

**TRENTO, A.A. 2005/06**  
**TEORIA DI GALOIS**  
**FOGLIO DI ESERCIZI # 1**

*Esercizio 1.1.* Sia  $E/F$  una estensione di campi,  $\alpha \in E$  un elemento, e  $0 \neq f \in F[x]$  un polinomio monico (dunque non nullo) tale che  $f(\alpha) = 0$ .

Si mostri che sono equivalenti le due affermazioni:

1.  $f$  è il polinomio minimo di  $\alpha$  su  $F$ , e
2.  $f$  è irriducibile in  $F[x]$ .

*Esercizio 1.2.* Siano  $K \subseteq F \subseteq E$  campi, e  $\alpha \in E$ . Si mostri che se  $\alpha$  è algebrico su  $K$ , allora lo è anche su  $F$ , e il polinomio minimo di  $\alpha$  su  $F$  è un divisore del polinomio minimo di  $\alpha$  su  $K$ , e un multiplo di  $x - \alpha$ . Notate che  $x - \alpha$  è il polinomio minimo di  $\alpha$  su  $E$ .

Si mostri con un esempio che  $\alpha$  può essere algebrico su  $F$  senza esserlo su  $K$ .

*Esercizio 1.3.* Se una estensione  $E/F$  ha grado finito, allora ogni elemento di  $E$  è algebrico su  $F$ , di grado un divisore di  $|E : F|$ .

(SUGGERIMENTO: Se  $|E : F| = n$ , e  $\alpha \in E$ ,

$$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n$$

sono  $n + 1$  elementi di uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ , dunque ... Per la seconda parte, usare la formula dei gradi qui sotto.)

*Esercizio 1.4.* Dimostrare la formula dei gradi, ovvero che se  $K \subseteq F \subseteq E$  sono campi, e il grado  $|E : K|$  è finito, allora

$$|E : K| = |E : F| \cdot |F : K|.$$

(SUGGERIMENTO: Si prendano una base  $u_1, \dots, u_n$  di  $E$  su  $F$ , e una base  $v_1, \dots, v_m$  di  $F$  su  $K$ . Si mostri che gli  $nm$  elementi  $u_i \cdot v_j$  sono una base di  $E$  su  $K$ .)

*Esercizio 1.5.* Si consideri l'insieme

$$A = \{ \alpha \in \mathbf{C} : \alpha \text{ è algebrico su } \mathbf{Q} \}.$$

Si mostri che  $A$  è un sottocampo di  $\mathbf{C}$ , e che il grado  $|A : \mathbf{Q}|$  non è finito.

(SUGGERIMENTO: Si considerino gli elementi  $\alpha_n = \sqrt[n]{2}$ . Qual è il grado di  $\alpha_n$  su  $\mathbf{Q}$ ?) (SUGGERIMENTO: Si può usare il fatto che la somma e il prodotto di due numeri algebrici sono algebrici, e lo stesso vale per l'inverso di un numero algebrico non nullo.)

*Esercizio 1.6.*

- Se  $\varphi : A \rightarrow B$  è un isomorfismo di anelli, si mostri che la funzione inversa  $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$  è ancora un isomorfismo.
- Se  $C$  è un terzo anello, e  $\psi : B \rightarrow C$  è un isomorfismo, si mostri che allora la composizione  $\psi \circ \varphi$  è un isomorfismo.

*Esercizio 1.7.* Sia  $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{Z}[x]$ , con  $a_n, a_0 \neq 0$ .

- Sia  $\alpha \in \mathbf{Q}$  una radice di  $f$ , e si scriva  $\alpha = \frac{u}{v}$ , con  $u, v$  interi coprimi. Si mostri che  $u$  divide  $a_0$ , e  $v$  divide  $a_n$ .
- Si assuma ora  $f$  monico, cioè  $a_n = 1$ . Si mostri che se  $\alpha \in \mathbf{Q}$  è una radice di  $f$ , allora  $\alpha \in \mathbf{Z}$ , e  $\alpha$  divide  $a_0$ .