(1) RAPPRESENTAZIONE ASSIOMATICA DI $\mathbb{N}$:

- OGNI CAMPO NUMERICO ORDINATO CONTIENE UN INSIEME ISOMORFO AD $\mathbb{N}$

(2) OGNI CAMPO NUMERICO ORDINATO COMPLETO E' ISOMORFO AD $\mathbb{R}$

(quindi $\mathbb{R}$ e' un modello per tutti i campi numerici ordinati completi)

(1) Cominciamo con l'introdurre la nozione di terna di Peano.

(F, e, s) e' una terna di Peano sse

F e' un insieme, $e \in F$, $s: F \to F$ t.c.

i) $e \notin s(F)$

ii) s e' iniettiva

iii) $G \subset F$, $e \in G$, $s(G) \subset G \Rightarrow G = F$ (principio d'induzione)

ESEMPI

$\boxed{(\mathbb{N}, 1, \sigma)}$ dove σ e' l'applicazione successore

$$\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto n+1$$

e' una terna di Peano

$\boxed{(D, 1, \sigma)}$ dove σ e' l'applicazione $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $D = \{dispari\}$,
$$x \mapsto x+2$$

e' una terna di Peano

Invece se prendiamo $F = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e σ e' l'applica-

Fine $\sigma: F \to F$, la terna $\boxed{(F, 1, \sigma)}$ non è una
$\infty \mapsto \infty$
$n \mapsto n+1$

terna di Peano, perché viene a cadere iii). Vediamolo:
Sia $G = \mathbb{N}$. Si ha $G \subset F$, $1 \in G$, $S(G) \subset G$, ma $G \neq F$

Anche $\boxed{(F, 1, s)}$ con $F = \{0, 1\}$, s.t. $S(0) = 1$ e $S(1) = 0$ non è una terna di Peano, perché non vale i)

Vediamo ora una Prop. che sarà utile per il teor. d'isomorfismo

Proposizione:

(F, e, s) terna di Peano $\Rightarrow F = \{e\} \cup s(F)$

dim:

Sia $G = \{e\} \cup S(F)$: vediamo che G verifica la proprietà iii) della definizione di terna di Peano e quindi $G = F$. Infatti

$G \subset F$ perché $e \in F$ ed $s: F \to F$ quindi $S(F) \subset F$
$e \in G$
$S(G) \subset G$, perché $G \subset F \Rightarrow S(G) \subset S(F) \subset \{e\} \cup S(F) = G$

#

Costruiamo adesso una terna di Peano, a partire da un generico campo numerico ordinato.

Sia $(X, z, u, +, \cdot)$ un campo numerico ordinato
Consideriamo gli insiemi $A \subset X$ induttivi, dove A è detto insieme induttivo sse $\begin{cases} u \in A \\ a + u \in A \quad \forall a \in A \end{cases}$.

Consideriamo ora l'intersezione di tutti questi insiemi

induttivi, sia

$$\boxed{I_X = \bigcap \{A \subset X,\ A \text{ induttivo}\}}$$

È chiaro che $I_X \neq \emptyset$ ($u \in I_X$ perché $u \in A$ $\forall A$ induttivo)

I_X è anch'esso induttivo, infatti $u \in I_X$ e se $a \in I_X \Rightarrow$

$$\Rightarrow a \in A \ \forall A \text{ induttivo} \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ A \text{ induttivo}}}{a+u \in A} \ \forall A \text{ induttivo} \Rightarrow a+u \in I_X$$

I_X è il più piccolo insieme induttivo di X.

<u>Proposizione</u>: (I_X, u, σ), dove $\sigma: I_X \to I_X$, $a \mapsto a+u$

è una terna di Peano

<u>dim</u>:

abbiamo già osservato che $u \in I_X$; dimostriamo solamente che $u \notin \sigma(I_X)$: dimostriamo che se $a \in I_X \cap \sigma(I_X) \Rightarrow a \neq u$, infatti se $a \in I_X \cap \sigma(I_X)$ si ha $a = \sigma(b)$ per qualche $b \in I_X$. Allora $a = b+u$; se per assurdo $a = u$, si avrebbe $u = b+u$, cioè $b = z$ assurdo perché $z \notin I_X$, in quanto $\exists$ un A induttivo t.c. $z \notin A$

(ad esempio $z \notin \{x \geq u\}$ che è induttivo, perché $z < u$)

$\#$

<u>OSS</u>: in parole semplici u non è un successivo perché questo comporterebbe l'esistenza del precedente, che sarebbe z, ma z non sta nell'intersezione di tutti gli induttivi e quindi non sta in I_X. Questa proprietà, che è la i) delle terne di Peano, vale solo per I_X, mentre per la ii) e la iii) basterebbe un qualunque insieme induttivo;

Quindi, riassumendo, partendo da un campo numerico ordinato $(X, z, u, +, \cdot)$ abbiamo costruito un sottoinsieme I_X tale che (I_X, u, σ) è una terna di Peano. Abbiamo anche osservato che $(\mathbb{N}, 1, \sigma)$ è una terna di Peano. Quindi se dimostriamo che tutte le terne di Peano sono isomorfe tra loro, siamo arrivati a dimostrare che ogni campo numerico ordinato contiene un insieme isomorfo ad $\mathbb{N}$, proprio quello che avevamo annunciato.

Enunciamo allora il teorema di isomorfismo per le terne di Peano

TEOREMA

Siano (F, e, s), $(\Phi, \varepsilon, \sigma)$ due terne di Peano.
Allora

$\exists \alpha : F \to \Phi$ t.c. α è biettiva, $\alpha(e) = \varepsilon$
ed inoltre $\alpha(s(f)) = \sigma(\alpha(f)) \quad \forall f \in F$

dim:
non dimostriamo per intero il teorema, ma diamo l'idea di come si costruisce l'isomorfismo α.
Per fare questo ci viene in aiuto la precedente proposizione di rappresentazione delle terne di Peano, cioè se (F, e, s) è una terna di Peano, allora

$$F = \{e\} \cup \sigma(F).$$

Poniamo

$$\begin{cases} \alpha(e) = \varepsilon \\ \alpha(s(f)) = \sigma(\alpha(f)) \quad \forall f \in F \text{ per cui sia stata già definita } \alpha(f) \in \mathcal{F} \end{cases}$$

Vediamo che effettivamente α è definita su tutto F.
Chiamiamo D_α il dominio di α: dobbiamo dimostrare che $D_\alpha = F$. Per fare questo basta osservare che D_α verifica le ipotesi della proprietà iii) della terna di Peano, infatti:

$$\begin{cases} D_\alpha \subset F = \{e\} \cup \{s(F)\} \\ e \in D_\alpha \\ s(D_\alpha) \subset D_\alpha \quad \text{perché} \quad f \in D_\alpha \overset{\text{per come è stata definita}}{\Longrightarrow} s(f) \in D_\alpha \Rightarrow s(D_\alpha) \subset D_\alpha \end{cases}$$

Quindi se D_α verifica le ipotesi della proprietà iii) della terna di peano (F, e, σ), si ha $D_\alpha = F$

Resta da dimostrare (noi non lo faremo) che α è biettiva.

#

(2) Dal fatto che ogni campo numerico ordinato contiene un insieme isomorfo ad $\mathbb{N}$, possiamo ricavare, con l'ulteriore assunzione di completezza, che ogni campo numerico ordinato completo è isomorfo ad $\mathbb{R}$

Anche di questo importante teorema non daremo una dimostrazione completa, ma vedremo essenzialmente la costruzione dell'isomorfismo, tralasciando la verifica che tale costruzione dà veramente un isomorfismo.

Ora enunciamo il teorema:

TEOREMA

Sia $(X, z, u, +, \cdot, \leq)$ un campo numerico ordinato completo

Allora

$\exists\, \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ biettiva t.c.
$$\begin{cases} x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y) & \text{conserva l'ordine} \\ \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \end{cases}$$

dim:

grazie al teorema d'isomorfismo tra terne di Peano

so già che esiste un isomorfismo

$$\alpha : \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{\mathbb{N}}} \longrightarrow \underset{X}{\overset{\cap}{I_X}} \;;$$

lo estendo ai razionali

$$\alpha : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_X \quad \mathbb{Q} \subseteq X$$

$$\frac{m}{n} \longmapsto \alpha\left(\frac{m}{n}\right) = \alpha(m) \cdot [\alpha(n)]^{-1}$$

(è una buona definizione con l'equivalenza $\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow m \cdot s = r \cdot n$);

lo estendo adesso ad $\mathbb{R}$ in questo modo:

Sia $x \in \mathbb{R}$, pongo $A_x = \{\alpha(r) : r \in \mathbb{Q},\ r < x\} \subset X$.

Ho che $A_x \neq \emptyset$ e superiormente limitato, quindi

esiste il $\sup A_x \in X$ perché X è completo

Pongo $\varphi(x) = \sup A_x$.

Dovrei adesso dimostrare che, così definito, $\varphi|_{\mathbb{Q}} = \alpha$

e che φ è realmente un isomorfismo.

OSSERVAZIONE: Tenuto conto degli assiomi nella definizione di una terna di Peano, è facile introdurre una definizione di somma, di prodotto e di ordine. Cioè data (F, e, σ)

SOMMA: siano $f, g \in F$

si pone $f + e = \sigma(f)$

in generale, se $f+g$ è noto, $f + \sigma(g) = \sigma(f+g)$

PRODOTTO siano $f, g \in F$

si pone $f \cdot e = f$

in generale, se $f \cdot g$ è noto, $f \cdot \sigma(g) = f \cdot g + f$

ORDINE siano $f, g \in F$

si pone $f \leq g \iff \exists h \in F$ t.c. $f + h = g$

— · —

Vediamo adesso come in un campo numerico ordinato, la relazione d'ordine $\leq$ si possa dare in maniera equivalente introducendo un particolare sottoinsieme $P \subset X$, che sarà chiamato classe degli elementi positivi.
Così facendo saremo in grado di dare un esempio di campo numerico ordinato diverso dai soliti e un esempio di campo numerico ordinato non archimedeo

PROPOSIZIONE 8 (caratterizzazione dell'ordine)

$X = (X, 0, 1, +, \cdot)$ campo numerico. Sono equivalenti

X ordinato $(\leq)$ $\iff$ $\exists P \overset{\neq\emptyset}{\subset} X$ P è detto classe degli elementi positivi t.c.

