atk_1 + bt\right) =$$

$$= e^{k_1t}[t\underbrace{\left(k_1^2 + ak_1 + b\right)}_{=0} + \underbrace{2k_1 + a}_{=0}] = 0$$

Inoltre $e^{k_1t}$ e $te^{k_1t}$ sono indipendenti. Quindi ogni soluzione dell'omogenea si scrive

$$y_o\left(t\right) = c_1e^{k_1t} + c_2te^{k_1t},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Sembra più difficile capire che cosa succede quando le radici del polinomio caratteristico sono complesse

$$k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0$$

Se fossimo veramente temerari, sconfineremo nel campo complesso e continueremo imperterriti come se niente fosse. Proviamo a farlo. Alle due radici distinte $k_1$ e $k_2$ del polinomio caratteristico, corrispondono due soluzione dell'equazione omogenea, che sono

$$e^{k_1t} \text{ ed } e^{k_2t}$$

Ora, grazie alla formula di Eulero $e^{i\vartheta} = \cos\left(\vartheta\right) + i\sin\left(\vartheta\right)$, si ha

$$e^{k_1t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\left[\cos\left(\beta t\right) + i\sin\left(\beta t\right)\right]$$

$$e^{k_2t} = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}\left[\cos\left(\beta t\right) - i\sin\left(\beta t\right)\right]$$

Inoltre

$$\frac{1}{2}\left(e^{k_1t} + e^{k_2t}\right),\quad \frac{1}{2i}\left(e^{k_1t} - e^{k_2t}\right)$$

sono ancora soluzioni e si ha

$$\frac{1}{2}\left(e^{k_1t} + e^{k_2t}\right) = \frac{1}{2}e^{\alpha t}\left(2\cos\left(\beta t\right)\right) = e^{\alpha t}\cos\left(\beta t\right)$$

$$\frac{1}{2i}\left(e^{k_1t} - e^{k_2t}\right) = \frac{1}{2i}e^{\alpha t}\left(2i\sin\left(\beta t\right)\right) = e^{\alpha t}\sin\left(\beta t\right)$$

Poiché $e^{\alpha t}\cos\left(\beta t\right)$ ed $e^{\alpha t}\sin\left(\beta t\right)$ sono due soluzioni indipendenti, ogni soluzione dell'omogenea si scrive

$$y_o\left(t\right) = e^{\alpha t}\left(c_1\cos\left(\beta t\right) + c_2\sin\left(\beta t\right)\right) \quad \left(c_1, c_2 \text{ costanti}\right)$$

Ebbene, questo funziona e le cose stanno proprio così. Facciamo uno **schemino riassuntivo**.

Equazione omogenea $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$

$y_o(t)$: soluzione generale dell'equazione omogenea

$k_1, k_2$ radici del polinomio caratteristico $k^2 + ak + b$

Allora:

$$\begin{array}{c} k_1 \neq k_2 \\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \end{array} \Longrightarrow y_o(t) = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} \qquad (c_1, c_2 \text{ costanti})$$

$$\begin{array}{c} k_1 = k_2 \\ k_1, k_2 \in \mathbb{R} \end{array} \Longrightarrow y_o(t) = c_1 e^{k_1 t} + c_2 t e^{k_1 t} \qquad (c_1, c_2 \text{ costanti})$$

$$\begin{array}{c} k_1 = \alpha + i\beta \\ k_2 = \alpha - i\beta \\ \beta \neq 0 \end{array} \Longrightarrow y_o(t) = e^{\alpha t}\left(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\right) \qquad (c_1, c_2 \text{ costanti})$$

**Passo 2** Vediamo ora come trovare le soluzioni dell'equazione non omogenea

$$\boxed{y''(t) + ay'(t) + by(t) = r(t)}$$

Si può dimostrare facilmente che tutte e sole le soluzioni di questa equazione sono date da

$$\boxed{y(t) = y_o(t) + y_p(t)}$$

dove $y_o(t)$ è la soluzione generale dell'omogenea e $y_p(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Non ci dilungheremo sui metodi per trovare tale soluzione particolare: osserviamo solo che *quasi* sempre si ha che

Se $r(t)$ è un polinomio $P_n^*(t)$ di grado $n$, $u_p(t)$ si cerca fra i polin. $P_n(t)$ di grado $n$.

Se $r(t) = e^{pt}$, $u_p(t)$ si cerca del tipo $c \cdot e^{pt}$.

Se $r(t) = \sin(\vartheta t)$ oppure $r(t) = \cos(\vartheta t)$, $u_p(t)$ si cerca fra le combinazioni lineari $c_1 \cos(\vartheta t) + c_2 \sin(\vartheta t)$

Il *quasi* sempre è dovuto al fatto che, se ad esempio $k_1 \neq k_2$ è una radice del polinomio caratteristico ed $r(t) = e^{k_1 t}$, non si riuscirà a trovare una soluzione particolare $y_p(t) = ce^{k_1 t}$, perchè $ce^{k_1 t}$ è soluzione dell'omogenea, quindi $y_p(t)$ verifica $L(y_p) = 0$ e non $L(y_p) = r(t)$. Analogo con $r(t) = \cos(k_1 t)$ o $r(t) = \sin(k_1 t)$, se $\pm ik$ sono le soluzioni immaginarie del polinomio caratteristico. In questi casi si cerca allora una soluzione particolare rispettivamente del tipo $y_p(t) = cte^{k_1 t}$ e $y_p(t) = t(c_1 \cos(k_1 t) + c_2 \sin(k_1 t))$. E ancora, se $k_1 = k_2$ è una radice doppia del polinomio caratteristico ed $r(t) = e^{k_1 t}$, la soluzione particolare si cerca del tipo $y_p(t) = ct^2 e^{k_1 t}$.........

**Passo 3** Una volta trovata la soluzione generale $y(t)$ dell'equazione (e solo allora!!) si impongono le condizioni iniziali che determinano univocamente la soluzione del problema di Cauchy.

**Facciamo un esempio**: risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = t^2 \\ \\ y(0) = \dfrac{3}{8} \\ \\ y'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

**Primo passo**. Troviamo la soluzione generale $y_o(t)$ dell'equazione omogenea associata

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \;\Rightarrow\; k_1 = k_2 = -2$$

e quindi

$$y_o(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t}$$

**Secondo passo**. Troviamo una soluzione particolare $y_p(t)$ dell'equazione non omogenea. Poiché il termine noto $r(t)$ è $r(t) = t^2$, cerchiamo $y_p(t)$ della forma

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C$$

Poiché $y_p'(t) = 2At + B$, $y_p''(t) = 2A$, sostituendo $y_p(t)$ a $y(t)$ si ottiene l'equazione

$$2A + 4(2At + B) + 4\left(At^2 + Bt + C\right) = t^2$$

cioè

$$4At^2 + (8A + 4B)t + 2A + 4B + 4C = t^2$$

affinché questa uguaglianza fra polinomi sia vera, deve essere

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 8A + 4B = 0 \\ 2A + 4B + 4C = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ \\ B = \dfrac{1}{4}(-2) = -\dfrac{1}{2} \\ \\ C = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{2} + 2\right) = \dfrac{3}{8} \end{cases}$$

quindi

$$y_p(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}$$

L'equazione generale dell'equazione è pertanto

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}$$

**Terzo passo**. Imponiamo le condizioni iniziali; poiché

$$y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 2c_2 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$$

e quindi deve essere

$$\left.\begin{aligned} y\left(0\right) &= c_1 + \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \\ y'\left(0\right) &= -2c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{array}$$

Abbiamo così trovato la soluzione del nostro problema di Cauchy: essa è

$$y\left(t\right) = te^{-2t} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}$$

È sempre bene controllare di aver fatto i conti giusti, verificando che $y\left(t\right)$ sia davvero soluzione dell'equazione e che siano verificate le condizioni iniziali. Facciamolo

$$y' = e^{-2t} - 2te^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$$

$$y'' = -4e^{-2t} + 4te^{-2t} + \frac{1}{2}$$

e quindi

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y \quad &= \cancel{-4e^{-2t}} \cancel{+4te^{-2t}} + \frac{1}{2} \cancel{+4e^{-2t}} \cancel{-8te^{-2t}} \cancel{+2t} - 2 \cancel{+4te^{-2t}} + t^2 \cancel{-2t} + \frac{3}{2} = \\ &= \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{-2} + t^2 \cancel{+\frac{3}{2}} = \\ &= t^2 \qquad \text{OK} \end{aligned}$$

$$y\left(0\right) = \frac{3}{8} \qquad \text{OK}$$

$$y'\left(0\right) = e^0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{OK}$$

# Capitolo 6

# Analisi in due variabili

## 6.1 Funzioni definite in $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^m$

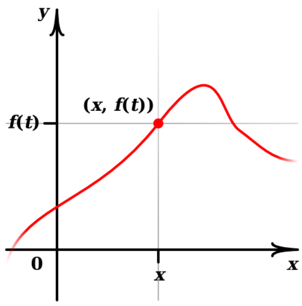
Finora abbiamo esplorato $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^2$, ma molte situazioni fisiche o geometriche abbisognano di spazi a più dimensioni.

Consideriamo funzioni $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

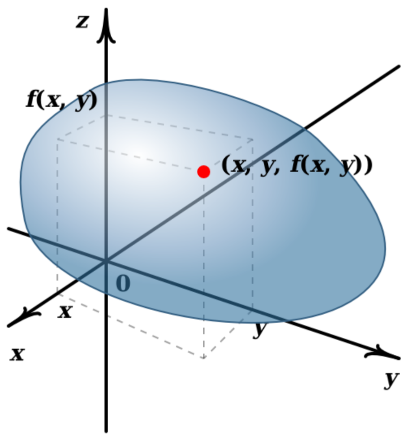
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Se $m = 1$ parliamo di funzioni **scalari**, se $m > 1$ di funzioni **vettoriali**.

