CAPITOLO 10

Prodotto scalare, ortogonalitá e basi ortonormali

Esercizio 10.1. *Dati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^2$ si calcoli il prodotto scalare (v_i, v_j) per $i, j = 1, 2, \dots, 6$:*

$$v_1 = (6,3) \qquad v_2 = (-1,0) \qquad v_3 = (1,-2)$$
$$v_4 = (-2,0) \qquad v_5 = (-2,10) \qquad v_6 = (1,\sqrt{2})$$

Esercizio 10.2. *Si dica quali tra i vettori dell'esercizio precedente sono ortogonali tra loro.*

Esercizio 10.3. *Dati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$ si calcoli il prodotto scalare (v_i, v_j) per $i, j = 1, 2, \dots, 6$, e dica quali vettori sono ortogonali tra loro.*

$$v_1 = (1,3,4) \qquad v_2 = (0,-1,2) \qquad v_3 = (1,2,1)$$
$$v_4 = (-2,3,0) \qquad v_5 = (1,1,1) \qquad v_6 = (1,-3,2)$$

Esercizio 10.4. *Si calcoli la norma dei seguenti vettori*

$$v_1 = (-2,5,1) \qquad v_2 = (1,0,-2) \qquad v_3 = (7,1,1)$$
$$v_4 = (4,1) \qquad v_5 = (10,1) \qquad v_6 = (-1,-3)$$

Esercizio 10.5. *Si calcoli la distanza tra i vettori v_1 e v_2, e tra i vettori v_5 e v_6 dell'esercizio precedente.*

Esercizio 10.6. *Determinare il valore del parametro $k \in \mathbf{R}$ tale che i vettori*

$$v = (1,3,7,-1), \qquad w = (3,5,1,k)$$

siano ortogonali.

Esercizio 10.7. *Siano assegnati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$:*

$$v = (2,-1,0,1), \qquad w = (-1,2,0,2)$$

a) *Si calcoli l'angolo tra i due vettori.*
b) *Si determini la proiezione ortogonale di v su w.*
c) *Si scriva v come somma di un vettore v_1 multiplo di w e di un vettore v_2 ortogonale a w.*

Esercizio 10.8. *Si ripeta l'esercizio precedente con i seguenti vettori di $\mathbf{R}^3$*

$$v = (3,4,-2), \qquad w = (2,1,-1)$$

Esercizio 10.9. *Siano $u = (4,2,-2)$ e $v = (3,-3,2)$ vettori di $\mathbf{R}^3$.*

a) *Calcolare le lunghezze di u e di v (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$).*
b) *Trovare tutti i vettori w di lunghezza 1 ortogonali a u e a v.*

Esercizio 10.10. *Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^4$*

$$v_1 = (0,-2,1,1), \quad v_2 = (1,0,0,1).$$

a) *Calcolare le lunghezze di v_1 e di v_2 (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^4$).*
b) *Determinare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2.*

Esercizio 10.11. *Data la base*
$$\mathcal{B} = \{v_1 = (-1,0,1),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (1,0,1)\}$$
di $\mathbf{R}^3$, si determini una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt a partire da $\mathcal{B}$.

Esercizio 10.12. *Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base*
$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (0,0,1)\}$$

Esercizio 10.13. *Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base*
$$\mathcal{B} = \{v_1 = (2,0,0),\ v_2 = (1,2,0),\ v_3 = (0,-1,-1)\}$$

Esercizio 10.14. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ (con il prodotto scalare canonico) generato dai vettori*
$$v_1 = (1,1,0,1),\ v_2 = (1,-2,0,0),\ v_3 = (1,0,-1,2).$$

a) *Trovare una base ortonormale di W.*
b) *Trovare una base del complemento ortogonale di W.*

Esercizio 10.15. *Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^3$*
$$v_1 = (1,2,1), \quad v_2 = (1,1,1).$$

a) *Calcolare le lunghezze di v_1 e di v_2.*
b) *Determinare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2.*
c) *Trovare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori v_1 e v_2.*

Esercizio 10.16. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che $2x_1 + x_2 = 0$. Si determini una base ortonormale di U rispetto al prodotto scalare ordinario di $\mathbf{R}^3$.*

Esercizio 10.17. *Sia V il seguente sottospazio di $\mathbf{R}^4$*
$$V = \langle\ v_1 = (1,1,0,0),\ v_2 = (1,2,-1,3)\ \rangle$$
Si determini il complemento ortogonale $V^\perp$ di V.