(cioè $\exists$ una relazione d'ordine totale compatibile con $+$ e $\cdot$)

$P + P \subset P$, $P \cdot P \subset P$

$X = P \cup \{0\} \cup \{-P\}$

dim:

$\Rightarrow$) definiamo $P = \{x \in X$ t.c. $x > 0\}$

è facile verificare che P soddisfa le proprietà richieste

$\Leftarrow$) definiamo la seguente relazione

$$x \leq y \iff y - x \in P \cup \{0\} \qquad \left(\begin{array}{c} x < y \iff \\ y - x \in P \end{array}\right)$$

è facile verificare che questa è una relazione d'ordine totale in X, compatibile con $+$ e $\cdot$

ESEMPIO di campo numerico ordinato (archimedeo) F (non completo)

con $\mathbb{Q} \subset F \subset \mathbb{R}$

$F = \{a + b\sqrt{2} \ ; \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ $\quad (F, 1, 0, +, \cdot)$

Ovviamente F è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto

F è un sotto campo di $\mathbb{R}$. Resta da definire l'ordine (usiamo la caratterizzazione della prop precedente); sia

$$P = \{c = a + b\sqrt{2} \in F \ ; \ c > 0 \text{ (come elementi di } \mathbb{R})\}$$

(ad esempio $-1 + \sqrt{2} \in P$)

Potrei definire l'ordine anche così:
$P = \{c = a + b\sqrt{2}$ t.c. $a - b\sqrt{2} > 0$ in $\mathbb{R}\}$

Questo campo si può ordinare in due modi, cosa che non è possibile in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{R}$

ESEMPIO di campo ordinato NON ARCHIMEDEO

Consideriamo $\mathbb{Q}(t) = \left\{ f(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \,,\, p, q \in P(t) \text{ polinomi}, \; q \neq 0 \right\}$

$\mathrm{Dom}(f) = \{ t : q(t) \neq 0 \}^{(*)}$ (naturale identificazione $\frac{p(t)}{q(t)} = \frac{r(t)}{s(t)} \iff p(t)\cdot s(t) = r(t)\, q(t)$)

somme $\frac{p(t)}{q(t)} + \frac{r(t)}{s(t)} = \frac{p(t)s(t) + q(t)r(t)}{q(t)s(t)}$; $\frac{p(t)}{q(t)} \cdot \frac{r(t)}{s(t)} = \frac{p(t)\, r(t)}{q(t)\, s(t)}$

$\mathbb{Q}(t)$ è un campo numerico e per renderlo ordinato consideriamo

$$P = \left\{ \frac{p(t)}{q(t)} \text{ t.c. prodotto dei coeff. guida è } > 0 \right\}$$

(dove coeff. guida è il coeff. di grado massimo della t nel polinomio)

P soddisfa le proprietà per la caratterizzazione dell'ordine.
Vediamo che non è archimedeo:

$f(t) = \frac{t}{1} = t \quad f(t) \in P \qquad g(t) = \frac{t^2}{1} = t^2 \quad g(t) \in P$

(In $\mathbb{Q}(t)$ i naturali sono i polinomi $\frac{n}{1}$, $n \in \mathbb{N}$)

Vediamo che $\nexists\, n$ t.c. $nt > t^2$; dovrebbe essere

$nt - t^2 \in P \iff \frac{-t^2 + nt}{1} \in P$ ma il prodotto dei coeff. guida è $-1 < 0$

quindi $nt - t^2 \notin P \quad \forall n$

(*) non appartengono a $\mathrm{Dom}(f)$ al più $t_1, \dots, t_n$ punti (supposto il grado di $q(t)$ sia n)

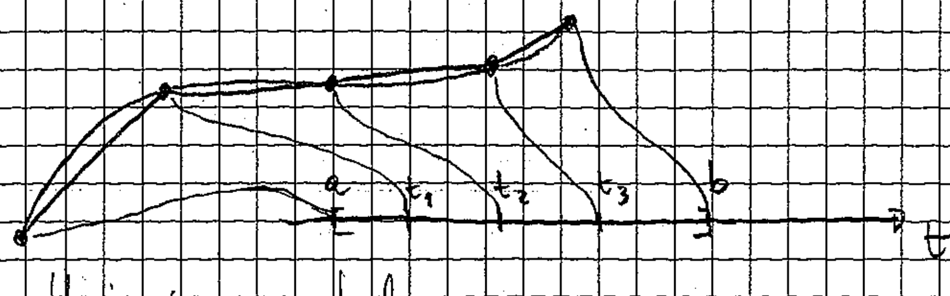
OGGETTI MATEMATICI NOTI DEFINITI IN MANIERA INUSUALE

Già durante il corso avete visto le funzioni trigonometriche partendo da una definizione che usava le serie di potenze: era un esempio di oggetto noto definito in maniera inusuale. Vogliamo adesso introdurre tre oggetti noti usando per tutti e tre il concetto di integrale e precisamente: la lunghezza di una curva, le funzioni trigonometriche ed il logaritmo con la sua inversa, l'esponenziale. Andiamo con ordine. Iniziamo con il definire la lunghezza di una curva, concetto fondamentale per introdurre poi le funzioni trigonometriche.

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Consideriamo una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ regolare (cioè $x(t)$, $y(t)$ sono funzioni continue con derivate continue e $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$ $\forall t$).
Usualmente si definisce la lunghezza di $\gamma(t)$ come

$$\ell_\gamma = \sup \{ \ell_{polig} \, ; \, polig. = \text{poligonale iscritta in } \gamma \}$$



Qui invece definiamo

$$\boxed{\ell_\gamma = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt}$$

Vediamo che tale definizione è molto ragionevole, perché suffragata da due fatti

1) Tale definizione coincide con la lunghezza elementare (Teor. di Pitagora) nel caso γ sia un segmento

2) con tale definizione di lunghezza si ha che la curva di lunghezza minima congiungente due punti fissati è il segmento (e solo il segmento)

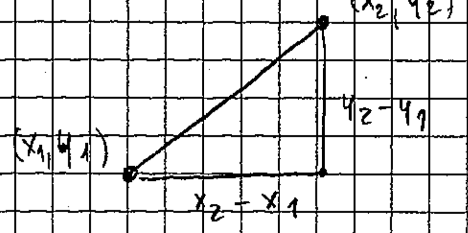
Dimostriamo questi due fatti

1) Se (x_1, y_1), (x_2, y_2) sono due punti fissati nel piano, il segmento che va da (x_1, y_1) a (x_2, y_2) può essere descritto mediante

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

quindi $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

e pertanto $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt =$

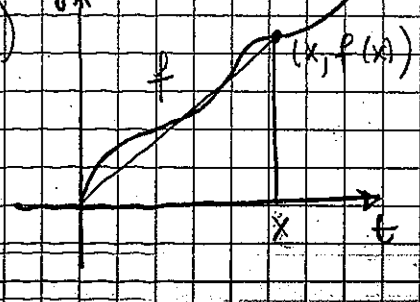


$$= \int_0^1 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2) per semplicità limitiamoci al caso in cui $\gamma(t)$ è una curva cartesiana $(t, f(t))$, $0 \le t \le b$, $f(0) = 0$.

Si ha $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, f'(t))$



Usando la nostra definizione, la lunghezza della porzione di curva

corrispondente a $t \in [0, x]$ è data da

$$\ell_\gamma(x) = \int_0^x \sqrt{1+f'^2(t)}\,dt$$

D'altra parte la lunghezza del segmento che collega i punti $(0,0)$ ed $(x, f(x))$ è data da

$$\lambda(x) = \sqrt{x^2+f^2(x)}\ .$$

Ovviamente $\ell_\gamma(0) = \lambda(0)$. Vediamo che $\lambda'(x) \leq \ell_\gamma'(x) \quad \forall x > 0$. $(*)$

Si ha

$$\lambda'(x) = \frac{2x + 2f(x)f'(x)}{2\sqrt{x^2+f^2(x)}} = \frac{x+f(x)f'(x)}{\sqrt{x^2+f^2(x)}}$$

$$\ell_\gamma'(x) = \sqrt{1+f'^2(x)} \geq 0$$

Poiché $\ell_\gamma'(x) \geq 0$, se $\lambda'(x) < 0$ la $(*)$ è banale. Possiamo quindi supporre $\lambda'(x) \geq 0$. La $(*)$ equivale quindi a

$$0 \leq x + f(x)f'(x) \leq \sqrt{x^2+f^2(x)} \cdot \sqrt{1+f'^2(x)}\ ,$$

ossia

$$[x+f(x)f'(x)]^2 \leq (x^2+f^2(x))(1+f'^2(x))$$

ossia

$$\cancel{x^2} + \cancel{f^2(x)f'^2(x)} + 2xf(x)f'(x) \leq \cancel{x^2} + f^2(x) + x^2f'^2(x) + \cancel{f^2(x)f'^2(x)}$$

ossia

$$2xf(x)f'(x) \leq f^2(x) + x^2f'^2(x)$$

ossia

$$0 \leq f^2(x) + x^2 f'^2(x) - 2x f(x) f'(x) = \left(x f'(x) - f(x)\right)^2 \quad \text{vera}$$

Quindi $\begin{cases} \ell_f(0) = \lambda(0) \\ \lambda'(x) \leq \ell_f'(x) \quad \forall x>0 \end{cases} \Rightarrow \lambda(x) \leq \ell_f(x) \quad \forall x > 0$

In particolare $\lambda(b) \leq \ell_f(b)$ e quindi il segmento ha lungh. minima.

Notiamo che per avere $\lambda(b) = \ell(b)$, dovremmo avere $\lambda'(x) = \ell_f'(x)$ $\forall x \in (0,b)$ e, visti i conti appena fatti, dovremmo avere

$$x f'(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in (0,b)$$

Vediamo che una funzione f verificante questa equazione differenziale è una retta

Moltiplichiamo per $\frac{1}{x^2}$ entrambe i membri $(x>0)$:

$$\frac{1}{x} f'(x) - \frac{1}{x^2} f(x) = 0,$$

cioè

$$\left(\frac{1}{x} f(x)\right)' = 0$$

cioè

$$\frac{1}{x} f(x) = k$$

$x f' - f = 0 \Leftrightarrow x f' = f \Leftrightarrow \frac{f'}{f} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \log f = \log x + c = \log x + \log k = \log kx \Leftrightarrow f = kx$

oppure

cioè $f(x) = kx$. (si poteva risolvere con il metodo standard per le equaz. diff. lineari 1° ordine)

E quindi se ha lunghezza minima f è un segmento.

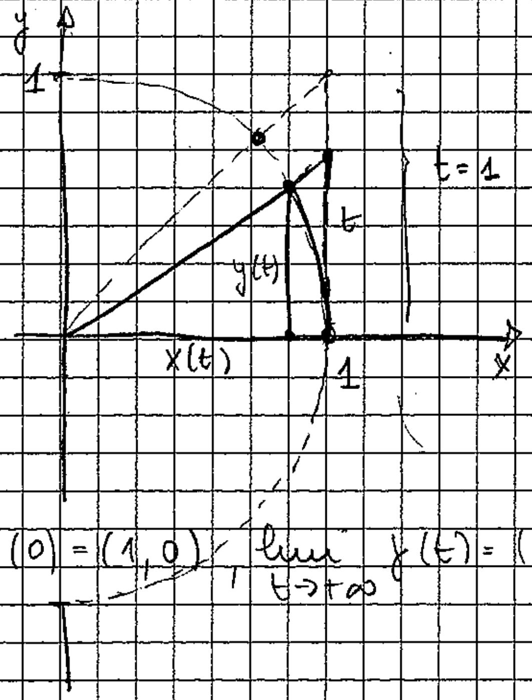
LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Consideriamo la curva $\gamma(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) \quad t \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = \frac{-\frac{1}{2}\cdot 2t}{(1+t^2)^{+3/2}} = -\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} \neq 0 \quad \forall t \neq 0$$

$$y'(t) = \frac{(1+t^2)^{1/2} - t\,\frac{1\cdot 2t}{2(1+t^2)^{1/2}}}{(1+t^2)} =$$

$$= \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} \quad \forall t$$



la curva $\gamma(t)$ e' regolare, $\gamma(0) = (1,0)$, $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = (0,1)$

$\lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = (0,-1)$.

Poiché $x^2(t) + y^2(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2} = 1$, si vede subito che la traiettoria di $\gamma(t)$ e' la metà destra della circonferenza $x^2+y^2=1$. Il parametro t ha un significato geometrico molto interessante illustrato nella figura: infatti $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} : \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = t$.