1. **Caso** $m = n = 1$: abbiamo le funzioni di cui si è parlato per tutto il corso. Il grafico della funzione $f$ è costituito dai punti $(x, f(x)) \in \mathbb{R}$




2. **Caso** $n = 2$, $m = 1$: abbiamo le superfici cartesiane in $\mathbb{R}^3$. Il grafico della funzione è costituito dai punti $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$

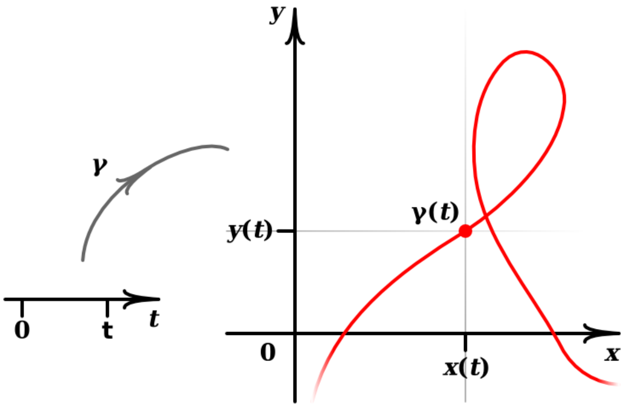


3. **Caso** $n = 1$, $m = 2$: abbiamo le curve nel piano

$$\gamma: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

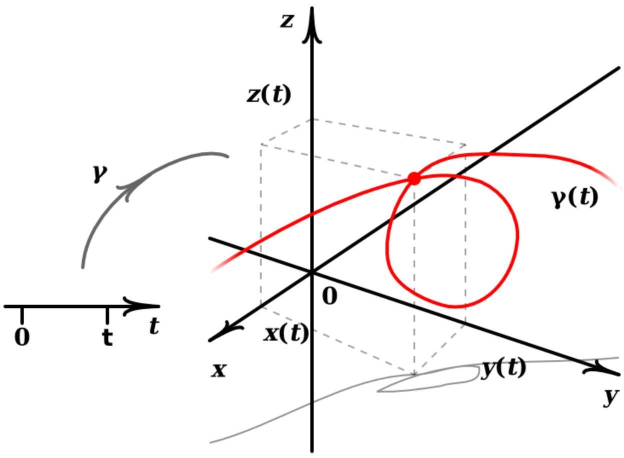
Se $x(t) = t$, la traiettoria di $\gamma(t)$ ricade nel caso del grafico nel punto 1.




4. **Caso** $n = 1$, $m = 3$: abbiamo le curve nello spazio

$$\gamma: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

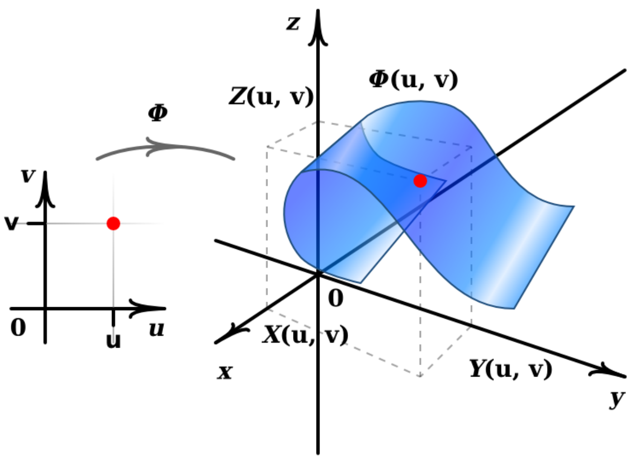



5. **Caso** $n = 2$, $m = 3$: abbiamo le superfici nello spazio

$$\varPhi: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \varPhi(u, v) = \begin{pmatrix} X(u, v) \\ Y(u, v) \\ Z(u, v) \end{pmatrix}$$

Se $X(u, v) = u$, $Y(u, v) = v$ , la superficie data da $\varPhi(u, v)$ ricade nel caso del grafico nel punto 2.




Vediamo di approfondire il secondo caso.

## 6.2 Funzioni di due variabili a valori in $\mathbb{R}$

Ricordiamo, prima di introdurre le funzioni di due variabili, che cosa significa continuità in $x_0$, per una funzione di una variabile reale.

**Definizione.** *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **continua** in $x_0$ se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

*cioè, scritto per esteso, se*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ t.c.\ \ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \text{ verificante } |x - x_0| < \delta$$

Se ora consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, possiamo dare la definizione di continuità nel punto $(x_0, y_0)$ in maniera del tutto analoga, cioè richiedendo che

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0) \ .$$

Precisamente

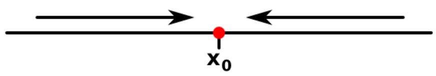
**Definizione.**

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - L| < \varepsilon \\ \forall (x,y) \text{ verificante } 0 < d[(x,y),(x_0,y_0)] < \delta \end{array}$$

*dove*

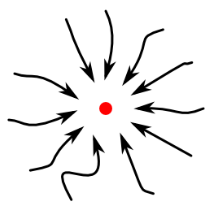
$$d[(x,y),(x_0,y_0)] = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Anche se la definizione di continuità in $\mathbb{R}^2$ è analoga a quella in $\mathbb{R}$, è molto più complicato testarla. Mentre per una funzione di una variabile l'esistenza del limite segue dall'esistenza del limite destro e del limite sinistro (e dalla loro uguaglianza), poiché $x$ può tendere ad $x_0$ solo da destra o da sinistra

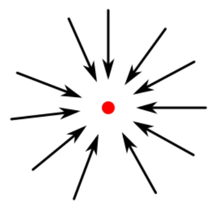



,

per una funzione di due variabili i "percorsi" che può fare $(x, y)$ per avvicinare $(x_0, y_0)$ sono infiniti e non si può quindi testare il limite su ogni singolo percorso



E **non** è vero, come potrebbe sembrare a prima vista, che basta studiare i limiti lungo tutte le rette che portano ad $(x_0, y_0)$. Ma vediamo qualche esempio.



**Esempio 1** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f$ è continua in $(0,0)$, infatti

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| x \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Osserviamo che per dimostrare la discontinuità di una funzione di due variabili basta trovare un percorso lungo il quale $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$.

**Esempio 2** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Se si prende $y = x$ (quindi si raggiunge l'origine lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante) si ha

$$\lim_{x=y\,(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

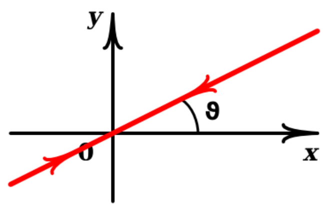
e quindi $f$ non è continua in $(0,0)$.

**Esempio 3** Vediamo ora una funzione che è continua in $(0,0)$ lungo tutte le possibili direzioni, ma non è continua in $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Le rette passanti per $(0,0)$ sono della forma

$$(x,y) = (\alpha t, \beta t), \ t \in \mathbb{R}, \alpha = \cos(\vartheta), \ \beta = \sin(\vartheta)$$



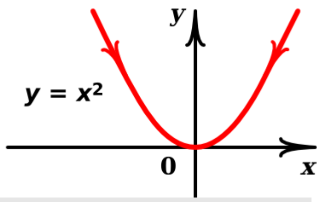

si ha

$$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha^2 \beta t^3}{\alpha^4 t^4 + \beta^2 t^2} = \frac{\alpha^2 \beta t}{\alpha^4 t^2 + \beta^2} \xrightarrow{t\to 0} 0 = f(0,0)$$

Però se si considera il percorso $y = x^2$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0} f\left(x, x^2\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

e quindi $f$ non è continua in $(0,0)$.




**Definizione.** $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *si dice* ***continua in*** $A$ *se e solo se* $f$ *è continua in* $(x_0, y_0)$, $\forall (x_0, y_0) \in A$.

Così come accadeva per funzioni di una variabile, anche qui valgono le seguenti proprietà

**Proprietà.** *Siano* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continue. Si ha*

1. $f + g$ *è continua;*
2. $f \cdot g$ *è continua;*
3. $\dfrac{f}{g}$ *è continua (dove* $g \neq 0$*).*

**Esempi** di funzioni continue.

$f(x,y) = x$, $f(x,y) = y$ (proiezioni sugli assi coordinati) sono continue; i polinomi $f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} x^i y^j$ sono funzioni continue (in particolare le funzioni lineari $\Lambda(x,y) = ax + by$ sono continue); le funzioni razionali sono continue in quei punti dove il denominatore non si annulla. Inoltre, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono continue, si ha che la composizione $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto g(f(x,y))$$

è ancora una funzione continua. Ad esempio, $e^{x+y}$, $\sin(xy)$, $\log\left(1 + x^2 + y^2\right)$ sono continue.

## 6.3 Calcolo differenziale per funzioni di due variabili a valori in $\mathbb{R}$

Vediamo adesso come si sviluppa il concetto di derivata quando si considerano funzioni di due variabili.

Ricordiamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **derivabile** in $x_0$ se esiste finito

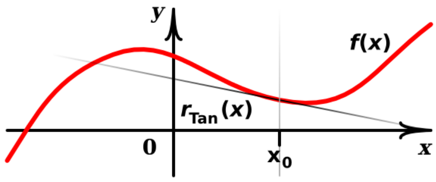
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - (x_0)}{h}$$

Tale limitie si chiama **derivata di** $f$ **in** $x_0$ e si denota con $f'(x_0)$.

Osserviamo che, se esiste una retta

$$r(x) = a(x - x_0) + q$$

che approssima bene la funzione $f$ in $x_0$, nel senso che




$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - r(x)}{x - x_0} = 0 \ ,$$

deve essere $a = f'(x_0)$ (oltre a ovviamente $q = f(x_0)$), cioè la retta deve essere

$$r(x) = r_{Tan}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \ .$$

$r_{Tan}(x)$ è detta **retta tangente**.

L'esistenza di $f'(x_0)$ è equivalente all'esistenza di $r_{Tan}(x)$.

