MODALITÀ SECONDO COMPITINO

NON SONO CONSENTITI:

APPUNTI, LIBRI, CALCOLATRICI e TELEFONINI

Il secondo compitino di Analisi consterà di alcuni esercizi pratici (ad esempio serie numeriche e di potenze, polinomi di Taylor, equazioni differenziali, integrali doppi ecc.) e di alcune domande un po' più teoriche.
È necessario sapere tutte le definizioni e gli enunciati fatti a lezione.
È necessario inoltre sapere le seguenti dimostrazioni:

1) Sia $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $S \in R$. Dimostrare che $\lim_n a_n = 0$

2) Sia $L = \lim_n \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_n \sqrt{|c_n|}$.
   Dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(x - x_0)^n$ converge per $|x - x_0| < \frac{1}{L}$

3) Sia $f : (a, b) \to R$, derivabile, sia $x_0 \in (a, b)$. Sia $P_1(x)$ il polinomio di Taylor di f di grado 1 centrato in x_0. Dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_1(x)}{(x - x_0)} = 0$$

4) Sia $f : (a, b) \to R$, $(n + 1)$ volte derivabile, sia $x_0 \in (a, b)$. Sia $P_n(x)$ il polinomio di Taylor di f di grado n centrato in x_0. Dimostrare che se $f^{(n+1)}(x)$ è limitata in un intorno I_{x_0} di x_0, allora

$$\lim_n E_n(x) = \lim_n [f(x) - P_n(x)] = 0 \ , \ \forall x \in I_{x_0}$$

5) Dimostrare che la funzione $y(t) = e^{-A(t)}F(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare del primo ordine $y'(t)+a(t)y(t) = b(t)$, dove $a(t)$, $b(t)$ sono funzioni continue e $A(t)$, $F(t)$ sono primitive delle funzioni $a(t)$, $b(t)e^{A(t)}$ rispettivamente

6) Dimostrare che se $f : R^2 \to R$ è differenziabile nel punto (x_0, y_0), allora è continua in tale punto