Per come l'abbiamo definita, la lunghezza $\alpha(t)$ dell'arco di circonferenza che va da $\gamma(0)=(1,0)$ al punto $\gamma(t)$, e' data da

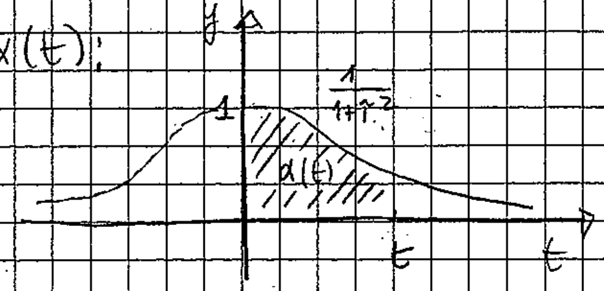
$$\alpha(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)}\, d\tau = \int_0^t \frac{1}{1+\tau^2}\, d\tau$$

Definiamo π come la lunghezza di metà circonferenza unitaria; poiché $\gamma(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, risulta $\frac{\pi}{4} = \alpha(1)$ cioè

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+\tau^2}\,d\tau \qquad \left(\text{ed anche } \frac{\pi}{2} = \lim_{t\to+\infty} \alpha(t)\right)$$

(vedremo più avanti come approssimare π partendo proprio da queste uguaglianze)

Vediamo adesso di studiare $\alpha(t)$:



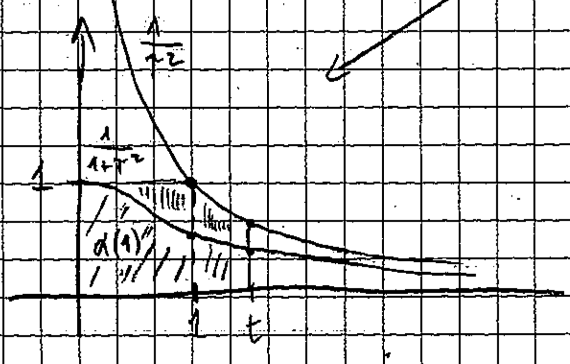
- $-\alpha(-t) = \alpha(t)$ (cioè è dispari) e si ha $\alpha(0)=0$; dal teorema fondamentale del calcolo si ottiene $\alpha'(t) = \frac{1}{1+t^2} > 0$,

$$\alpha(t) = \int_0^t \frac{1}{1+\tau^2}\,dt$$

quindi α è crescente strettamente e, da $\frac{1}{1+\tau^2} \le \frac{1}{\tau^2}$, segue che, se $t \ge 1$, vale

$$\alpha(t) = \int_0^t \frac{1}{1+\tau^2}\,d\tau = \int_0^1 \frac{d\tau}{1+\tau^2} + \int_1^t \frac{d\tau}{1+\tau^2} \le 1 + \int_1^t \frac{1}{\tau^2}\,d\tau =$$

$$= 1 - \frac{1}{\tau}\Big|_1^t = 2 - \frac{1}{t} \le 2$$



In particolare

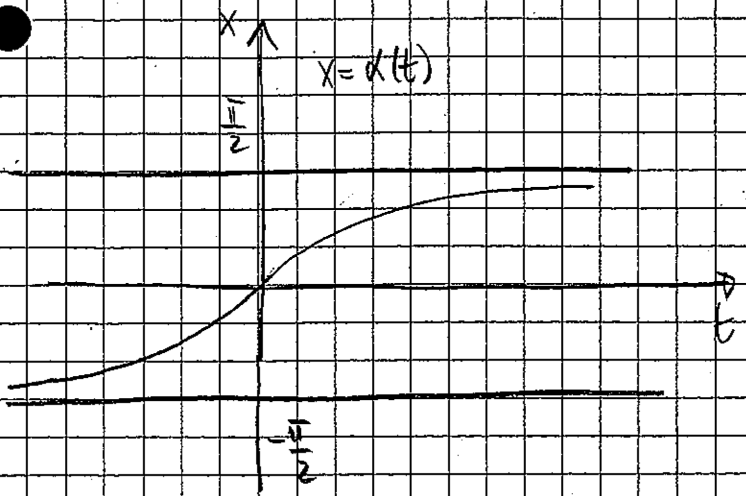
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{t\to+\infty} \alpha(t) \le 2,$$

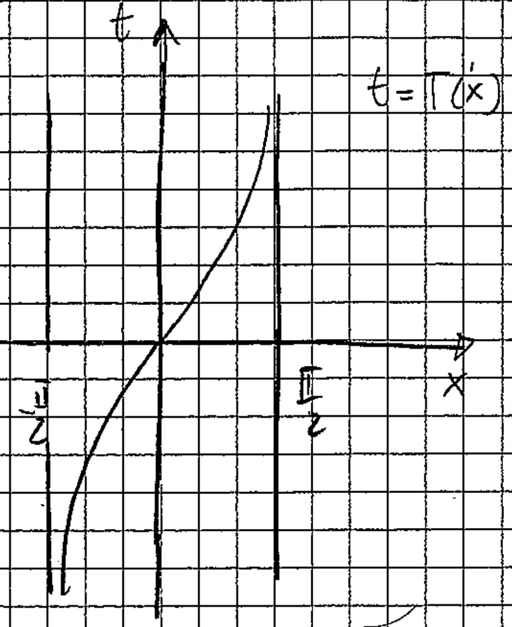
cioè $\pi \le 4$

Ora la funzione $\alpha: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è strettamente crescente e continua, quindi è invertibile con inverso continuo. Chiamiamo T l'inverso. Si ha

$$T: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto T(x) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \alpha(T(x)) = x & \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ T(\alpha(t)) = t & \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

I grafici sono rispettivamente





infatti $\alpha'(0) = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)\Big|_{t=0} = 1$

$\alpha''(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2}$ — convessa per $t<0$, concava per $t>0$.

la derivata della funzione $T(x)$ è data da

$$T'(x) = \frac{1}{\alpha'(T(x))} = 1 + T^2(x)$$

Possiamo finalmente definire (in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)

$$S(x) = \frac{T(x)}{\sqrt{1+T^2(x)}} \qquad C(x) = \frac{1}{\sqrt{1+T^2(x)}}$$

Si ha $S^2(x) + T^2(x) = 1$ e $T(x) = \frac{S(x)}{C(x)}$

Calcoliamo la derivata di $S(x)$ e di $C(x)$, si ha

$$S'(x) = \frac{T'(x)\sqrt{1+T^2(x)} - T(x)\,\frac{1}{2}\,\frac{2T(x)T'(x)}{\sqrt{1+T^2(x)}}}{1+T^2(x)} = \frac{T'(x) + T'(x)T^2(x) - T^2(x)T'(x)}{\left(1+T^2(x)\right)^{3/2}} =$$

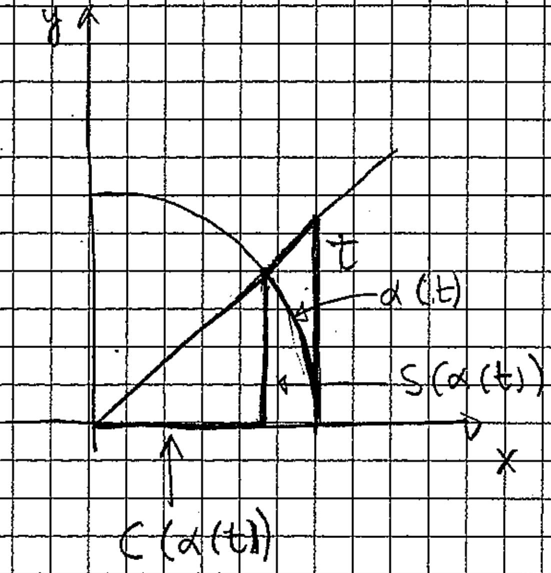
$$= \frac{T'(x)}{(1+T^2(x))^{3/2}} = \frac{1+T^2(x)}{(1+T^2(x))^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+T^2(x)}} = C(x)$$

$$C'(x) = -\frac{1}{2}\left(1+T^2(x)\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2T(x)T'(x) =$$

$$= -\frac{T(x)}{\left(1+T^2(x)\right)^{3/2}} \cdot \left(1+T^2(x)\right) = -\frac{T(x)}{\sqrt{1+T^2(x)}} = -S(x)$$

quindi

$S'(x) = C(x)$, $C'(x) = -S(x)$



In seguito useremo la notazione standard

$$T(x) = \operatorname{tg} x \quad \text{e} \quad \alpha(x) = \operatorname{arctg} x$$

Abbiamo (riassunto)

$\operatorname{tg}' x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ $\quad \operatorname{tg}'' x = 2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg}' x = 2 \operatorname{tg} x \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)$, quindi

$\operatorname{tg} x$ è convessa per $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e concava per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad \operatorname{arctg}'' x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, quindi $\operatorname{arctg} x$ è convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$

Vediamo di studiare più in dettaglio $S(x)$, estendendola su tutto $\mathbb{R}$ in maniera continua e derivabile.
Analoga cosa faremo per $C(x)$
prima su $[-\pi, \pi]$ e poi

Si ha $S(0)=0$ $S(x)>0$ $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $S(x)<0$ $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$;

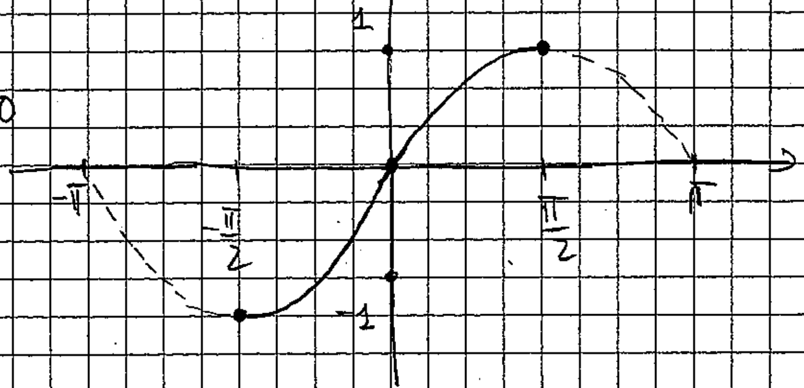
$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} S(x)=-1$ e $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} S(x)=1$ Poniamo quindi

$S\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ e $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, Inoltre $\boxed{S'(x)}=C(x)=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(x)}}>0$ $\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

quindi S è strettamente crescente in $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Ancora $S'(0)=1$ e

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} S'(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(x)}}=0$



$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} S'(x)=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} S'(x)=0$

$S''(x)=(S'(x))'=(C(x))'=-S(x)\begin{cases}>0 & \text{in } \left(-\frac{\pi}{2},0\right) \quad S \text{ convessa}\\ <0 & \text{in } \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \quad S \text{ concava}\end{cases}$

Quindi se estendiamo la funzione $S(x)$ all'intervallo $[-\pi,\pi]$ mediante la posizione

$$(\square)\begin{cases} S(x)=S(\pi-x) & \forall x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right] \\ S(x)=S(-\pi-x) & \forall x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

ho che $\exists\, S'\left(\frac{\pi}{2}\right)=S'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ e quindi ho una funzione continua in $[-\pi,\pi]$ e derivabile in $(-\pi,\pi)$

Ora manca solo vedere che si può estendere a tutto

R in maniera che risulti continua e derivabile. Basta estenderla mediante la posizione

$$S(x+2k\pi)=S(x) \qquad \forall k\in\mathbb{Z}$$

(cioè viene estesa come funzione 2π periodica)