In $\mathbb{R}^2$ le cose si complicano un po'. Diremo che $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è **derivabile** in $(x_0, y_0)$ se sistono finiti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Tali limiti si chiamano rispettivamente **derivata parziale** di $f$ rispetto ad $x$ in $(x_0, y_0)$ e **derivata parziale** di $f$ rispetto ad $y$ in $(x_0, y_0)$ e si denotano con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \ \text{ oppure con } f_x(x_0, y_0) \ , \ f_y(x_0, y_0)$$

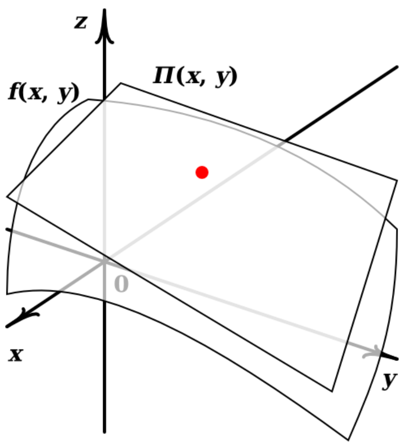
Osserviamo che, se esiste un piano

$$\Pi(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + q$$

che meglio approssima la funzione $f$ in $(x_0, y_0)$, nel senso che

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - \Pi(x, y)}{d[(x, y), (x_0, y_0)]} = 0 \ ,$$

deve essere $a = f_x(x_0, y_0)$ e $b = f_y(x_0, y_0)$ (oltre ovviamente a $q = f(x_0, y_0)$), cioè il piano in questione deve essere




$$\Pi(x, y) = \Pi_{Tan}(x, y) = f(x_0, y_0) +$$

$$+ f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\Pi_{Tan}(x, y)$ è detto **piano tangente**.

**Dimostriamo tale affermazione**: se nel limite appena scritto facciamo tendere $(x,y)$ ad $(x_0,y_0)$ orizzontalmente lungo $(x,y_0)$m si dovrà avere

$$0=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-a(x-x_0)-f(x_0,y_0)}{|x-x_0|}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}-a\right]\cdot\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$$

e quindi

$$a=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=f_x(x_0,y_0)$$

(analogamente si dimostra che $b=f_y(x_0,y_0)$.

**Nota** È importante notare che l'esistenza di $f_x(x_0,y_0)$ e $f_y(x_0,y_0)$ e l'esistenza di $\Pi_{Tan}(x,y)$ **non sono equivalenti**, può succedere infatti che esistano $f_x$, $f_y$ in $(x_0,y_0)$, ma non il piano tangente in $(x_0,y_0)$ (in seguito vedremo un esempio).

Nel caso esista il piano tangente in $(x_0,y_0)$ si dice che $f$ è **differenziabile** in $(x_0,y_0)$. Riassumendo:

**Definizione.** *$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ si dice* ***differenziabile*** *in $(x_0,y_0)$ se*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

**Notazione.** *Chiameremo il vettore dato dalle derivate parziali di $f$ in $(x_0,y_0)$* ***gradiente di*** *$f(x,y)$* ***in*** *$(x_0,y_0)$ e lo denoteremo con $Df(x_0,y_0)$; quindi*

$$Df(x_0,y_0)=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$$

Riguardo al piano tangente, facciamo un'osservazione che ci potrà essere utile in seguito. La sua equazione

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

si può scrivere anche

$$-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+(z-f(x_0,y_0))=0$$

ed ancora

$$(-f_x(x_0,y_0),\ -f_y(x_0,y_0),\ 1)\circ(x-x_0,\ y-y_0,\ z-f(x_0,y_0))=0$$

che è l'equazione di un piano in forma normale.

**Ricordo** L'equazione del piano passante per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e perpendicolare al vettore $N = (n_1, n_2, n_3) \neq (0,0,0)$ è

$$N \circ (P - P_0) = 0, \quad P = (x, y, z)$$

Questo significa che

$$(-f_x(x_0, y_0), \ -f_y(x_0, y_0), \ 1) = (-Df(x_0, y_0), \ 1)$$

è un vettore ortogonale al piano tangente. Normalizzando, ho che

$$N = \frac{(-Df(x_0, y_0), \ 1)}{\sqrt{1 + ||Df(x_0, y_0)||^2}}$$

è un vettore di norma 1 ortogonale al piano tangente. Osserviamo che i vettori $(1, 0, f_x)$, $(0, 1, f_y)$ sono una base del piano tangente.

Possiamo dire che in $\mathbb{R}^2$ le veci della derivabilità in $\mathbb{R}$ le fa la differenziabilità (e **non** la derivabilità). Infatti, si può vedere che l'esistenza di $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ non solo **non** implica l'esistenza del piano tangente **ma nemmeno la continuità**.

**Ad esempio** la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

che abbiamo già dimostrato **non** essere continua in $(0,0)$, ha ambedue le derivate parziali; infatti

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0,0)}{k} = 0$$

Invece **la differenziabilità in** $(x_0, y_0)$ **implica la continuità in** $(x_0, y_0)$ . Infatti, da

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

segue ovviamente che

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

e quindi

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) - f(x_0, y_0) = 0 \ ,$$

che è propirio la definizione di continuità di $f(x, y)$ in $(x_0, y_0)$.

C'è comunque un importante teorema che, con un'ipotesi in più oltre all'esistenza di $f_x$ e $f_y$, garantisce la differenziabilità.

**Teorema.** *Se le derivate parziali $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ esistono in un intorno di $(x_0, y_0)$ e sono continue nel punto $(x_0, y_0)$, allora $f$ è differenziabile in $(x_0, y_0)$.*

### 6.3.1 Derivate direzionali

Sia $v = (\alpha, \beta)$ un vettore unitario, cioè

$$\alpha = \cos\vartheta,\ \ \beta = \sin\vartheta\ .$$

Consideriamo $f(x, y)$ ristretta alla retta

$$(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)\ ,\ \ t \in \mathbb{R}\ ,$$

cioè

$$\varphi(t) = f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)\ \ ,\ \varphi(0) = f(x_0, y_0)$$

La derivata $\varphi'(0)$, se esiste, si chiama **derivata di $f$ nella direzione** $v$ nel punto $(x_0, y_0)$ e la si indica con il simbolo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)\ \text{ oppure } D_v f(x_0, y_0)$$

Esplicitamente

$$D_v f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Notiamo che, in particolare

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(x_0, y_0)\ ,\quad e_1 = (1, 0) = (\cos 0, \sin 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(x_0, y_0)\ ,\quad e_2 = (0, 1) = (\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2})$$

Se $f$ è differenziabile, in $(x_0, y_0)$ si ottiene un'utilissima formula di calcolo delle derivate direzionali in termini di derivate parziali, e cioè

$$\boxed{D_v f(x_0, y_0) = Df(x_0, y_0) \circ v}$$

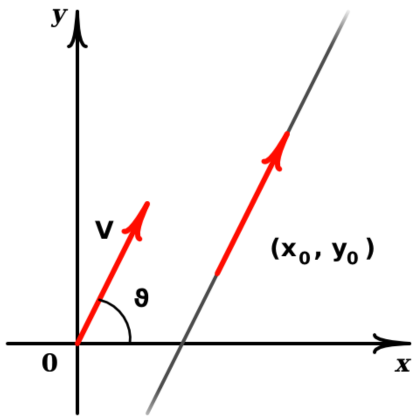
Da questa formula si ottiene immediatamente (disuguaglianza di Schwarz) che il gradiente fornisce la direzione di massima crescita della funzione $f$; più precisamente

$V_{max} = \frac{Df(x_0,y_0)}{||Df(x_0,y_0)||}$ $\qquad V_{min} = -\frac{Df(x_0,y_0)}{||Df(x_0,y_0)||}$

$D_{V_{max}} f(x_0, y_0) = ||Df(x_0, y_0)||$

$D_{V_{min}} f(x_0, y_0) = -||Df(x_0, y_0)||$

Inoltre $\quad v \perp Df(x_0, y_0) \;\Rightarrow\; D_v f(x_0, y_0) = 0$ , cioè la funzione è costante nella direzione ortogonale al gradiente.




**Osservazione** Abbiamo già visto precedentemente che l'esistenza delle derivate parziali non garantisce la differenziabilità (addirittura neanche la continuità). Bene, neppure l'esistenza e l'eguaglianza di tutte le derivate direzionali garantiscono la continuità (tantomeno quindi la differenziabilità).

**Ad esempio** Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f$ ha derivata direzionale 0 in $(0,0)$ qualunque sia la direzione, infatti, se $\alpha = 0$ è ovvio, se $\alpha \neq 0$ si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\alpha t, \beta t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{\alpha\beta^3 t^4}{\alpha^2 t^2 + \beta^6 t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha\beta^3 t}{\alpha^2 + \beta^6 t^4} = 0 \ .$$

Tuttavia $f$ non è continua in $(0,0)$, infatti lungo il percorso $x = y^3$ si ha

$$\lim_{y\to 0} f(y^3, y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{y^6 + y^6} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0) \ .$$

### 6.3.2 Derivata della composta e cambio di variabile

Nel caso le variabili $x$ e $y$ siano entrambe funzioni di una variabile $t$, cioè $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, è naturale chiedersi come calcolare

$$(f(x(t), y(t)))' = \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) \ .$$

Si ha la seguente importante formula (che non dimostreremo):

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))\, x'(t) + f_y(x(t), y(t))\, y'(t)}$$

In termini di prodotto scalare, la formula diventa

$$\frac{d}{dt}f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)=Df\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)\circ\left(x'\left(t\right),y'\left(t\right)\right)$$

**Vediamo un esempio** Se $\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$ è una descrizione della circonferenza $x^2+y^2=9$, cioè ad esempio

$$\begin{cases} x\left(t\right)=3\cos t \\ y\left(t\right)=3\sin t \end{cases} \qquad t\in\left[0,2\pi\right]$$

e se $f\left(x,y\right)=x^2+y^3$, risulta

$$f_x\left(x,y\right)=2x,\ \ f_y\left(x,y\right)=3y^2,\ \ x'\left(t\right)=-3\sin t,\ \ y'\left(t\right)=3\cos t$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f\left(3\cos t,3\sin t\right) &= 2\left(3\cos t\right)\left(-3\sin t\right)+3\left(3\sin t\right)^2\left(3\cos t\right)= \\ &= 9\cos t\sin t\left(9\sin t-2\right)\end{aligned}$$

È chiaro che in un caso esplicito come questo sarebbe stato più semplice osservare che