Esercizio 10.18.

a) *Partendo dalla base $\{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (2,1,-3),\ v_3 = (-1,1,0)\}$, costruire una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da v_1 e v_2. Determinare una base del complemento ortogonale di U.*

Esercizio 10.19. *Siano $v_1 = (2,1,1,0)$ e $v_2 = (-1,1,2,0)$ e sia $V = \langle v_1,\ v_2 \rangle \subset \mathbf{R}^4$.*

a) *Calcolare l'angolo tra v_1 e v_2.*
b) *Trovare una base del complemento ortogonale di V.*

Esercizio 10.20. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,2,0),\ v_2 = (2,4,-1)\}$.*

a) *Si trovi una base ortonormale di V a partire da $\mathcal{B}$.*
b) *Si trovi una base ortonormale del complemento ortogonale $V^\perp$ di V.*

Esercizio 10.21. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ la funzione lineare tale che*
$$T(1,-2,1) = (2,1),\ T(1,0,0) = (-1,2),\ T(0,1,0) = (-1,0).$$

a) *Che dimensione ha l'immagine di T?*
b) *Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$) del nucleo di T.*

Esercizio 10.22. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Si determini una base ortonormale di W rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$.*

Esercizio 10.23. *Si considerino i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$:*
$$v_1 = (1,0,-1,0), \quad v_2 = (2,2,-1,t) \quad (t \text{ parametro reale}).$$

a) *Si determini il valore di t tale che v_1 e v_2 formino un angolo di $45°$.*
b) *Posto $t = 0$ si determini la proiezione di v_2 su v_1.*

c) *Posto* $t = 0$ *e dato* $v_3 = (0, 0, 1, 1)$, *si determini una base ortonormale dello spazio* $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

---

1. Suggerimenti

Prodotto scalare: Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare di V è una applicazione

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot) : V \times V \to & \quad \mathbf{R} \\ (u, v) \ \mapsto & \ (u, v) \end{aligned}$$

che gode delle seguenti proprietà:

- proprietà simmetrica: $(u, v) = (v, u) \qquad \forall\, u, v \in \mathbf{R}$,
- bilinearità: $(\alpha\, u + \beta\, v, w) = \alpha\, (u, w) + \beta\, (v, w) \quad \forall\, u, v \in \mathbf{R} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$,
- definita positiva: $(u, u) \geq 0\ \forall u \in V$ e $(u, u) = 0$ sse $u = 0$.

(Notiamo che si usa la stessa notazione per la coppia (u, v) e per il loro prodotto scalare (u, v), ma il primo è una coppia di vettori mentre il secondo è un numero)

Il **prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^n$** (che noi considereremo salvo diversa indicazione) è: dati $u = (x_i)_{i=1,..,n}$ e $v = (y_i)_{i=1,..,n}$:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = u \cdot v^T$$

Norma o lunghezza: definiamo norma o lunghezza di un vettore v il numero

$$\| v \| = \sqrt{(v, v)}$$

Notiamo che

$$(v, v) = \| v \|^2$$

Angolo tra due vettori. Dati due vettori $u, v \in V$ e indicato con ϑ l'angolo convesso tra essi, si ha

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u, v)}{\| u \| \cdot \| v \|}$$

Ortogonalità. Due vettori $u, v \in V$ sono ortogonali se $(u, v) = 0$.

Proiezione ortogonale su un vettore. Dati due vettori $u, v \in V$ si chiama proiezione ortogonale di u su v il vettore

$$pr_v(u) = \frac{(u, v)}{\| v \|^2} \cdot v = \frac{(u, v)}{(v, v)} \cdot v$$

- $pr_v(u)$ è un vettore parallelo a v,
- $u - pr_v(u)$ è un vettore ortogonale a v,
- $u = (u - pr_v(u)) + pr_v(u)$, ovvero ogni vettore u può sempre essere scritto come somma di di un vettore ortogonale e di uno parallelo ad un altro vettore v.

Complemento ortogonale. Dato uno spazio vettoriale $W \subseteq \mathbf{R}^n$, chiamiamo complemento ortogonale di W lo spazio vettoriale

$$W^{\perp} = \{u \in \mathbf{R}^n \mid (u, w) = 0\ \forall w \in W\}$$

$W^{\perp}$ è uno spazio vettoriale.

Insieme ortonormale è un insieme $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di vettori:

- a due a due ortogonali: $(v_i, v_j) = 0$ per $i \neq j = 1, \dots, n$,
- di norma 1: $\| v_i \| = 1 = (v_i, v_i)$ per $i = 1, \dots, n$

Gram-Schmidt. Permette di individuare una base ortonormale

$$\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

a partire da una base qualsiasi

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

nel seguente modo.