La continuità deriva dal fatto che $S(-\pi)=S(\pi)$ e la derivabilità dal fatto che $\lim\limits_{x\to-\pi^+} S'(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-} S'(x)$,

infatti

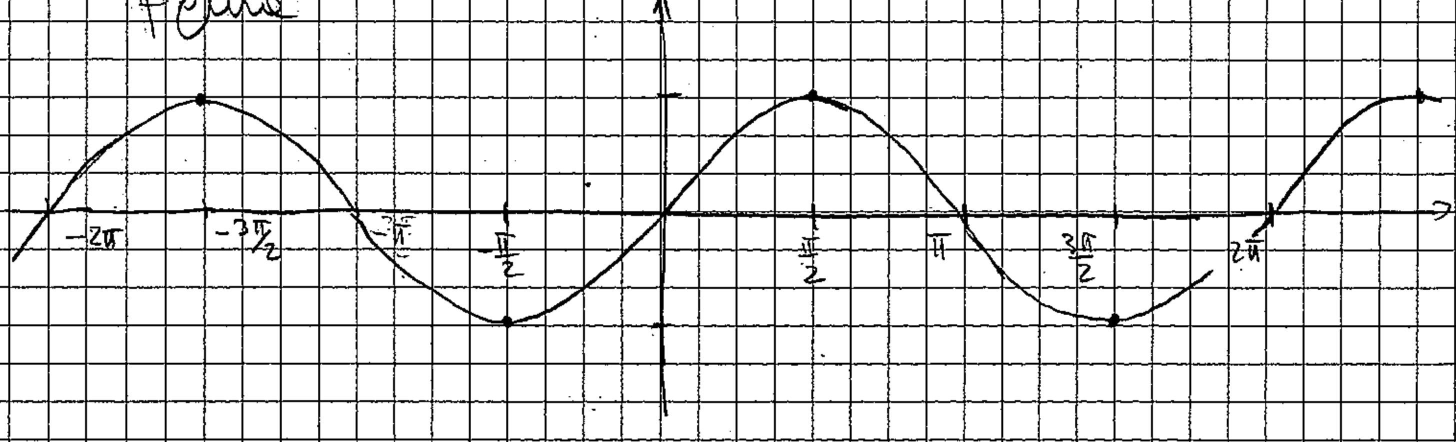
$$S(-\pi) \overset{(\square)}{=} S(-\pi+\pi)=S(0)=0$$
$$S(\pi) \underset{(\square)}{=} S(\pi-\pi)=S(0)=0$$

e

$$\lim_{x\to-\pi^+}[S(x)]' \overset{(\square)}{=} \lim_{x\to-\pi^+}[S(-\pi-x)]' = \lim_{x\to-\pi} -C(-\pi-x) = -C(0) = -1$$

$$\lim_{x\to\pi^-}[S(x)]' \overset{(\square)}{=} \lim_{x\to\pi^-}[S(\pi-x)]' = \lim_{x\to\pi^-} -C(\pi-x) = -C(0) = -1$$

Abbiamo in definitiva che $S(x)$ ha l'andamento in figura



$S(x)$ è la funzione nota sen x. Analoghi discorsi si possono fare per la funzione $C(x)$ che altro non è che la funzione nota cos x. D'ora in poi useremo la notazione standard cos x e sen x.

Un altro conto interessante è il seguente. Di solito le formule d'addizione per il seno ed il coseno vengono dimostrate geometricamente.

Vediamo qui di ricavarle in maniera del tutto analitica.

Dobbiamo dimostrare che $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha

$$(*) \qquad \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$(**) \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Dimostriamo innanzi tutto la $(*)$.

Per prima cosa osserviamo che se una funzione f risolve il problema di Cauchy $\begin{cases} f''(x) + f(x) = 0 \\ f(0) = a \\ f'(0) = b \end{cases}$, allora

$f(x) = a\cos x + b \operatorname{sen} x$;

infatti posto $h(x) = f(x) - (a\cos x + b\operatorname{sen} x)$, risulta

$\begin{cases} h''(x) + h(x) = 0 \\ h(0) = 0 \\ h'(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad \left(\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) + a\operatorname{sen} x - b\cos x \\ h''(x) &= f''(x) + a\cos x + b\operatorname{sen} x \end{aligned} \right)$

Ne segue che

$$\left[h^2(x) + h'^2(x)\right] = 2h(x)h'(x) + 2h'(x)h''(x) = 2h'(x)\left[h(x) + h''(x)\right] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e quindi $h^2(x) + h'^2(x) = \text{costante}$.

Poiché $h^2(0) + h'^2(0) = 0$, si ha $h^2(x) + h'^2(x) = 0$. Ne deriva che $h(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e ciò significa proprio

$$f(x) = a\cos x + b\operatorname{sen} x.$$

Consideriamo adesso la funzione $g(x) = \operatorname{sen}(x+y)$ (y fisso)

Abbiamo $g'(x) = \cos(x+y)$, $g''(x) = -\operatorname{sen}(x+y)$,

$g(0) = \operatorname{sen} y$, $g'(0) = \cos y$ e quindi $g(x)$ risolve

il problema di Cauchy $\begin{cases} g''(x)+g(x)=0 \\ g(0)=\operatorname{sen} y \\ g'(0)=\cos y \end{cases}$

Quindi, per quanto visto precedentemente, la funzione $g(x)$ deve essere uguale a $\operatorname{sen} y \cos x + \cos y \operatorname{sen} x$, cioè

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} y \cos x + \cos y \operatorname{sen} x,$$

che è proprio la $(*)$.

Dobbiamo ora dimostrare la $(**)$: è chiaro che la dimostrazione sarebbe possibile usando un ragionamento del tutto analogo a quello appena usato per dimostrare la $(*)$. Più semplicemente basta però derivare la $(*)$, infatti posto

$f(x) = \operatorname{sen}(x+y)$ e
$g(x) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$, si ha $f(x) \overset{(*)}{=} g(x)$

e quindi $f'(x) = g'(x)$. Ma

$f'(x) = \cos(x+y)$ e
$g'(x) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

ed ecco la $(**)$

—

Ora, prima di passare ad introdurre il logaritmo usando una definizione integrale, vediamo come, dall'aver introdotto l'arcotangente come integrale ed aver osservato che $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1$, si possano avere stime di π anche molto accurate.

In realtà queste approssimazioni di π, che sono datate verso il 1600, fanno uso dell'arcotangente espressa come serie di potenze e non come integrale. Bisogna però tener conto che nel 1600 non era ancora stata sviluppata la teoria delle serie di Taylor e l'unica serie di potenze nota era $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$. La scrittura dell'arcotangente come serie di potenze si rese possibile partendo proprio dalla sua formulazione integrale: fu elaborata da matematici indiani (questo ancora nel 1500), con conti del tutto analoghi, da James Gregory ed Isaac Newton cento anni più tardi, senza nulla sapere dei precedenti. Nello stesso periodo venne applicata la medesima idea anche alla funzione $\lg(1+x)$, partendo dalla sua definizione integrale. Sarebbe passata ancora una cinquantina di anni prima dell'arrivo di Brook Taylor e della sua famosa formula ....

Ma cominciamo a fare un po' di conti.

Noi sappiamo che

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + \dots + t^n + \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

e quindi $$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = 1 + (-t^2) + (-t^2)^2 + \dots + (-t^2)^n + \frac{(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)}$$

cioè $$\boxed{\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 \dots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}}$$

E sappiamo che

$$\boxed{\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt}$$, abbiamo quindi che

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \left[1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n}\right] dt + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

Ne deriva che

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots - (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

In definitiva abbiamo approssimato l'arcotangente con il polinomio

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

(formula di Gregory - 1665)

E' chiaro che questa approssimazione è interessante se riusciamo a stimare l'errore

$$(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt .$$

(*) E' chiaro che questo significa essere riusciti a sviluppare in serie di potenze l'arcotangente per $|x| \le 1$.
$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Si ha

$$\left| (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \le \left| \int_0^x t^{2n+2}\, dt \right| = \left| \left. \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \right|_0^x \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \quad e$$

questa quantità tende a zero se $-1 \le x \le 1$; ciò significa che, a patto di prendere n grande, si può avere una stima di $\operatorname{arctg} x$, $-1 \le x \le 1$, accurata quanto si voglia.(*) In particolare se $x = 1$, abbiamo

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \right| \le \frac{1}{2n+3},$$

cioè possiamo approssimare $\frac{\pi}{4}$ con la quantità

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

con un errore minore di $\boxed{\frac{1}{2n+3}}$. Tuttavia questa approssimazione è piuttosto lenta. Per avere un errore minore di un millesimo, si devono prendere almeno 499 termini, infatti

$$\frac{1}{2n+3}<\frac{1}{1000} \iff 1000<2n+3 \iff \frac{997}{2}<n \iff n>498,5$$

Vediamo allora come migliorare questa approssimazione.

Si osservi che, se $0<x<1$, vale

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}1=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$$

Infatti, posto $\alpha=\operatorname{arctg}x$, $\beta=\frac{\pi}{4}-\alpha$, si ha

$$\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\overset{(\circ)}{=}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-x}{1+x}$$

(°) vedi in fondo alla pagina seguente

e quindi $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$. Se prendiamo $x=\frac{1}{2}$, abbiamo in particolare $\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$

In questo modo gli errori $\frac{x^{2n+3}}{2n+3}$ che compaiono approssimando le due arcotangenti andranno a zero più velocemente grazie al contributo di $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}$ e $\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}$ al posto di 1. L'errore sarà stimato con

$$\boxed{\frac{1}{2n+3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+3}\right]}$$

Se si volesse avere qui un errore minore di un millesimo, basterebbe prendere $n=3$, infatti con $n=3$ risulta

$$\frac{1}{9}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^9+\left(\frac{1}{3}\right)^9\right]<\frac{1}{9}\cdot 2\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{250}=\frac{1}{2250}<\frac{1}{2000}$$

(già con $n=4$ l'errore è più piccolo di un decimillesimo)

Molti matematici studiarono il modo di migliorare ulteriormente questo risultato, cercando di scomporre arctg 1 in quantità via via più produttive: ad esempio Machin a cavallo tra il diciassettesimo ed il diciottesimo secolo, utilizzò la relazione

$$\operatorname{arctg} 1 = 4 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

e con $n=3$ ottenne le cifre esatte $3{,}14159$

(con la formula di Gregory avremmo avuto bisogno di 50.000 termini)

Il matematico Shank, nel 1873, calcolò, con la formula di Machin, 707 cifre di π.

(°) $\operatorname{tg}(\gamma-\delta) = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\delta}{1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}$; la formula è presto dimostrata, infatti:

$$\operatorname{tg}(\gamma-\delta) = \frac{\operatorname{sen}(\gamma-\delta)}{\cos(\gamma-\delta)} = \frac{\operatorname{sen}\gamma\cos\delta - \operatorname{sen}\delta\cos\gamma}{\cos\gamma\cos\delta + \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\delta} =$$ divido sopra e sotto per $\cos\gamma \cdot \cos\delta$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma} - \dfrac{\operatorname{sen}\delta}{\cos\delta}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{\cos\gamma}\dfrac{\operatorname{sen}\delta}{\cos\delta}} = \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\delta}{1+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}$$

LA FUNZIONE LOGARITMO

Consideriamo l'insieme $X = \{cx^p, x \in \mathbb{R}, x \geq 0, c \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Q}, x \neq 0 \text{ se } p < 0\}$

Si può osservare che la derivata di ogni elemento di tale insieme è ancora un elemento di tale insieme, infatti

$$(cx^p)' = c \cdot p \cdot x^{p-1}$$

Mentre la primitiva di ogni elemento di tale insieme è ancora un elemento di tale insieme, a meno dell'elemento $\frac{1}{x}$, infatti

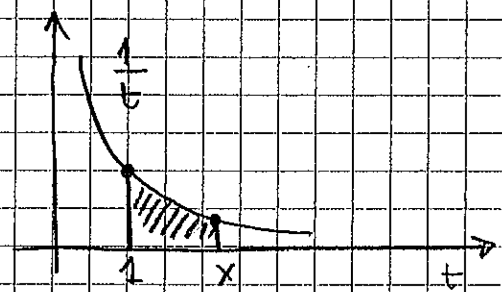
$$\int cx^p dx = c\,\frac{x^{p+1}}{p+1} \quad \text{solo nel caso } p \neq -1.$$

C'è quindi il problema di trovare una funzione, chiamiamola $L(x)$, tale che $L'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

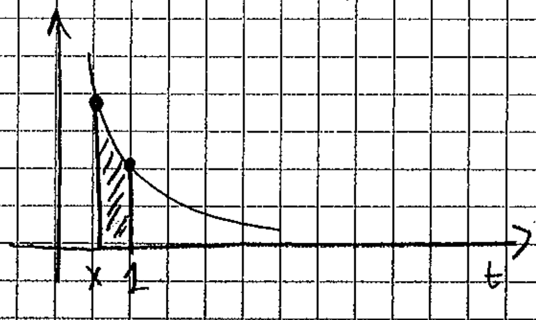
DEFINIZIONE: poniamo, per $x > 0$,

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Quindi per $x \geq 1$, $L(x)$ è l'area in figura



e per $0 < x < 1$, $L(x)$ è l'area in figura, ma con segno negativo



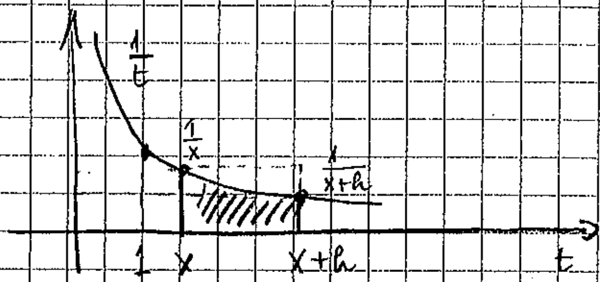
$L(1) = 0$

Studiamo in dettaglio tale funzione.