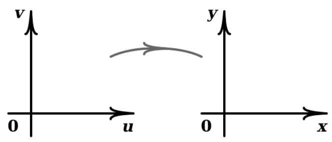
$$f(x(t),y(t))=x^2(t)+y^3(t)=9\cos^2 t+27\sin^3 t=g(t)$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}f\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)=g'(t)=18\cos t(-\sin t)+81\sin^2 t\cos t=9\cos t\sin t(9\sin t-2)$$

Consideriamo ora la situazione più generale in cui

$$\begin{cases} x=x\left(u,v\right) \\ y=y\left(u,v\right) \end{cases}$$




cioè quello che si chiama **cambio di variabili nel piano**. In analogia a quanto visto prima si può dimostrare che

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial u}f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)=f_x\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)\frac{\partial x}{\partial u}\left(u,v\right)+f_y\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)\frac{\partial y}{\partial u}\left(u,v\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial v}f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)=f_x\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)\frac{\partial x}{\partial v}\left(u,v\right)+f_y\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)\frac{\partial y}{\partial v}\left(u,v\right)}$$

Chiameremo **Jacobiana**

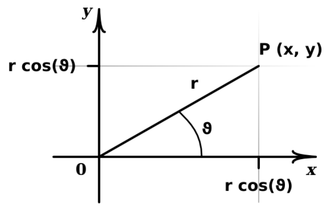
$$J=\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

la matrice associata al cambio di variabili.
In termini di prodotto di matrici

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} f\left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right)\right), \frac{\partial}{\partial v} f\left(x\left(u,v\right), y\left(u,v\right)\right)\right) = Df(x(t), y(t)) \circ J$$

**Esempio** Consideriamo il cambio di variabili da coordinate cartesiane a coordinate polari, cioè, per $\vartheta \in [0, 2\pi)$ , $r \in [0, +\infty)$, consideriamo

$$\begin{cases} x = x\left(r, \vartheta\right) = r\cos\vartheta \\ y = y\left(r, \vartheta\right) = r\sin\vartheta \end{cases}$$




Sia $f\left(x, y\right) = x^2 + y^3$, si ha $f_x\left(x, y\right) = 2x$, $f_y\left(x, y\right) = 3y^2$ e quindi

$$f_x\left(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta\right) = 2r\cos\vartheta,\ f_y\left(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta\right) = 3r^2\sin^2\vartheta$$

Inoltre

$$\frac{\partial\left(x, y\right)}{\partial\left(u, v\right)} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

È chiaro che anche questa volta, in un caso così esplicito, sarebbe convenuto considerare direttamente $f(x\left(r, \vartheta\right), y\left(r, \vartheta\right)) = r^2\cos^2\vartheta + r^3\sin^3\vartheta = g(r, \vartheta)$ e derivare la funzione $g$.

### 6.3.3 Derivate successive

Come nel caso di una funzione di una variabile si parla di derivata seconda, terza, ecc., anche per una funzione di due variabili si introduce in maniera naturale il concetto di **derivata seconda**, **terza**, ecc., notando che in questo caso le derivate seconde "canoniche" saranno quattro ed esattamente

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Tali derivate si indicano rispettivamente con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

oppure con

$$f_{xx},\ f_{yx},\ f_{xy},\ f_{yy}$$

Le derivate seconde $f_{xx}$ ed $f_{yy}$ si dicono derivate seconde **pure**, mentre le derivate seconde $f_{xy}$ e $f_{yx}$ si dicono derivate seconde **miste**. In generale

$$f_{xy} \neq f_{yx}\ ;$$

si prenda ad esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si ha $f_{xy}(0,0) = -1$, mentre $f_{yx}(0,0) = 1$. Infatti, calcoliamo innanzitutto

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} y\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = -y \quad \forall y$$

$$f_y(x,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} x\frac{x^2-k^2}{x^2+k^2} = x \quad \forall x$$

Quindi $f_{xy}(0,0) = -1$ e $f_{yx}(0,0) = 1$.

In positivo si ha il seguente teorema

**Teorema.** *Se $f_{xy}$ e $f_{yx}$ esistono e sono continue in un intorno di $(x_0,y_0)$, allora*

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

Per comodità le derivate seconde si raggruppano di solito nella **matrice hessiana**

$$Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

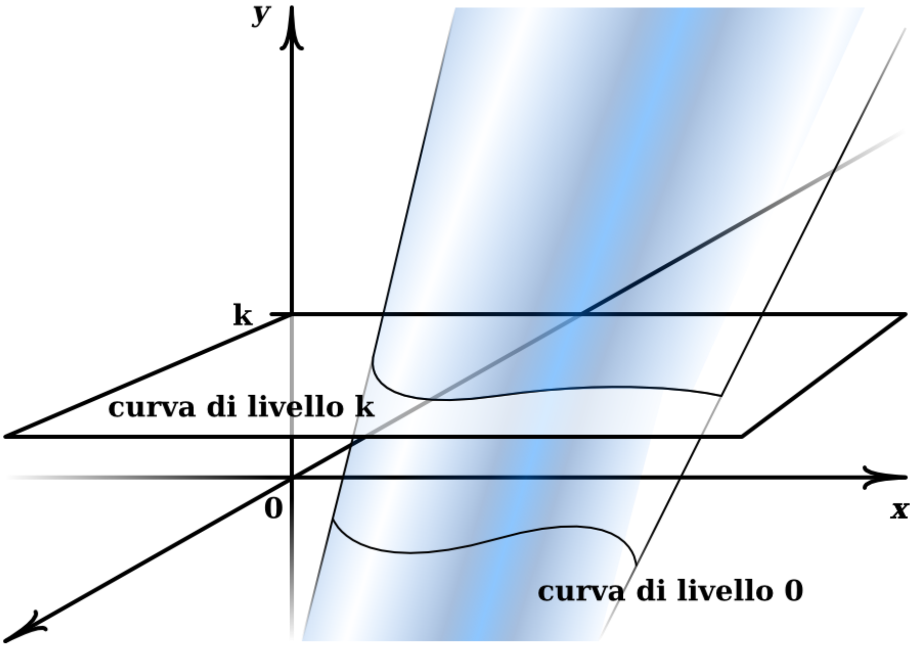
(in cui naturalmente tutte le derivate sono calcolate in $(x_0,y_0)$).

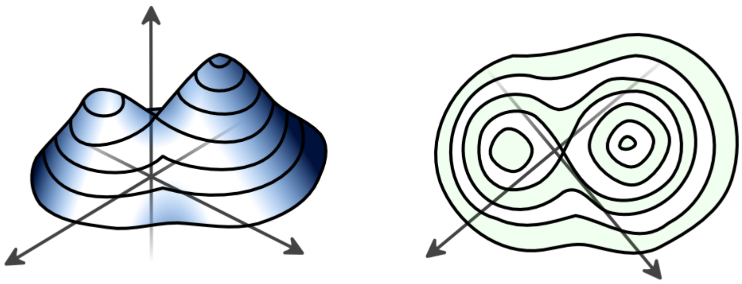
Osserviamo che se valgono le ipotesi della proposizione precedente, la matrice hessiana è **simmetrica**. Nel seguito avremo a che fare di solito con funzioni con tale proprietà.

A questo punto, dopo aver appreso le informazioni basilari sulle funzioni di due variabili, svilupperemo i due interessi fondamentali riguardo ad esse (come nel caso di una variabile): la ricerca di massimi e minimi e l'integrazione. Premettiamo nel prossimo paragrafo alcune interessanti osservazioni.

### 6.3.4 Funzioni implicite

Immaginiamo il grafico di una funzione $f$ di due variabili come il "plastico" di un territorio montuoso con colline, passi, altopiani, ma senza burroni. Chi fa le mappe di questi territori usa soprattutto le curve cosiddette "di livello", cioè le curve che uniscono punti ad uguale altitudine. Se si ha un po' di esperienza di queste mappe si sa che, a parte zone particolari, gli insiemi di livello sono curve regolari (noi diremo che localmente coincidono con il grafico di una funzione derivabile). Le zone particolari sono date da cime (l'insieme di livello è un punto e lì il piano tangente al grafico è orizzontale), da ampie zone pianeggianti come i laghi e gli altopiani, che certo non sono curve, o anche da piani di montagna, dove l'insieme di livello può essere costituito da due curve che si incrociano.



La zona di uguale altitudine $k$ è data da

$$f(x,y) = k$$

che, posto $F(x,y) = f(x,y) - k$, si può vedere come luogo di zeri di $F$, cioè

$$F(x,y) = 0$$

È interessante cercare di capire sotto quali condizioni si può essere sicuri che tale zona sia descrivibile almeno localmente con una funzione

$$y = \varphi(t) \qquad (\text{o } x = \psi(t))$$

Tale funzione $\varphi(x)$ sarà definita implicitamente da

$$F(x, \varphi(x)) = 0$$

Supponiamo che tale funzione $\varphi$ esista e sia derivabile e deriviamo la funzione $F$ usando la formula della derivata della composta. Si ha

$$0 = (F(x, \varphi(x)))' = \frac{d}{dx}(F(x, \varphi(x))) = F_x(x, \varphi(x)) + F_y(x, \varphi(x))\, \varphi'(x)$$

e quindi, se $F_y(x, y(x)) \neq 0$, si ha

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$$

Precisamente, si ha il seguente

**Teorema** (Teorema della funzione implicita (Dini))**.** *Sia $F(x, y)$ una funzione derivabile in un intorno di $(x_0, y_0)$, con derivate continue in tale intorno. Supponiamo anche che sia*

$$F(x_0, y_0) = 0, \; F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

*Allora esistono $\delta > 0$ ed $r > 0$ tali che*

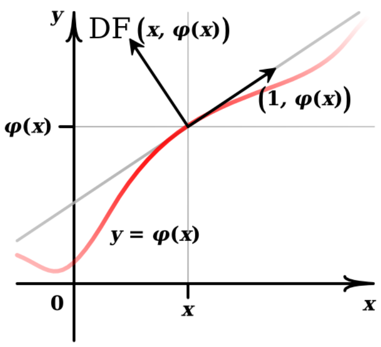
1. *$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ esiste un unico $y \in [y_0 - r, y_0 + r]$ tale che $F(x, y) = 0$. Grazie all'unicità, possiamo anche scrivere $y = \varphi(x)$.*
2. *La funzione $\varphi : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ è derivabile e si ha*

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$$

**Nota** Notiamo che, se invece di avere la condizione $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, sapessimo che $F_x(x_0, y_0) \neq 0$, scambiando i ruoli di $x$ e $y$ potremo dire che il luogo di zeri della $F$ in un intorno di $(x_0, y_0)$ coincide con il grafico di una funzione $x = \psi(y)$.

