MODALITÀ COMPITO COMPLETO

NON SONO CONSENTITI:

APPUNTI, LIBRI, CALCOLATRICI e TELEFONINI

OGNI STUDENTE DEVE AVERE con sè un DOCUMENTO D'IDENTITÀ

Il compito completo di Analisi consterà di alcuni esercizi pratici (ad esempio studi di funzioni, serie, equazioni differenziali, serie numeriche e di potenze, polinomi di Taylor, equazioni differenziali, integrali doppi ecc.) e di alcune domande od esercizi un po' più teorici.
È necessario sapere tutte le definizioni e gli enunciati fatti a lezione.
È necessario inoltre sapere le seguenti dimostrazioni:

1) $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ è strettamente crescente in (a,b)

2) $f : (a,b) \to R$ derivabile in $x_0 \in (a,b) \Longrightarrow f$ è continua in x_0

3) regola della derivata di un prodotto di funzioni derivabili

4) $\left.\begin{array}{l} \text{sia } f : (a,b) \to R \text{ derivabile} \\ x_0 \in (a,b) \text{ un punto di max (o di min) di } f \end{array}\right] \Longrightarrow f'(x_0) = 0$

5) teorema del valor medio integrale

6) teorema fondamentale del calcolo integrale (solo la parte 1))

7) formula di integrazione per parti

8) Sia $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $S \in R$. Dimostrare che $\lim_n a_n = 0$

9) Sia $L = \displaystyle\lim_n \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_n \sqrt[n]{|c_n|}$.

Dimostrare che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(x - x_0)^n$ converge per $|x - x_0| < \frac{1}{L}$

10) Sia $f : (a, b) \to R$, due volte derivabile, sia $x_0 \in (a, b)$. Sia $P_1(x)$ il polinomio di Taylor di f di grado 1 centrato in x_0. Dimostrare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_1(x)}{(x - x_0)} = 0$$

11) Sia $f : (a, b) \to R$, $(n + 1)$ volte derivabile, sia $x_0 \in (a, b)$. Sia $P_n(x)$ il polinomio di Taylor di f di grado n centrato in x_0. Dimostrare che se $f^{(n+1)}(x)$ è limitata in un intorno I_{x_0} di x_0, allora

$$\lim_n E_n(x) = \lim_n [f(x) - P_n(x)] = 0 \ , \ \forall x \in I_{x_0}$$

12) Dimostrare che la funzione $y(t) = e^{-A(t)}F(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare del primo ordine $y'(t)+a(t)y(t) = b(t)$, dove $a(t)$, $b(t)$ sono funzioni continue e $A(t)$, $F(t)$ sono primitive delle funzioni $a(t)$, $b(t)e^{A(t)}$ rispettivamente

13) Dimostrare che se $f : R^2 \to R$ è differenziabile nel punto (x_0, y_0), allora è continua in tale punto