Quindi $L(x)$ e' una funzione definita per $x>0$, negativa per $0<x<1$ e positiva per $x>1$.

Il teorema fondamentale del calcolo ci direbbe subito che $L'(x)=\frac{1}{x}$, ma facciamo per una volta questo conto elementarmente.

Per $x\geq 1$ ed $h>0$, si ha



$$h\cdot\frac{1}{x+h} < L(x+h)-L(x) < h\,\frac{1}{x}$$

e quindi

$$\frac{1}{x+h} \leq \frac{L(x+h)-L(x)}{h} \leq \frac{1}{x}$$

e facendo $h\to 0$ si ottiene $\boxed{L'(x)=\frac{1}{x}}$ (per $h<0$ e $0<x<1$ si procede analogam.)

Da $L'(x)=\frac{1}{x}$ si ottiene L e' crescente e che

$$L''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0\,,$$

e quindi L e' concava.

Dimostriamo ora una proprieta' fondamentale di L

TEOREMA: $\boxed{L(ab)=L(a)+L(b)}$

dim: poniamo $f(x)=L(ax)$ e $g(x)=L(a)+L(x)$. Si ha $f'(x)=L'(ax)=\frac{1}{ax}\cdot a=\frac{1}{x}$ e $g'(x)=L'(x)=\frac{1}{x}$, quindi $f'(x)=g'(x)$.
Ne segue che $f(x)-g(x)=$ costante; poiché $f(1)-g(1)=L(a)-L(a)-L(1)=0$ si ha che $f(x)-g(x)=0$, cioè $f(x)=g(x)$.
In particolare $f(b)=g(b)$, cioè $L(ab)=L(a)+L(b)$

OSS: $L\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{L(a)}{L(b)}$, infatti $L(a)=L\left(b\cdot\frac{a}{b}\right)=L(b)+L\left(\frac{a}{b}\right)$ #

Cerchiamo adesso di capire il comportamento di $\lg x$ agli estremi del dominio di definizione $\{x>0\}$.

i) $\boxed{\lim_{x\to+\infty} L(x) = +\infty}$ infatti, dalla formula del teorema precedente si ottiene

$$L(2^n) = L(\underbrace{2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}_{n\text{-volte}}) = \underbrace{L(2)+L(2)+\cdots+L(2)}_{n\text{-volte}} = n\,L(2)$$

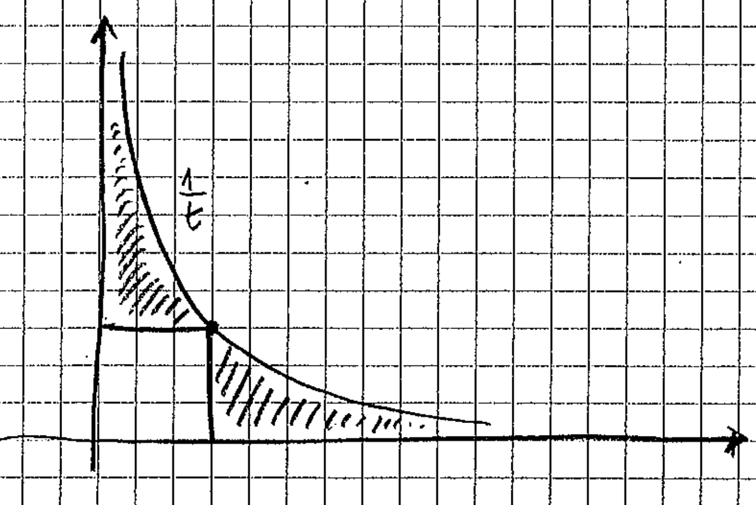
Quindi $\lim_n L(2^n) = \lim_n n\,L(2) = +\infty$, perché $L(2)>0$ e ricordando che $L(x)$ è crescente e quindi ha limite, si ha i).

ii) $\boxed{\lim_{x\to 0} L(x) = -\infty}$ infatti, notiamo che

$$0 = L(1) = L(2^n\cdot 2^{-n}) = L(2^n)+L(2^{-n}) = n\,L(2)+L(2^{-n})$$

e quindi $L(2^{-n}) = -n\,L(2)$, da cui $\lim_n L(2^{-n}) = -\infty$

Geometricamente significa che le due aree in figura sono infinite



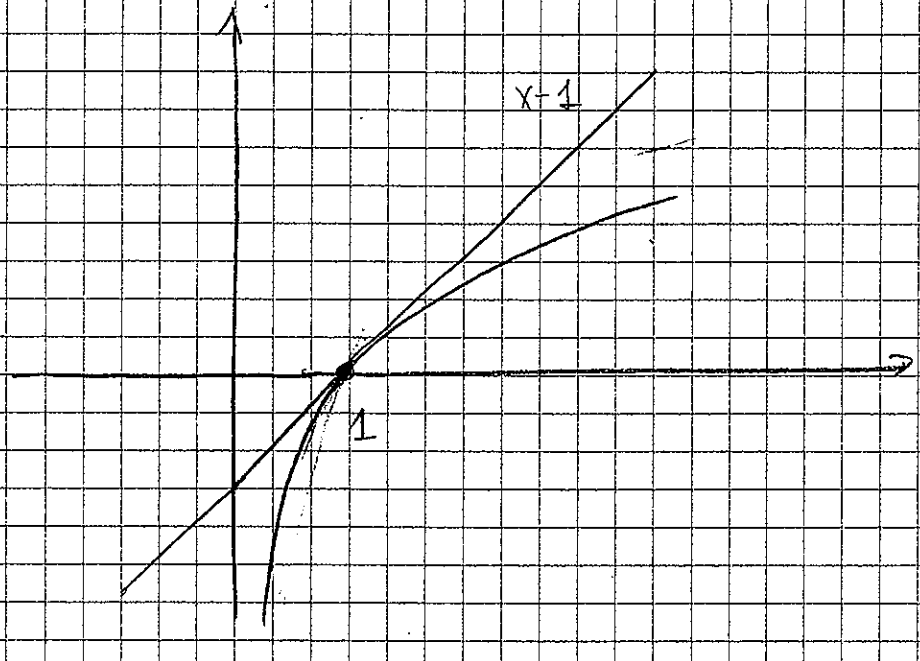
Siamo adesso in grado di tracciare in maniera accurata il grafico di $L(x)$. Riassumiamo tutte informazioni trovate.

$\lim_{x \to +\infty} L(x) = +\infty$ $\qquad$ $L(1) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} L(x) = -\infty$ $\qquad$ $L(ab) = L(a) + L(B)$

$L'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0$ $\qquad$ $L''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x > 0$

stret. crescente $\qquad$ concava



$L'(1) = 1$

visto che L e' concava e la retta tangente in 1 e' data da $y = L'(1)(x-1) + L(1) = x - 1 + 0 = x - 1$ si ha che $L(x) \le x - 1 \quad \forall x$

Chiamiamo $\underline{L(x) = \text{logaritmo naturale di } x}$

Apriamo un attimo una piccola parentesi e sfruttiamo $L(x)=\int_a^x \frac{1}{t}\,dt$ per calcolare il limite della forma indeterminata

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}.$$

Con le stime ovvie si arriva solo a sapere che

$$\frac{n+1}{2n}=(n+1)\frac{1}{2n}\le\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\le(n+1)\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$$

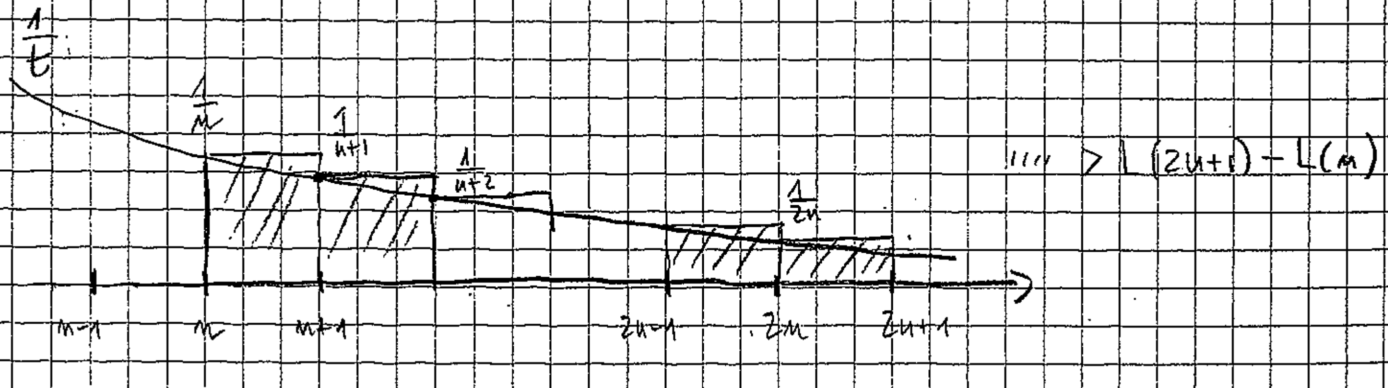
e quindi

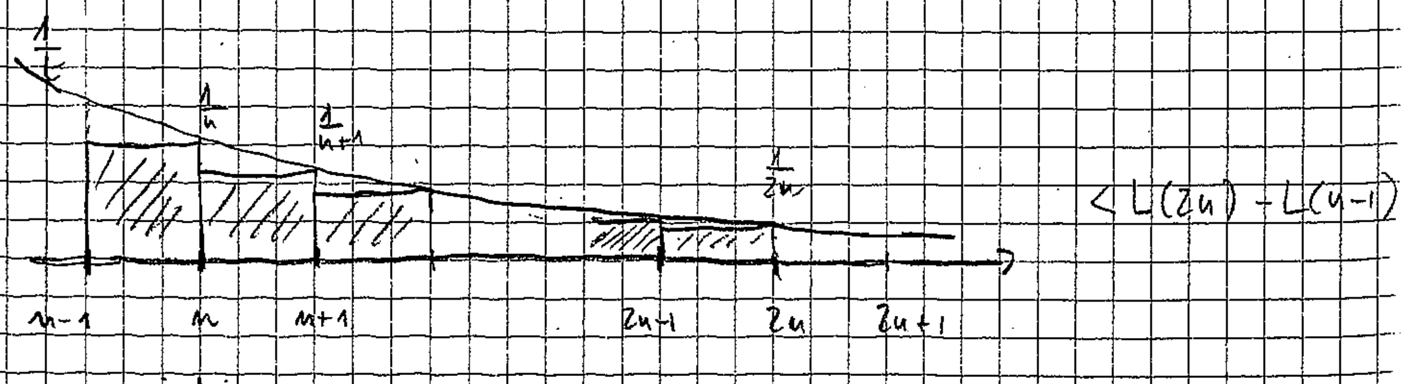
$$\frac{1}{2}\le\lim_n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\right)\le 1.$$