**Osservazione** Nell'applicare la regola della derivata della composta per ricavare la derivata di $\varphi(x)$, abbiamo trovato (usiamo il linguaggio vettoriale) che

$$(F_x(x, \varphi(x)), \; F_y(x, \varphi(x))) \circ \left(1, \; \varphi'(x)\right) = 0$$




cioè $DF(x, \varphi(x)) \perp \left(1, \varphi'(x)\right)$. Ma il vettore $(1, \varphi'(x))$ dà la direzione della retta tangente al grafico di $\varphi$ per il punto $(x, \varphi(x))$. Questo significa che gradiente (direzione di massima crescita per la funzione) e curve di livello (direzione in cui la funzione rimane costante) sono **ortogonali** in ogni punto.

### 6.3.5 Massimi e minimi

Sia $f = f(x, y)$: un punto $(x_0, y_0)$ si dice di **minimo locale** se $\exists r > 0$ tale che

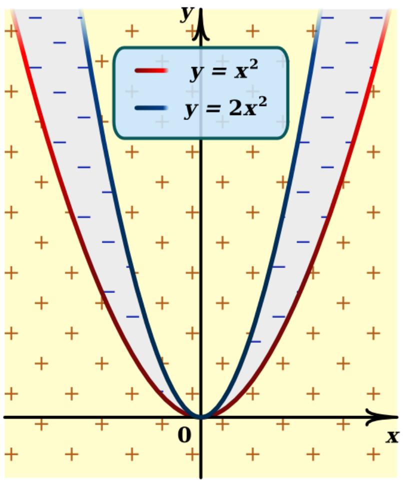
$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in B_r(x_0, y_0)$$

Un punto $(x_0, y_0)$ si dice di **massimo locale** se $\exists r > 0$ tale che

$$f(x_0, y_0) \geq (x, y) \quad \forall (x, y) \in B_r(x_0, y_0)$$

La ricerca dei punti di massimo e minimo in $\mathbb{R}^2$ è più complicata che in una variabile. Il seguente esempio mostra che una funzione può avere minimo in $(0, 0)$ se ristretta a qualunque retta per l'origine, pur non avendo globalmente minimo in $(0, 0)$.

**Esempio** Sia $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2 = (y - x^2)(y - 2x^2)$ La restrizione di $f$ alla retta $(\alpha t, \beta t)$, $t \in \mathbb{R}$, è la funzione




$$\varphi(t) = f(\alpha t, \beta t) = 2\alpha^4 t^4 - 3\alpha^2 \beta t^3 + \beta^2 t^2$$

$$\varphi'(t) = 8\alpha^4 t^3 - 9\alpha^2 \beta t^2 + 2\beta^2 t, \quad \text{quindi } \varphi'(0) = 0$$

$$\varphi''(t) = 24\alpha^4 t^2 - 18\alpha^2 \beta t + 2\beta^2, \quad \text{quindi}$$

$$\varphi''(0) = 2\beta^2 \begin{cases} > 0 & \text{se } \beta \neq 0 \\ 0 & \text{se } \beta = 0 \end{cases}$$

(se $\beta = 0$ si ha $\varphi(t) = 2\alpha^4 t^4$, che ha minimo in $t = 0$). Quindi $f(x, y)$ ristretta a qualunque retta per l'origine ha minimo in $(0, 0)$. Però non ha minimo in $(0, 0)$, infatti, $\forall r > 0$ la $f$ ha punti in $B_r(0, 0)$ dove è positiva e punti dove è negativa. Tuttavia, è chiaro in generale che, posto

$$\varphi(t) = f(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t), \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

si ha

$$f \text{ ha minimo locale in } (x_0, y_0) \quad \begin{array}{l} \Longrightarrow \quad \varphi \text{ ha minimo locale in } t = 0 \\ \not\Longleftarrow \quad \text{(esempio precedente)} \end{array}$$

Quindi deve essere $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) \geq 0$, cioè

1. $f_x(x_0, y_0)\alpha + f_y(x_0, y_0)\beta = 0$, $\forall \alpha, \beta$
2. $f_{xx}(x_0, y_0)\alpha^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\alpha\beta + f_{yy}(x_0, y_0)\beta^2 \geq 0, \quad \forall \alpha, \beta$

1. è ovviamente equivalente a

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \ :$$

si dice in questo caso che $(x_0, y_0)$ è un **punto critico**. 2. si può esprimere in termini della matrice hessiana, come vedremo dopo. Abbiamo già notato che le condizioni 1. e 2. non sono però sufficienti. Per dimostrare un teorema in positivo, abbiamo bisogno della formula di Taylor di ordine 2.

### 6.3.6 Formula di Taylor

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ due volte derivabile con derivate prime e seconde continue in un intorno di $(x_0, y_0)$; si ha

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ &+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] + \\ &+E_2\left(d^2\left[(x_0,y_0),(x,y)\right]\right) \end{aligned}$$

dove $E_2\left(d^2\left[(x_0,y_0),(x,y)\right]\right) = E_2\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)$ è tale che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E_2\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = 0$$

Questa formula si dimostra facilmente considerando la funzione ristretta al segmento congiungente $(x,y)$ a $(x_0,y_0)$, cioè

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))$$

e scrivendo la formula di Taylor di ordine 2 per $\varphi$, tenendo conto della regola di derivazione di una funzione composta. Siamo ora in grado di dimostrare un risultato che ci permette di detereminare se un punto critico è di massimo o di minimo relativo.

**Teorema.** *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ due volte derivabile con derivate prime e seconde continue in un intorno di $(x_0, y_0)$. Supponiamo che $(x_0, y_0)$ sia un punto critico, cioè $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$. Se*

$$\det Hf(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$$

*allora $(x_0, y_0)$ è un punto di minimo relativo o di massimo relativo a seconda che sia $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ o $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ rispettivamente.*
***Viceversa:*** *se $(x_0,y_0)$ è un punto di minimo (rispettivamente di massimo) relativo per $f$, allora $\det Hf(x_0,y_0) \geq 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) \geq 0$ (rispettivamente $f_{xx}(x_0,y_0) \leq 0$).*

(d'ora in poi, se la notazione non creerà fraintendimenti, scriveremo $f_{xx}$ , $f_{yy}$ , $f_{xy}$ al posto di $f_{xx}(x_0,y_0)$ , $f_{yy}(x_0,y_0)$ , $f_{xy}(x_0,y_0)$)

*Dimostrazione.* Poiché $(x_0, y_0)$ è un punto critico, la formula di Taylor di ordine 2 centrata in $(x_0, y_0)$ si riduce a

$$\begin{aligned} & f(x,y) - f(x_0,y_0) = \\ & \quad = \frac{1}{2}\left[f_{xx}\cdot(x-x_0)^2 + 2f_{xy}\cdot(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}\cdot(y-y_0)^2\right] + \\ & \quad + E_2\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right) \end{aligned}$$

Per brevità denotiamo con $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ e poniamo $u = \dfrac{x-x_0}{r}$, $v = \dfrac{y-y_0}{r}$. Con semplici passaggi algebrici la formula diventa

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) & = \\ u^2+v^2 = 1 \rightarrow \quad & = \frac{1}{2}r^2\left[f_{xx}u^2 + 2f_{xy}uv + f_{yy}v^2 + \frac{2E_2(r^2)}{r^2}\right] = \\ & = \frac{1}{2}r^2\left[Q(u,v) + \frac{2E_2(r^2)}{r^2}\right] \end{aligned}$$

dove $Q(u,v)$ è il polinomio di secondo grado definito da

$$Q(u,v) = f_{xx}u^2 + 2f_{xy}uv + f_{yy}v^2$$

Se $Q(u,v)$ ha segno costante, a patto di scegliere $r$ abbastanza piccolo, anche $Q(u,v) + \dfrac{2E_2(r^2)}{r^2}$ avrà lo stesso segno costante (ricordiamo che $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{2E_2(r^2)}{r^2} = 0$) e saremo quindi in presenza di massimi o minimi. Vediamo quali sono le condizioni affinché $Q$ abbia segno costante

$$\begin{aligned} Q(u,v) & = \frac{1}{f_{xx}}\left[f_{xx}^2u^2 + 2f_{xx}f_{xy}uv + f_{xx}f_{yy}v^2\right] = \\ & = \frac{1}{f_{xx}}\left[(f_{xx}u + f_{xy}v)^2 - f_{xy}^2v^2 + f_{xx}f_{yy}v^2\right] = \\ & = \frac{1}{f_{xx}}\left[(f_{xx}u + f_{xy}v)^2 + \left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)v^2\right] = \\ & = \frac{1}{f_{xx}}\left[(f_{xx}u + f_{xy}v)^2 + \det H_f v^2\right] \end{aligned}$$

Quindi se $\det Hf(x_0,y_0) > 0$ avremo che $Q(u,v)$ ha segno costante (lo stesso di $f_{xx}(x_0,y_0)$).

**Vediamo ora il viceversa**: abbiamo già osservato che se $(x_0,y_0)$ è un punto di minimo allora deve essere $Q(u,v) \geq 0$; ma questo è equivalente a $\det Hf(x_0,y_0) \geq 0$ e $f_{xx}(x_0,y_0) \geq 0$. Analogamente si ragiona se $(x_0,y_0)$ è un punto di massimo. $\square$

**Come conseguenza**, un punto in cui $\det H_f(x_0, y_0) < 0$ non è né di massimo né di minimo (ed è detto punto **di sella**).
Ed infatti, se $f_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$, si ottiene che
$Q(1,0) = f_{xx}(x_0, y_0)$ , $Q(f_{xy}(x_0, y_0), -f_{xx}(x_0, y_0)) = f_{xx}(x_0, y_0) \det H_f(x_0, y_0)$
e quindi $Q$ cambia segno.
Se invece $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ , ma $f_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$ si procede in modo analogo.
Se infine $f_{xx}(x_0, y_0) = f_{yy}(x_0, y_0) = 0$ si ha

$$Q(u, v) = 2 f_{xy}(x_0, y_0)\, uv \ ,$$

che cambia segno a seconda che $u$ e $v$ abbiano segno concorde oppure discorde.

