TRENTO, A.A. 2005/06
TEORIA DI GALOIS
FOGLIO DI ESERCIZI # 4

Esercizio 4.1. Sia F un campo, $f \in F[x]$ un polinomio monico di grado n, e E/F il campo di spezzamento di f su F.

Si mostri che $|E : F| \leq n!$ (più facile), e poi che in realtà $|E : F|$ divide $n!$

(Suggerimento: Per dimostrare la seconda parte, si proceda per induzione su n. Si consideri prima il caso in cui f è irriducibile in $F[x]$, dunque se α è una radice di f in E si ha $|E : F| = \dots$ Si consideri quindi il caso in cui f è riducibile, procedendo per l'appunto per induzione.)

Esercizio 4.2. Sia $f = x^4 - 3 \in \mathbf{Q}[x]$. Sia E il campo di spezzamento di f su $\mathbf{Q}$. Si costruisca la corrispondenza di Galois fra $E/\mathbf{Q}$ e $\mathrm{Gal}(E/\mathbf{Q})$.

Si faccia vedere che $E/\mathbf{Q}$ è un'estensione radicale.

Nota. L'esercizio successivo è abbastanza complicato, ma provate comunque a fare quello che potete, cercando di calcolare almeno alcuni campi intermedi e sottogruppi.

Esercizio 4.3. Sia $f = x^5 - 2 \in \mathbf{Q}[x]$. Sia E il campo di spezzamento di f su $\mathbf{Q}$. Si costruisca la corrispondenza di Galois fra $E/\mathbf{Q}$ e $\mathrm{Gal}(E/\mathbf{Q})$.