Usiamo invece le stime

$$L(2n+1)-L(n)<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}<L(2n)-L(n-1),$$

evidenti se si osservano le seguenti figure.





e quindi

$$\underset{\substack{\downarrow n\\ L(2)}}{L\left(\frac{2n+1}{n}\right)}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}<L\left(\frac{2n}{n-1}\right)\xrightarrow[n]{}L(2)$$

da cui

$$\boxed{\lim_n \left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right]=L(2)}$$

Sfruttiamo adesso la proprietà di concavità della funzione $L(x)$ per dimostrare due importanti proposizioni. Noi abbiamo ricavato la concavità di $L(x)$ dal fatto che $L''(x)<0$. La definizione di concavità ci dice che se

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono numeri positivi e $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$, si ha

$$L(\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n) \geqslant \alpha_1 L(x_1)+\cdots+\alpha_n L(x_n)$$

e l'uguale si ha solo se $x_1=x_2=\cdots=x_n$.
(è semplicemente la definizione di concavità)

Usando che $L(x)$ è concava si possono dimostrare due utili proposizioni

PROPOSIZIONE 1 : se $x_1, \ldots, x_n$ sono numeri positivi, allora

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$$

(e l'uguale si ha soltanto se $x_1=x_2=\cdots=x_n$).
Questo significa che la media aritmetica è maggiore o uguale alla media geometrica. Dimostriamolo:

la definizione di concavità del logaritmo con $\alpha_k = \frac{1}{n}$ $\forall k = 1, \dots, n$ $\left(\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1\right)$

dice che

$$L\left(\frac{x_1}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n} L(x_1) + \dots + \frac{1}{n} L(x_n)$$

$$\Updownarrow \text{ prop. fondamentale di } L$$

$$L\left(\frac{x_1}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n} L(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)$$

$$\Updownarrow$$

$$n L\left(\frac{x_1}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}\right) \geqslant L(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)$$

$$\Updownarrow \text{ prop. fond. di } L$$

$$L\left[\left(\frac{x_1}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}\right)^n\right] \geqslant L(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)$$

$$\Updownarrow \text{ } L \text{ è crescente}$$

$$\left(\frac{x_1}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}\right)^n \geqslant x_1 \cdot \dots \cdot x_n$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

e questo è ciò che si voleva dimostrare; che valga l'= solo nel caso $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ segue anch'esso direttamente dalla definizione di concavità.

Vediamo un'altra utile proposizione.

PROPOSIZIONE 2

Il prodotto di n numeri positivi $x_1, \dots, x_n$ di somma costante S è massimo se e soltanto se

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

dim:

la proposizione 1 dice che

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1 \cdots x_n$$

e quindi, poiché $S = x_1 + x_2 + \dots x_n$, si ha

$$\left(\frac{S}{n}\right)^n \geq x_1 \cdots x_n$$

e l'uguale vale solo se $x_1 = x_2 = \dots x_n$

OSS: senza l'uso della concavità di $L(x)$ queste due proposizioni si possono dimostrare con un laborioso ragionamento di induzione. Per esercizio possiamo vedere che la Prop. 2 è conveniente per dimostrare ad esempio che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente

Dimostriamo che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente; dobbiamo vedere che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, ed infatti

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sono $n+1$ fattori di somma $S = 1 + n\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+2$ (DIVERSI)

e

$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ sono $n+1$ fattori di somma $S = (n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = n+2$ (UGUALI)

Quindi per la prop. 2, si ha

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Dimostriamo adesso che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente; dobbiamo vedere che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$, cioè che

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$, cioè che $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}$, ed infatti

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = 1 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ sono $n+2$ fattori di somma $S = 1 + (n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1+n$
(DIVERSI)

$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}$ sono $n+2$ fattori di somma $S = (n+2)\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = n+1$
(UGUALI)

Quindi per la prop. 2 si ha

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

che è ciò che volevamo

Proseguiamo con la nostra funzione $L(x)$.
Poiché $L(x)$ è continua e prende tutti i valori da $-\infty$ a $+\infty$, esisterà un! valore x t.c. $L(x) = 1$.
CHIAMO $\underline{e}$ tale valore, cioè

$$\boxed{L(e) = 1}$$

Vediamo che e è proprio il numero di Nepero $\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
Si ha

$$L\left(\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_n L\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \lim_n \left[n\, L\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$L(1)=0$

$$= \lim_n \frac{L\left(1+\frac{1}{n}\right) - L(1)}{\frac{1}{n}} = \lim_h \frac{L(1+h) - L(1)}{h} = L'(1) =$$

$$= \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = 1$$

Dimostriamo infine che, in maniera del tutto analoga a quanto fatto per l'arcotangente, dalla definizione di $L(x)$ come integrale si può arrivare allo sviluppo in serie di potenze di $L(1+x)$.

Sappiamo che $\dfrac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\dots+q^n+\dfrac{q^{n+1}}{1-q}$, $q \neq 1$

e quindi, per $q=-t$, otteniamo

$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-t^3+\dots+(-1)^n t^n+(-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}, \quad t \neq -1$$

Poiché $L(1+x) = \displaystyle\int_1^{1+x} \frac{1}{s}\,ds$, con il cambio di variabile $s = 1+t$ si ottiene

$$L(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \quad \text{e quindi}$$

$1+x>0$
$x>-1$

$$L(1+x) = \int_0^x \left[1-t+t^2-t^3+\dots+(-1)^n t^n\right]dt + \int_0^x (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$$

$$= t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\dots+(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^x + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$$

Abbiamo quindi che $L(1+x)$ si può approssimare con il polinomio

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

facendo un errore del tipo $(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$

la cosa è ovviamente interessante quando questo errore tende a zero al crescere di n. Vediamo di fare una stima di tale errore.

$$\left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt\right| \leq \left|\int_0^x t^{n+1}\,dt\right| = \left|\frac{t^{n+2}}{n+2}\Big|_0^x\right| = \frac{|x|^{n+2}}{n+2}$$

e $\dfrac{|x|^{n+2}}{n+2} \xrightarrow[n]{} 0$ solo se $|x| \leq 1$

Abbiamo quindi che

$$\boxed{L(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \qquad -1 < x \leq 1}$$

($L(1+x)$ è definito per $1+x>0$ e quindi $x>-1$)

Questo sviluppo fu ottenuto da Nicolaus Mercator in

"Logarithmotechnia"

nel 1668.

—

Due ultime importanti proprietà del logaritmo sono le seguenti, che però tralasciamo di dimostrare.

PROPRIETÀ di $L(x)$

$$\left[\begin{array}{ll} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{L(x)}{x^p} = 0 & \forall p>0 \\ \lim_{x\to 0^+} x^p L(x) = 0 & \forall p>0 \end{array}\right]$$

Introduciamo invece una nuova funzione. Poiché

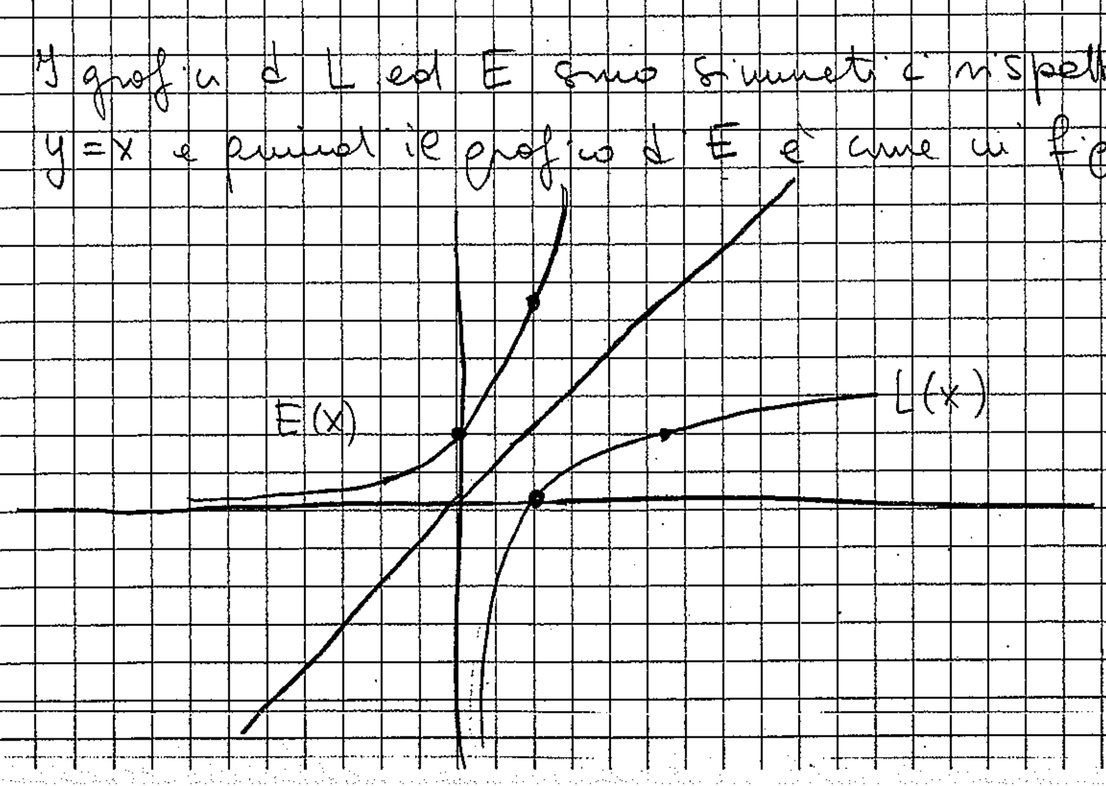
$$L : (0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$$
$$x \longmapsto L(x)$$

è continua, derivabile strettamente crescente, essa sarà invertibile con inversa continua, derivabile e strettamente crescente. Definiamo

$$E : (-\infty,+\infty) \to (0,+\infty)$$
$$t \longmapsto E(t)$$

tale che $\begin{cases} E(L(x)) = x \\ L(E(t)) = t \end{cases}$

I grafici di L ed E sono simmetrici rispetto alla retta $y=x$ e quindi il grafico di E è come in figura:



Si ha $E'(t) = \frac{1}{L'(E(t))} = \frac{1}{\frac{1}{E(t)}} = E(t)$, cioè

$$\boxed{E'(t) = E(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

Dalla proprietà fondamentale di $L(x)$ si ricava la proprietà fondamentale di $E(t)$

<u>TEOREMA</u>: $\boxed{E(a+b) = E(a)\,E(b)}$

<u>dim</u>: sia x t.c. $L(x) = a$

sia y t.c. $L(y) = b$. Dalla proprietà fondamentale di L si ha

$$E(a+b) = E(L(x)+L(y)) = E(L(xy)) =$$

$$= x\cdot y = E(a)\cdot E(b) \qquad \#$$

Si ha inoltre che

$E(1) = E(L(e)) = e$

$E(n) = E(\underbrace{1+\cdot\cdot+1}_{n \text{ volte}}) = \underbrace{E(1)\cdot\cdot E(1)}_{n \text{ volte}} = [E(1)]^n = e^n \qquad n \in \mathbb{N}$