Riassumendo, se $(x_0, y_0)$ è un punto critico, cioè se

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

si ha

- $\left.\begin{array}{l} \det H_f(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \end{array}\right| \Longrightarrow (x_0, y_0)$ è un punto di minimo;
- $\left.\begin{array}{l} \det H_f(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \end{array}\right| \Longrightarrow (x_0, y_0)$ è un punto di massimo;
- $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ è un punto di sella.
- $\det H_f(x_0, y_0) = 0$ nulla può dirsi in generale;

Vediamo infatti degli esempi che mostrano come in quest'ultimo caso si possano avere sia punti di massimo, che di minimo, che di sella.

**Esempio 1** $f(x, y) = x^2 + y^3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$; si ha

$$f_x(x, y) = 2x,\ \ f_y(x, y) = 3y^2,\ \ f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

e quindi $(0, 0)$ è un punto critico con $f(0, 0) = 0$. Ora $f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = 6y$ e quindi

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

In particolare $\det H_f(0, 0) = 0$. Poiché

$$f(0, y) = y^3 \begin{cases} > 0 & \text{se } y > 0 \\ < 0 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

il punto $(0, 0)$ non è né di massimo né di minimo.

**Esempio 2** $f(x,y) = x^4 + y^4$, $(x_0, y_0) = (0,0)$; si ha

$$f_x(x,y) = 4x^3, \;\; f_y(x,y) = 4y^3, \;\; f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

e quindi $(0,0)$ è un punto critico con $f(0,0)$. Ora

$$f_{xx}(x,y) = 12x^2, \;\; f_{xy}(x,y) = 0, \;\; f_{yy}(x,y) = 12y^2$$

e quindi

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

e risulta $\det H_f(0,0) = 0$. In questo caso si ha $f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0,0)$ e quindi $(0,0)$ è un punto di minimo.

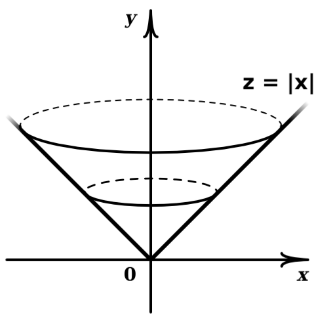
**Esempio 3** Prendendo $f(x,y) = -\left(x^4 + y^4\right)$ si ha che il punto critico $(0,0)$ è di massimo, $\det H_f(0,0) = 0$.

**Osservazione** I punti $(x,y)$ dove la funzione $f(x,y)$ non verifica le ipotesi di regolarità del teorema vanno considerati a parte. Ad esempio, la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ha minimo in $(0,0)$, dove non è neppure derivabile, infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

non esiste e quindi $f_x(0,0)$ non esiste (analogamente $f_y(0,0)$ non esiste).
Tuttavia $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 = f(0,0)$.

Notiamo che $f$ non è altro che la funzione $z = |x|$ ruotata attorno all'asse $z$.




Vediamo ora un'applicazione del teorema sui massimi e minimi locali.

**Esempio** Sia $f(x,y) = 2y^2 - x(x-1)^2$. Si ha

$$f_x(x,y) = -(x-1)^2 - 2x(x-1) = (x-1)(1-3x), \;\; f_y(x,y) = 4y$$

I punti critici sono i punti che verificano

$$\begin{cases} f_x(x,y) = (x-1)(1-3x) = 0 \\ f_y(x,y) = 4y = 0 \end{cases}$$

e quindi sono i punti $(1,0)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Calcoliamo la matrice hessiana:

$$f_{xx}(x,y) = 1 - 3x + (x-1)(-3) = -6x + 4, \;\; f_{yy}(x,y) = 4, \;\; f_{xy}(x,y) = 0$$

e quindi

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x+4 & 0 \\ \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo adesso calcolare $\det H_f(1,0)$ e $\det H_f\left(\frac{1}{3},0\right)$. Si ha

$$\det H_f(1,0) = -8 < 0$$

e quindi $(1,0)$ è un punto di sella.

$$\det H_f\left(\frac{1}{3},0\right) = 8 > 0,\ \ f_{xx}\left(\frac{1}{3},0\right) = 2 > 0$$

e quindi $\left(\frac{1}{3},0\right)$ è un punto di minimo, $\left(\frac{1}{3},0\right) = -\frac{4}{27}$.

Osserviamo che il fatto che $(1,0)$ sia un punto di sella si poteva capire facilmente poiché $f(1,0) = 0$ , $f(1,y) = 2y^2$ e $f(x,0) = -x(1-x)^2$, quindi vicino ad $(1,0)$ vi sono punti nei quali la funzione è positiva come punti nei quali la funzione è negativa.

Osserviamo anche che la funzione non ha né massimo né minimo assoluti, infatti

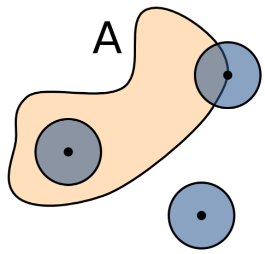
$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} -x(x-1)^2 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} -x(x-1)^2 = +\infty$$

Ma questa è un'altra storia che vedremo adesso in dettaglio.

### 6.3.7 Massimi e minimi assoluti

Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ vale una ed una sola delle seguenti possibilità:




1. $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x,y) \subset A$
2. $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x,y) \cap A = \varnothing$
3. $\forall r > 0, B_r(x,y) \cap A \neq \varnothing, B_r(x,y) \setminus A \neq \varnothing$

I punti che verificano la 1. si dicono **interni** ad A.

I punti che verificano la 2. si dicono **esterni** ad A.

I punti che verificano la 3. si dicono **punti frontiera** di A.

L'insieme dei punti frontiera di $A$ si chiama **frontiera di** $A$ e si indica con $\partial A$. Nel caso in cui $\partial A$ è parte dello stesso insieme $A$, cioè se $A = A \cup \partial A$, l'insieme si dice **chiuso**.

Nel seguito considereremo funzioni $f : A \to \mathbb{R}$, $A$ chiuso. La ricerca di massimi e minimi in questo caso deve tener conto sia dei punti di massimo e minimo interni ad $A$ (e per questo si applica la teoria precedente) sia del comportamento della funzione $f$ su $\partial A$ (del resto anche nello studio di funzioni di una variabile $f\,[a,b] \to \mathbb{R}$, il carattere di $f\,(a)$ e $f\,(b)$ era valutato a parte). Questo è più agevole nel caso in cui $\partial A$ si possa descrivere in modo semplice, ad esempio se

$$\partial A = \{(x\,(t)\,,y\,(t))\,,\ t \in [a,b]\}$$

con $x\,(t)$, $y\,(t)$ derivabili. Infatti, in questo caso studiare la funzione $f$ su $\partial A$ significa studiare la funzione di una variabile

$$\varphi\,(t) = f\,(x\,(t)\,,y\,(t))\,,\ t \in [a,b]$$

Diamo ora la definizione di massimo e minimo assoluto.

**Definizione.** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$; $(x_0, y_0) \in A$ si dice **punto di massimo assoluto** se*

$$f\,(x_0, y_0) \geq f\,(x,y) \quad \forall\,(x,y) \in A\ ;$$

*$(x_0, y_0) \in A$ si dice **punto di minimo assoluto** se*

$$f\,(x_0, y_0) \leq f\,(x,y) \quad \forall\,(x,y) \in A\ .$$

Nella ricerca di massimi e minimi assoluti ci viene in aiuto un importante risultato di "esistenza".

**Teorema** (Teorema di Weierstrass)**.** *Sia $A$ chiuso e limitato (cioè $A$ è contenuto in un disco di raggio sufficientemente grande). Se $f : A \to \mathbb{R}$ è continua, allora esiste almeno un punto $(x_M, y_M) \in A$ tale che*

$$f\,(x_M, y_M) \geq f\,(x,y) \quad \forall\,(x,y) \in A$$

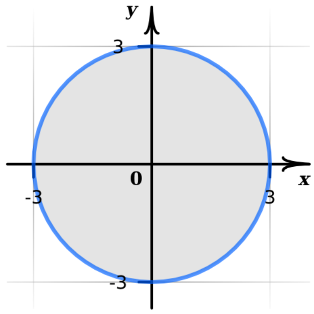
*ed esiste almeno un punto $(x_m, y_m) \in A$ tale che*

$$f\,(x_m, y_m) \leq f\,(x,y) \quad \forall\,(x,y) \in A$$

Questo teorema ci assicura che, se dobbiamo trovare solo massimo e minimo **assoluti** di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, $A$ chiuso e limitato, basta trovare i punti critici della funzione all'interno (senza studiare il carattere) e i punti critici della funzione ristretta alla frontiera di $A$ (senza studiarne il carattere). Quindi, confrontando i valori della funzione in tutti questi punti e nei punti dove $f$ non è derivabile si troveranno i punti di massimo assoluto (corrispondenti al valore più grande) ed i punti di minimo assoluto (corrispondenti al valore più piccolo). Questo grazie al fatto di essere sicuri della loro esistenza.

Ma vediamo un paio di esempi che riassumono i possibili comportamenti di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato, non limitandoci alla ricerca del massimo e minimo assoluti, ma guardando anche il carattere di ogni singolo punto critico.

**Esempio 1** (massimo e minimo assoluti sono sul bordo)




$$f(x,y) = xy, \; A = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\right\}$$

**Studio all'interno di** $A$: $f_x(x,y) = y$, $f_y(x,y) = x$, quindi l'unico punto critico è il punto $(0,0)$.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \det Hf(x,y) = -1 < 0$$

e quindi $(0,0)$ non è né di massimo né di minimo (del resto si poteva vedere facilmente, poichè $f(0,0) = 0$ e in un intorno di $(0,0)$ la funzione assume valori sia positivi che negativi).

**Studio sulla frontiera di** $A$: poichè

$$\partial A = \{(3\cos t, 3\sin t), \; t \in [0, 2\pi]\}$$

si tratta di studiare $\varphi(t) = f(3\cos t, 3\sin t) = 9\cos t \sin t$.

$$\varphi(t) = 9\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) = 9\left(1 - 2\sin^2 t\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 t = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |\sin t| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

quindi i punti critici di $\varphi(t)$ sono $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Inoltre $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$.
Si ha $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varphi\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{9}{2}$ (valore massimo) , $\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \varphi\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{9}{2}$ (valore minimo). In definitiva i punti di massimo assoluto per $f$ sono $\left(3\cos\frac{\pi}{4}, \; 3\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(3\cos\frac{5\pi}{4}, \; 3\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, dove $f$ vale $\frac{9}{2}$, mentre i punti di minimo assoluto per $f$ sono $\left(3\cos\frac{3\pi}{4}, \; 3\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(3\cos\frac{7\pi}{4}, \; 3\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, dove $f$ vale $-\frac{9}{2}$.
Osserviamo che c'è anche un altro modo di descrivere la frontiera di $A$, vedendola come unione dei due grafici $\left(x, \sqrt{9-x^2}\right)$ e $\left(x, -\sqrt{9-x^2}\right)$, $-3 \leq x \leq 3$. Anche così la funzione $f$ ristretta a $\partial A$ si può vedere come funzione di una sola variabile

$$g(x) = f\left(x, \sqrt{9-x^2}\right), \; h(x) = f\left(x, -\sqrt{9-x^2}\right)$$

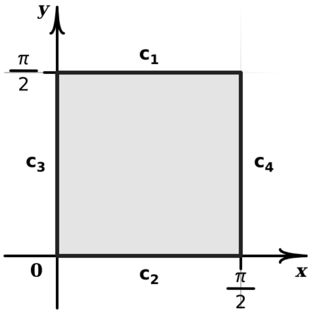
e quindi studiare il comportamento di $f$ ristretta a $\partial A$ con le tecniche usate per una variabile.

Vediamo ad esempio $g(x) = x\sqrt{9-x^2}$, $-3 \leq x \leq 3$.

$$g'(t) = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{9}{2}, \; g\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{9}{2}, \; g(-3) = g(3) = 0, \quad \text{eccetera.}$$

**Esempio 2** (massimo interno e minimo sul bordo)




$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y), \quad A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

**Studio all'interno di** $A$:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \cos x + \cos(x+y) \\ f_y(x,y) = \cos y + \cos(x+y) \end{cases}$$

Quindi

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos y$$

e poiché $x$ e $y$ variano tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, deve essere $x = y$. Quindi, dalla prima equazione si ricava $\cos x + \cos(2x) = 0$, cioè

$$\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0, \text{ da cui } \cos x = \left\langle \begin{array}{l} -1 \\ \\ \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Poiché $x$ tale che $\cos x = -1$ è fuori dominio, resta $\cos x = \dfrac{1}{2}$, cioè $x = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. L'unico punto critico è pertanto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. L'hessiano è

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x - \sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ \\ -\sin(x+y) & -\sin y - \sin(x+y) \end{pmatrix}$$

$$Hf\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \ \det H_f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{4} > 0$$

Poiché $f_{xx}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < 0$, si ha quindi che $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ è punto di massimo relativo, $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

**Studio su** $\partial A = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$.

Su $C_2$:

$f(x,y) = (x,0) = 2\sin x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, ha massimo in $x = \dfrac{\pi}{2}$ e minimo in $x = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 2$, $f(0,0) = 0$

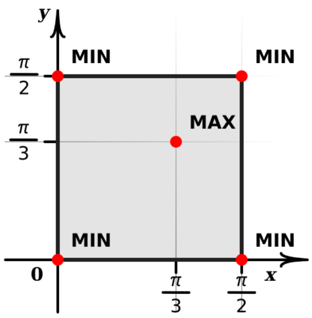
Su $C_4$:

$f(x,y) = \left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 1 + \sin y + \cos y$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$. Si ha $f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 2$ e dallo studio della derivata si ottiene che $f$ ha massimo in $y = \dfrac{\pi}{4}$ con $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}$ e minimo in $y = 0$ ed $y = \frac{\pi}{2}$.

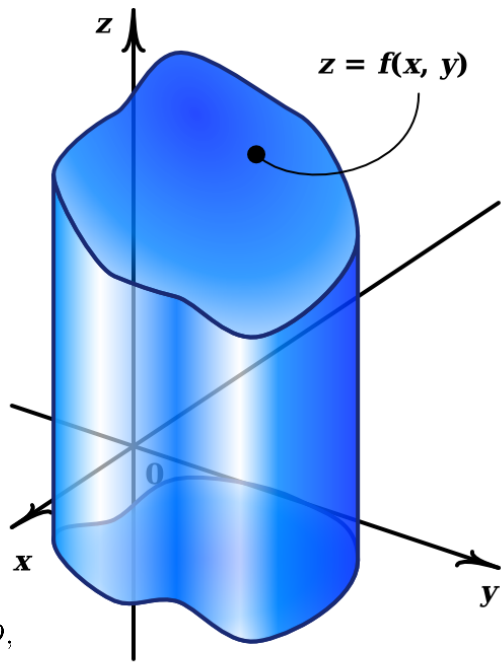
Su $C_1$:

$f(x,y) = f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin x + \cos x$ (analogo a $C_4$)

Su $C_3$:
$f(x,y) = f(0,y) = 2\sin y$ (analogo a $C_2$)
Riassumendo e confrontando i valori trovati si ottiene che il massimo assoluto di $f$ è $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, raggiunto nel punto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, ed il minimo assoluto di $f$ è 2, raggiunto nei quattro vertici del quadrato.




**Attenzione!!** I massimi (o i minimi) di una funzione ristretta al bordo, che non risultano essere massimi (o minimi) assoluti, NON sono massimi (o minimi) relativi per tale funzione.




## 6.4 Integrali doppi

Con le nozioni apprese fin qui, siamo adesso in grado di trattare l'argomento che riguarda l'integrazione di funzioni di due variabili; più precisamente cercheremo di dare un senso alla scrittura

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \text{ integrale doppio di } f \text{ su } D,$$

come naturale estensione della scrittura $\int_a^b f(x)\,dx$ in una variabile.
Ovviamente con due variabili l'insieme $D$ su cui si integra può avere mille forme, ben diverso dalla situazione in una variabile, dove avevamo solo un intervallo $[a,b]$!!
In analogia con l'integrale per una funzione limitata $f(x) \geq 0$ in un intervallo $[a,b]$, l'integrale doppio di una funzione limitata $z = f(x,y) \geq 0$ su un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ può essere

motivata dal problema della determinazione del volume della regione tridimensionale

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in D, \ 0 \leq z \leq f(x, y)\right\}$$

Andiamo con ordine. Per continuare l'analogia con il caso unidimensionale, dove consideravamo partizioni dell'intervallo $[a, b]$, dobbiamo dare la definizione di partizione di un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$.

**Definizione.** *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso, limitato e misurabile; chiameremo* ***partizione*** *$\mathcal{P}$ di $D$ di norma minore o uguale a $\delta$, $\delta > 0$, una qualunque famiglia finita $D_1, D_2, \ldots, D_r$ di insiemi misurabili tali che*

*$\mathcal{P}1)$* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i = D$

*$\mathcal{P}2)$* $D_i \cap D_j \neq \varnothing \qquad \forall i \neq j \qquad 1 \leq i, j \leq n$

*$\mathcal{P}3)$ diametro* $D_i \leq \delta \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$

*dove diametro* $D_i = \max\{||P - Q|| \ , \ P, Q \in D_i\}$

( tralasceremo qui il concetto di misurabilità per non appesantire la presentazione, con la premessa che tutti gli insiemi che considereremo saranno misurabili: non è chiedere troppo se non si sconfina nel patologico...)

Sempre per continuare l'analogia diamo la definizione di somma di Riemann.

**Definizione.** *Siano $f$, $D$, $\mathcal{P}$ come sopra, sia $P_i$ un punto qualsiasi dell'insieme $D_i$ della partizione $\mathcal{P}$. Definiamo*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{P},\delta} = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \ \text{area } D_i$$

Intuitivamente, quando la partizione diventa più fitta, che corrisponde al tendere della sua norma a zero, le somme di questi volumi tendono al volume sotto il grafico di $f$. In generale si ha il seguente

**Teorema.** *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso, limitato e misurabile, sia $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste*

$$\lim_{\delta \to 0} \mathcal{R}_{\mathcal{P},\delta}$$

*e tale limite è indipendente dalle partizioni $\mathcal{P}$ e dalla scelta dei punti $P_i$. Tale limite viene detto* ***integrale su $D$ della funzione*** *$f$ e si scrive*

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy \qquad (\text{anche brevemente } \iint_D f \ )$$

Osserviamo che il limite precedente esiste anche se $f$ cambia segno. In questo caso però l'integrale non corrisponderà semplicemente ad un volume, ma alla somma algebrica dei volumi sopra e sotto il piano $x, y$.