Si può vedere anche che $E\left(\frac{n}{m}\right) = e^{\frac{n}{m}}$, infatti

$e = E(1) = E\left(m\cdot\frac{1}{m}\right) = \left[E\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m$ e quindi

$E\left(\frac{1}{m}\right) = e^{\frac{1}{m}}$. Da cui $E\left(\frac{n}{m}\right) = E\left(n\cdot\frac{1}{m}\right) = \left[E\left(\frac{1}{m}\right)\right]^n = e^{\frac{n}{m}}$

cioè $E(q) = e^q \quad \forall q \in \mathbb{Q},\ q > 0$

Infine, da $1 = E(0) = E(q-q) = E(q)\,E(-q)$ segue che

$$E(-q) = \frac{1}{E(q)} = \frac{1}{e^q} = e^{-q} \qquad \forall q \in \mathbb{Q}$$

Definiamo allora

$$\boxed{e^x = E(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Chiamiamo e^x <u>funzione esponenziale</u>

Riassumiamo anche per e^x tutto quello che abbiamo ricordato (denotiamo $L(x)$ con il più usato $\ln x$; un'altra notazione è $\log_e x$)

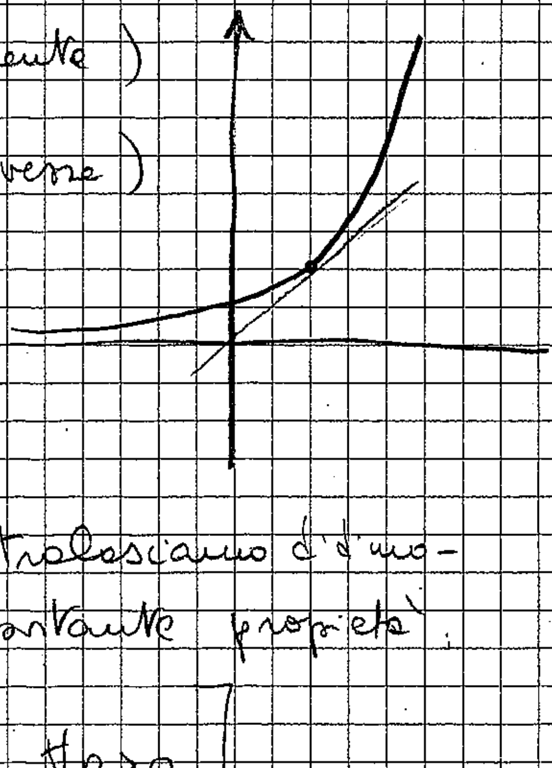
$$e^{\ln x} = x \quad \forall x > 0 \qquad \ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$(e^x)' = e^x > 0$ (strettamente crescente)

$(e^x)'' = e^x > 0$ (strettamente convessa)

$e^{x+y} = e^x e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$



Come per il logaritmo naturale, tralasciamo di dimostrare che e^x verifica questa importante proprietà:

$$\left[\lim_{x \to +\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0 \quad \forall p > 0 \right]$$

ESERCIZIO 1

$$\limsup_n \cos n = 1$$

Ris: vogliamo dimostrare che $\exists$ una sottosuccessione $\{m_k\}_k \subset \{n\}_n$ tendente all'infinito t.c. $\lim_k \cos(m_k) = 1$

Consideriamo $\sigma : \mathbb{R} \to S^1 = \partial B_1(0,0) \subset \mathbb{C}$; si ha

$$x \longmapsto e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

i) $\sigma(x+y) = \sigma(x)\sigma(y)$, infatti $\sigma(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} = \sigma(x)\sigma(y)$

ii) σ è iniettiva su $\mathbb{N}$, infatti, se $\underset{\text{sia } n \neq m}{\sigma(n) = \sigma(m)} \Rightarrow \begin{cases} \cos n = \cos m \\ \operatorname{sen} n = \operatorname{sen} m \end{cases}$

e quindi $n - m = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \pi = \frac{n-m}{2k} \in \mathbb{Q}$ assurdo

Consideriamo $\sigma(\mathbb{N}) \subset S^1$ (S^1 è chiuso e limitato) ed in $\sigma(\mathbb{N})$ cons. una succ. $c_n = \sigma(n)$. Per il teor. di Weierstrass $\exists\, n_k$ strett. crescente $\sigma(n_k) = c_{n_k} \to c \in S^1$. Prendiamo adesso la successione

$m_k = n_{k+1} - n_k > 0$. Si ha $\sigma(m_k) = \sigma(n_{k+1} - n_k) = \frac{\sigma(n_{k+1})}{\sigma(n_k)} = \frac{c_{n_{k+1}}}{c_{n_k}} \xrightarrow[n]{} \frac{c}{c}$

perché n_k è strett. crescente

e quindi

$\sigma(m_k) \xrightarrow[k]{} 1$, cioè $\cos m_k + i \operatorname{sen} m_k \xrightarrow[k]{} 1$;

in particolare $\cos m_k \xrightarrow[k]{} 1$, come volevamo.

Resta da osservare che la successione $m_k \xrightarrow[k]{} +\infty$. E infatti, se per assurdo m_k fosse limitata, essendo una successione di numeri naturali, dovrebbe contenere una sottosuccessione costante $\{d\}$ con $d \neq 0$. Si avrebbe $\cos d + i \operatorname{sen} d = 1$, cioè $\sigma(d) = 1$ ma questo è impossibile perché $\sigma(0) = 1$ e σ è iniettiva su $\mathbb{N}$.

ESERCIZIO 2

ESEMPIO DI FUNZIONE CONTINUA MAI DERIVABILE

Si era pensato a lungo ad una stretta analogia tra la continuità e la derivabilità di una funzione ed anche nella prima metà del 1800 si riteneva comunemente che ogni funzione continua fosse derivabile tranne che in alcuni punti "particolari ed isolati". Bisogna arrivare a Weierstrass per vedere chiaramente distinti i concetti di continuità e derivabilità. Questi nel 1861 diede l'esempio di una funzione continua in ogni punto e non derivabile in alcun punto.

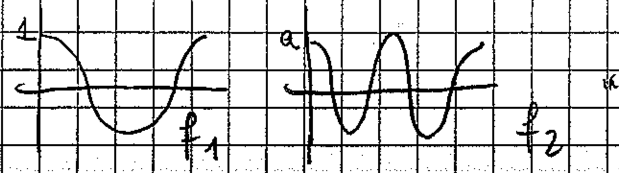
L'esempio di Weierstrass(*), nel quale la funzione è la somma di una serie trigonometrica, venne studiato a fondo e portò da una parte allo studio della derivabilità di classi particolari di funzioni (le funzioni monotone, che sono derivabili q. ovunque) dall'altra ad esempi via via più semplici.

L'esempio presentato qui è dovuto a A. HAYTING, una versione ancora più semplice di quella di VAN DER WAERDEN che considerava la funzione

---

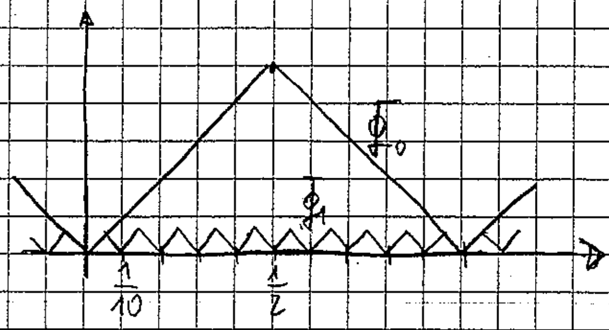
(*) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a^n \cos(b^n \pi x)}_{f_n(x)}$, $0 < a < 1$, b dispari, $a \cdot b > 1 + \frac{3\pi}{2}$

($f_n(x)$ sono regolari!!)



ii)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} \Phi_0(10^n x) \quad , \text{ dove } \Phi_0(x) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{Z})$$



(dimostrazione facendo uso degli sviluppi decimali)

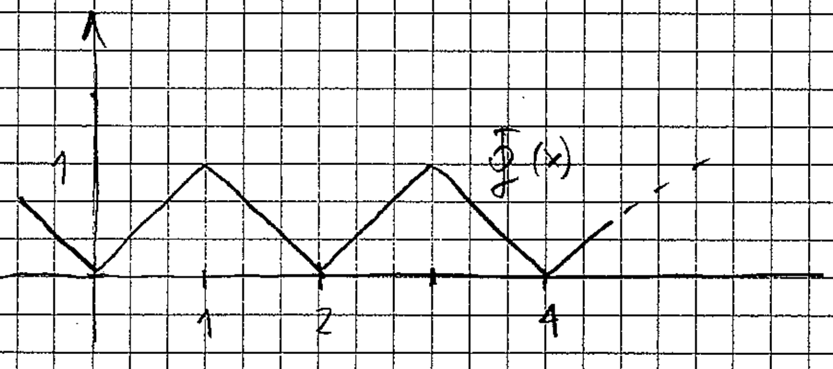
ESEMPIO (HAYTING)

Definiamo

$$\Phi(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

ed estendiamola su tutto $\mathbb{R}$ periodica di periodo 2, cioè

$$\Phi(x+2) = \Phi(x)$$

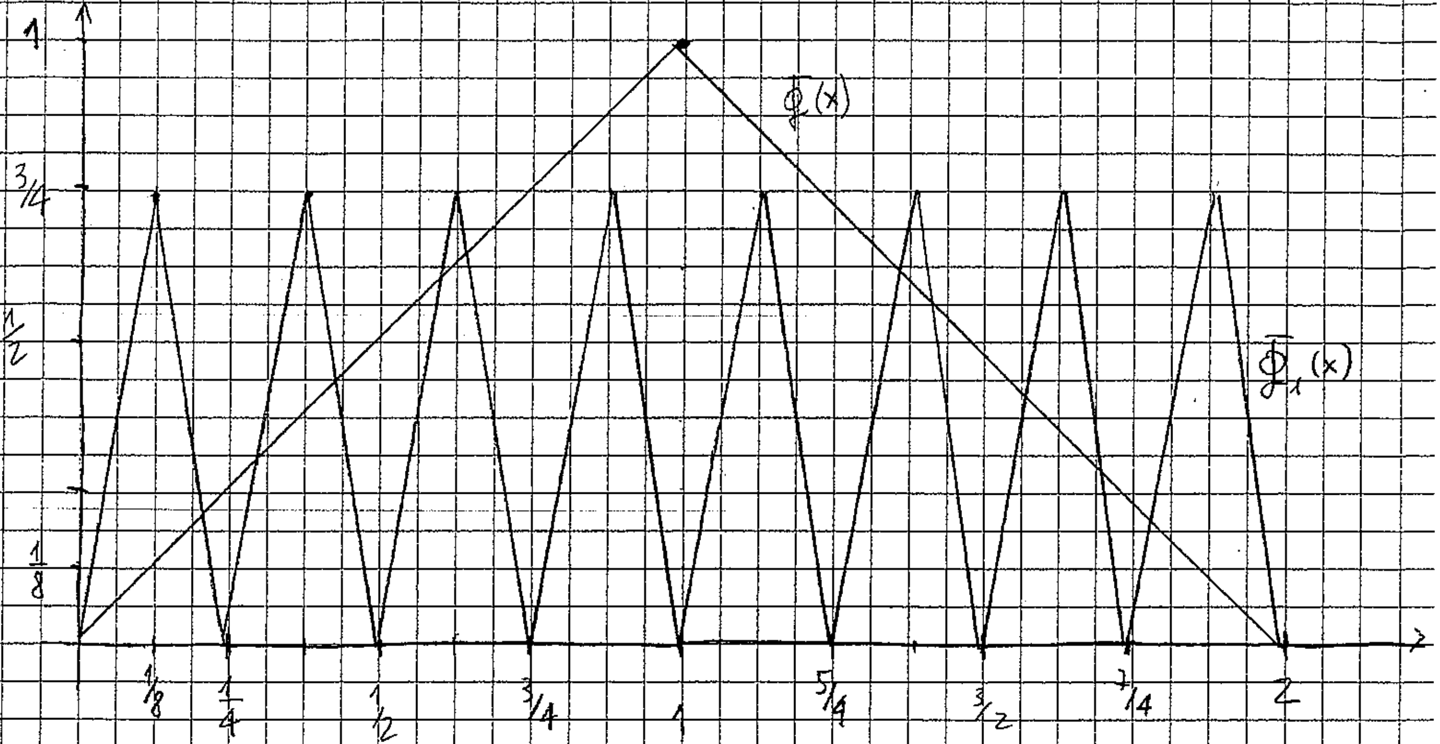


$\Phi(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$. Definiamo ora

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \Phi(4^n x)}$$

(chiamiamo $\Phi_n(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \Phi(4^n x)$, $\Phi_0(x) = \Phi(x)$)