**Proprietà.** *Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$ continue, $D$ chiuso, limitato e misurabile; allora*

1. $\text{area } D = 0 \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_D f = 0$

2. $\displaystyle\int_D 1 = \text{ area } D$

3. $\left.\begin{array}{l} D = A \cup B \\ \text{area } (A \cup B) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \displaystyle\int_D f = \int_A f + \int_B f$

4. $\displaystyle\int_D (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_D f + \mu \int_D g \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

5. $f \leq g \text{ su } D \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_D f \leq \int_D g$

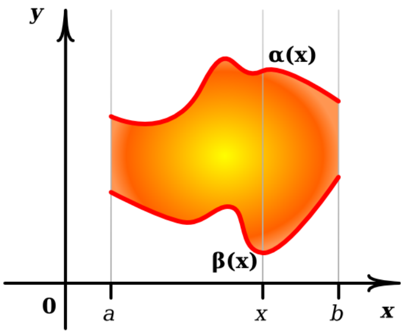
6. $\displaystyle\left|\int_D f\right| \leq \int_D |f|$

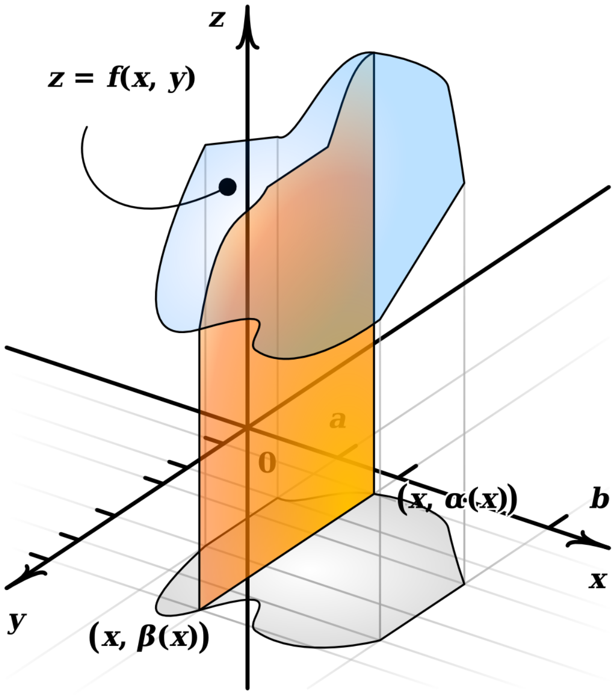
Cerchiamo ora metodi per calcolare integrali doppi. La via è essenzialmente quella di ricondursi al calcolo di integrali di funzioni di una variabile.
Gli strumenti fondamentali sono due

1. il **teorema di Fubini**, che permette di vedere un integrale di due variabili come due integrazioni successive di una variabile;

2. la **formula di cambio di variabili**, che permette di scrivere un integrale in modo più “trattabile” (sempre in vista del teorema di Fubini): l'analogo in una variabile dell'integrazione per sostituzione.

### 6.4.1 Il teorema di Fubini




Consideriamo il caso in cui

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; a \leq x \leq b, \; \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\right\}$$

con $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

Per calcolare l'integrale

$$\int_D f(x, y) \, dxdy, \quad f \geq 0$$

si può pensare al solido

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; (x, y) \in D, \; 0 \leq z \leq f(x, y)\right\}$$

scomposto in "fette"

$$E_x = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \; 0 \leq z \leq f(x, y)\right\} \qquad (x \in [a, b] \text{ fissato})$$

Nella figura sono scambiati gli assi $x$ ed $y$ per rendere più visibile la situazione. L'area della "fetta" $E_x$ è data dall'integrale di una variabile

$$A(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \qquad (x \in [a, b] \text{ fissato})$$

È quindi del tutto naturale che il volume di $E$ si possa ottenere integrando i contributi delle singole fette, cioè

$$\mathrm{vol}E = \int_a^b A(x) \, dx = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

cioè

$$\int_D f\ dxdy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Naturalmente, se $D$ è del tipo

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y) \right\} \qquad \gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R} \text{ continue}$$

si avrà analogamente

$$\int_D f\ dxdy = \int_c^d \left( \int_{\alpha(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

La validità di questi risultati è assicurata dal seguente

**Teorema** (Teorema di Fubini)**.** *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ continua; se $D$ è del tipo*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x) \right\} \qquad \alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continue}$$

*allora vale*

$$\int_D f\ dxdy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

*Analogamente, se $D$ è del tipo*

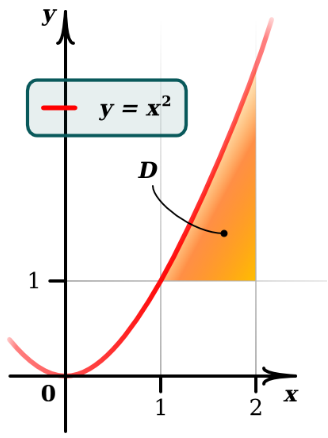
$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y) \right\} \qquad \gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R} \text{ continue}$$

*allora vale*

$$\int_D f\ dxdy = \int_c^d \left( \int_{\alpha(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

**Esercizio** Calcolare $I = \int_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$, dove

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le x^2 \right\}$$




**Risoluzione.** In questo caso $\alpha(x) = 1$ , $\beta(x) = x^2$. Si ha

$$I = \int_1^2 \left( \int_1^{x^2} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=1}^{y=x^2} dx = \frac{1006}{105}$$

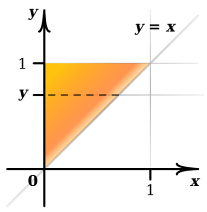
**Osservazione** È possibile che il dominio di integrazione si possa descrivere in entrambi i modi considerati nel teorema di Fubini. Ad esempio, il domionio $D$ dell'esempio precedente può essere anche descritto come

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le y \le 4, \ \sqrt{y} \le x \le 2\}$$

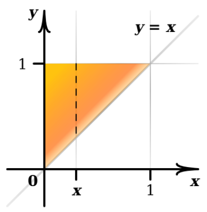
(qui si ha $\gamma(y) = \sqrt{y}$ e $\delta(y) = 2$)
In questi casi non è sempre indifferente una o l'altra delle due descrizioni (che corrispondono ad ordini di integrazione diversi). Vediamo un esempio dove con una delle due descrizioni del dominio addirittura non si può fare il calcolo.

**Esempio** Calcolare $I = \int_D e^{y^2} dxdy$, dove $D$ è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.
Il dominio di integrazione $D$ si può descrivere in due modi:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le x \le y\}$$




$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ x \le y \le 1\}$$




Se applichiamo il teorema di Fubini con la prima descrizione otteniamo

$$\int_D e^{y^2} dxdy = \int_0^1 \left( \int_0^y e^{y^2} dx \right) dy = \int_0^1 e^{y^2} y dy = \frac{1}{2} \, e^{y^2} \Big]_0^1 = \frac{1}{2} \, (e - 1)$$

Se invece utiliziamo la seconda descrizione di $D$, otteniamo

$$\int_D e^{y^2} dxdy = \int_0^1 \left( \int_x^1 e^{y^2} dy \right) dx$$

ma $\int e^{y^2} dy$ non è esprimibile in termini elementari e quindi non possiamo portare a termine il calcolo.

### 6.4.2 Cambio di variabili negli integrali multipli

Consideriamo l'integrale

$$\int_D f(x, y) \, dxdy$$

e sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una trasformazione definita da

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

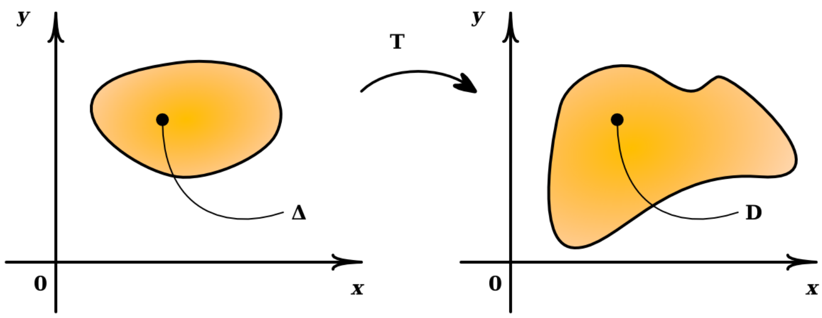
con $x_u$, $x_v$, $y_u$, $y_v$ continue. Supponiamo che $T$ trasformi in modo biunivoco una regione $\Delta$ del piano $u, v$ nella regione $D$ del piano $x, y$. Supponiamo inoltre che lo jacobiano

$$J = \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

abbia determinante

$$\det J = x_u y_v - x_v y_u$$

diverso da zero in ogni punto di $\Delta$.




In queste condizioni vale la formula di cambio di variabili

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_\Delta f(x(u, v), y(u, v)) \left| det \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| dudv}$$

Nel caso (molto importante) di coordinate polari

$$\begin{cases} x = x(r, \vartheta) = r \cos \vartheta \\ y = y(r, \vartheta) = r \sin \vartheta \end{cases}$$

abbiamo già calcolato la matrice jacobiana. Essa è

$$J = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

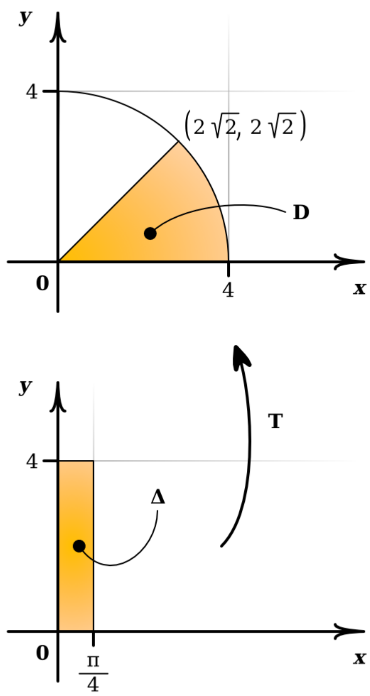
e quindi

$$\det J = r \left( \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \right) = r$$

la formula di cambio di variabili diventa in questo caso

$$\boxed{\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_\Delta f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)\, r dr d\vartheta}$$

Si capisce subito l'utilità di questa formula quando $D$ è un disco (o un settore, o una corona circolare) centrato nell'origine: l'insieme $\Delta$ è un rettangolo!!




**ESEMPIO** Calcolare $\int_D xy\ dxdy$, dove $D$ è la regione in figura.
**Risoluzione**
Passando a coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned}\int_D xy\ dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^4 r\cos\vartheta \cdot r\sin\vartheta \cdot r dr\right) d\vartheta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta \sin\vartheta \left(\int_0^4 r^3 dr\right) d\vartheta = \\ &= 64 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta\sin\vartheta\ d\vartheta = \\ &= 64 \left.\frac{\sin^2\vartheta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= 16\end{aligned}$$

Fate questo calcolo in coordinate cartesiane, usando il Teorema di Fubini.

THE END