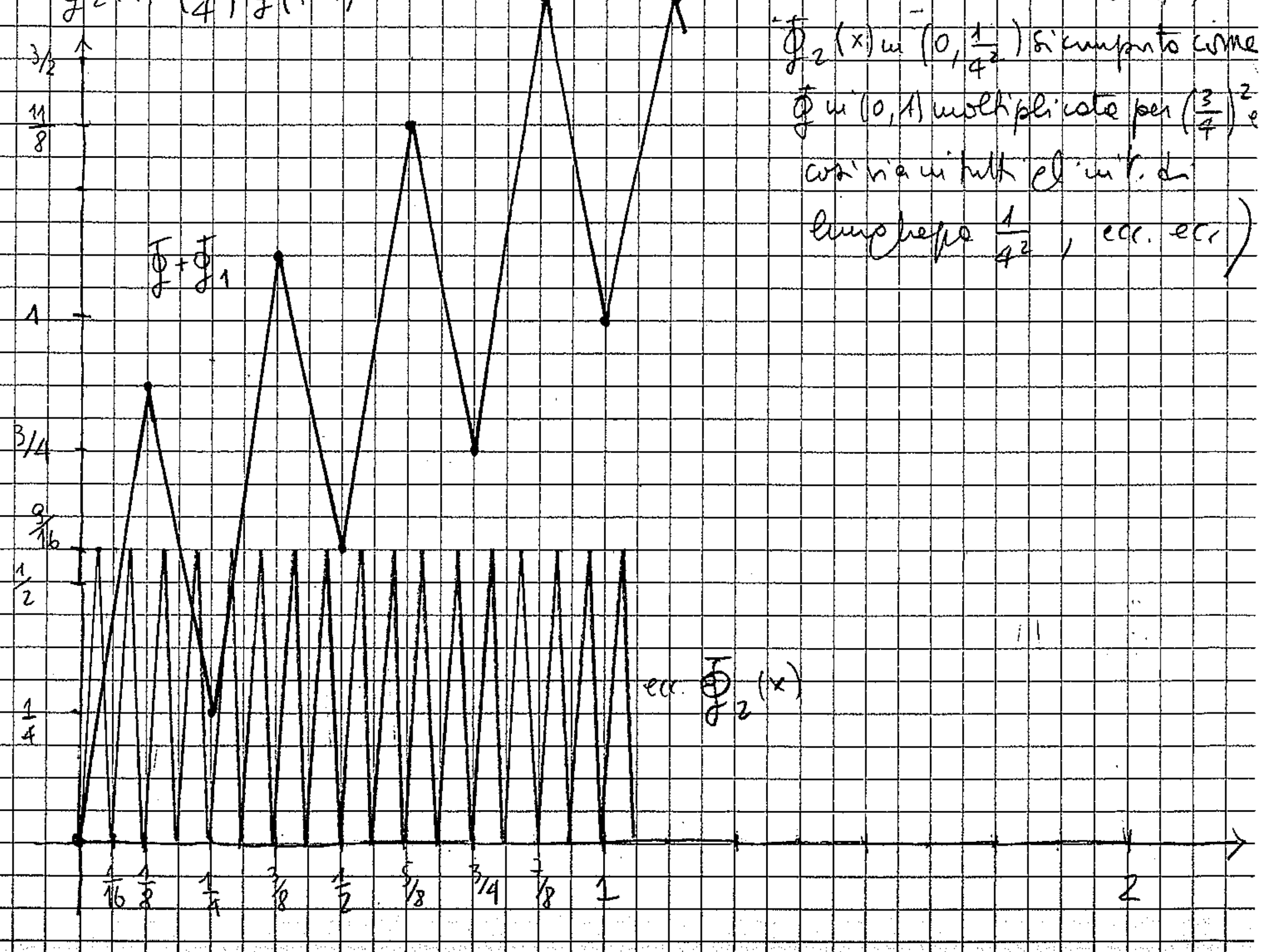
Facciamo qualche grafico:



$\Phi_1(x) = \left(\frac{3}{4}\right)\Phi(4x)$ ($\Phi_1(x)$ in $(0, \frac{1}{4})$ si comporta come Φ in $(0,1)$ moltiplicata per 3/4 e così via in tutti gli int. d'ampiezza $\frac{1}{4}$;

$\Phi_2(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Phi(4^2 x)$

$\Phi_2(x)$ in $(0, \frac{1}{4^2})$ si comporta come Φ in $(0,1)$ moltiplicata per $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ e così via in tutti gli int. di lunghezza $\frac{1}{4^2}$, ecc. ecc.)



Notiamo subito che $f(x)$ è continua. Infatti

$$\Phi_n(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \Phi(4^n x) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

e grazie al test di Weierstrass $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4 < +\infty\right)$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x)$ converge uniformemente. Si ha pertanto che $f(x)$, essendo limite uniforme di funzioni continue, è continua.

Vediamo adesso che f non è mai derivabile. Fissiamo ~~un numero reale~~ x ed un intero positivo m. Allora esiste un intero positivo K tale che

$$K \leq 4^m x \leq K+1$$

Poniamo $a_m = \frac{1}{4^m} K \qquad b_m = \frac{1}{4^m}(K+1)$

Abbiamo

$$a_m \leq x \leq b_m$$

Consideriamo ora i numeri $\boxed{4^n a_m}$ e $\boxed{4^n b_m}$. Si ha

$$(*)\begin{cases} \text{se } n > m & 4^n b_m - 4^n a_m = 4^{n-m}(K+1) - 4^{n-m}K = 4^{n-m} \text{ multiplo di } 4 \\ \text{se } n = m & 4^n b_m - 4^n a_m = K+1-K = 1 \\ \text{se } n < m & 4^n b_m - 4^n a_m = \frac{1}{4^{m-n}} < 1 \end{cases}$$

Inoltre, se $n < m$, tra loro non c'è un numero intero, infatti se per assurdo esistesse $i \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\frac{K}{4^{m-n}} = 4^n a_m < i < 4^n b_m = \frac{K+1}{4^{m-n}} \qquad (m-n>0)$$

sarebbe $K < 4^{m-n} i < K+1$, assurdo perché non si può avere un intero tra due interi successivi.

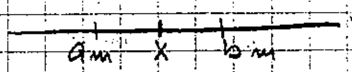
In definitiva, perché $b_n - a_n = \frac{k+1}{4^n} - \frac{k}{4^n} = \frac{1}{4^n}$,

si ottiene

$$\left|\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right| \geq \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{4}\, 3^n$$

E questo significa che f non è derivabile in x, perché ricordiamo che se $\exists\, f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, si ha anche

$$(\bullet) \qquad f'(x) = \lim_n \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \qquad \forall \text{ succ. } a_n, b_n,\ a_n \leq x \leq b_n,\ b_n - a_n \xrightarrow[n]{} 0;$$



e noi abbiamo costruito due successioni a_n, b_n t.c. $a_n \leq x \leq b_n$, $b_n - a_n = \frac{1}{4^n} \to 0$ tali che

$$\left|\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}\right| \geq \frac{1}{4}\, 3^n \to +\infty$$

Dimostriamo $(\bullet)$; per Taylor si ha

$$\left.\begin{aligned} f(b_n) &= f(x) + f'(x)(b_n - x) + o(b_n - x) \\ f(a_n) &= f(x) + f'(x)(a_n - x) + o(a_n - x) \end{aligned}\right] \text{ e quindi}$$

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{f'(x)(b_n - a_n) + o(b_n - x) - o(a_n - x)}{b_n - a_n} =$$

$$= f'(x) + \frac{o(b_n - x)}{b_n - a_n} - \frac{o(a_n - x)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n]{} f'(x)$$

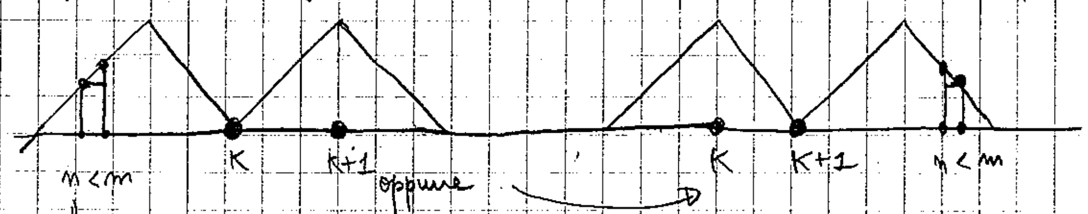
$$\left(\left|\frac{o(b_n - x)}{b_n - a_n}\right| = \left|\frac{o(b_n - x)}{b_n - x}\right| \cdot \underbrace{\left|\frac{b_n - x}{b_n - a_n}\right|}_{\leq 1} \leq \frac{o(b_n - x)}{b_n - x} \xrightarrow[n]{} 0 \quad \text{analoga per } o(a_n - x) \right)$$

V)

Da (*) segue allora che

$$\left|\Phi(4^n b_m) - \Phi(4^n a_m)\right| = \begin{cases} 0 & \text{se } n>m \quad (\text{perché } \Phi \text{ è periodica}) \\ |\Phi(k+1)-\Phi(k)| = 1 & \text{se } n=m \\ |4^n b_m - 4^n a_m| = \dfrac{1}{4^{m-n}} & \text{se } n<m \end{cases}$$

possibili situazioni



$|\Phi(x)-\Phi(y)| = |x-y|$ (nel caso la distanza tra x ed y sia < 1 e tra x ed y non ci sia un intero)

A questo punto possiamo dire che

$$f(b_m) - f(a_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left[\Phi(4^n b_m) - \Phi(4^n a_m)\right] =$$ non c'è contributo per $n>m$

$$= \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left[\Phi(4^n b_m) - \Phi(4^n a_m)\right] =$$ distinguo i casi $n=m$ ed $n<m$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^m \pm \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{4^{m-n}} = \left(\frac{3}{4}\right)^m \pm \sum_{n=0}^{m-1} \frac{3^n}{4^m} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^m \pm \frac{1}{4^m} \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \left(\frac{3}{4}\right)^m \pm \frac{1}{4^m} \frac{1-3^m}{1-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^m \pm \frac{1}{4^m} \cdot \frac{3^m-1}{2}$$

e quindi

$$|f(b_m) - f(a_m)| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^m - \frac{1}{2} \frac{3^m-1}{4^m} = \frac{2\cdot 3^m - 3^m + 1}{2\cdot 4^m} =$$

$$= \frac{3^m+1}{2\cdot 4^m} > \frac{3^m/2}{2\cdot 4^m} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^m$$