Determiniamo innanzitutto a partire da $\mathcal{B}$ una base

$$\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1). Notiamo che siccome dei vettori w_i ci interessa solo l'ortogonalità, possiamo sostituire un vettore w_i ottenuto con un qualsiasi suo multiplo. In particolare per ottenere la base $\mathcal{B}'$ cercata è sufficiente rendere i vettori w_i di norma 1, dividendoli per la loro norma.

- $w_1 = v_1$
- $w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \dfrac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1$
- $w_3 = v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \dfrac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \dfrac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2$
- $\dots$
- $w_n = v_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} pr_{w_i}(v_n) = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(v_n, w_i)}{(w_i, w_i)} \cdot w_i$

Quindi

$$u_1 = \frac{w_1}{\| w_1 \|}, \qquad u_2 = \frac{w_2}{\| w_2 \|}, \qquad u_3 = \frac{w_3}{\| w_3 \|}, \qquad \dots, \qquad u_n = \frac{w_n}{\| w_n \|}$$

La base canonica è una base ortonormale.

Proiezione ortogonale su uno spazio vettoriale. Siano V e W due spazi vettoriali tali che $W \subseteq V$, e sia $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ una base **ortonormale** di W. L'applicazione

$$\begin{aligned} P_W : V &\longrightarrow V \\ v &\longrightarrow w = \sum_{i=1}^{m} (v, e_i) \cdot e_i \end{aligned}$$

è detta **proiezione su** W.

- P_W è una **applicazione lineare** (endomorfismo di V).
- Dato un vettore $v \in V$, il corrispondente vettore $w = P_W(v)$ appartiene a W.
- Dato un vettore $v \in V$, il corrispondente vettore $w = P_W(v)$ è l'unico vettore di W tale che il vettore $v - w$ appartiene a $W^\perp$.

---

2. Soluzioni

Esercizio 10.1. *Dati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^2$ *si calcoli il prodotto scalare* (v_i, v_j) *per* $i, j = 1, 2, \dots, 6$*:*

$$v_1 = (6, 3) \qquad v_2 = (-1, 0) \qquad v_3 = (1, -2)$$
$$v_4 = (-2, 0) \qquad v_5 = (-2, 10) \qquad v_6 = (1, \sqrt{2})$$

Soluzione:

Notiamo che per le proprietà del prodotto scalare $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$, calcoleremo quindi tali prodotti una sola volta.

$$(v_1, v_1) = 6 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 45$$

$$(v_1, v_2) = 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -6 \qquad (v_1, v_3) = 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 0$$

$$(v_1, v_4) = 6 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 = -12 \qquad (v_1, v_5) = 6 \cdot (-2) + 3 \cdot 10 = 18$$

$$(v_1, v_6) = 6 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2} \qquad (v_2, v_2) = -1 \cdot (-1)1 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$(v_2, v_3) = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = -1 \qquad (v_2, v_4) = -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 2$$

$$(v_2, v_5) = -1 \cdot (-2) + 0 \cdot 10 = 2 \qquad (v_2, v_6) = -1 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{2} = -1$$

$$(v_3, v_3) = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) = 5 \qquad (v_3, v_4) = 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 = -2$$

$$(v_3, v_5) = 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 10 = -22 \qquad (v_3, v_6) = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot \sqrt{2} = 1 - 2\sqrt{2}$$

$$(v_4, v_4) = -2 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 4 \qquad (v_4, v_5) = -2 \cdot (-2) + 0 \cdot 10 = 4$$

$$(v_4, v_6) = -2 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{2} = -2 \qquad (v_5, v_5) = -2 \cdot (-2) + 10 \cdot 10 = 104$$

$$(v_5, v_6) = -2 \cdot 1 + 10 \cdot \sqrt{2} = -2 + 10\sqrt{2} \qquad (v_6, v_6) = 1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1 + 2 = 3$$

□

Esercizio 10.2. *Si dica quali tra i vettori dell'esercizio precedente sono ortogonali tra loro.*

Soluzione:

Due vettori sono ortogonali tra loro se il loro prodotto scalare è zero, quindi gli unici vettori dell'esercizio precedente ortogonali tra loro sono v_1 e v_3.

□

Esercizio 10.3. *Dati i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$ *si calcoli il prodotto scalare* (v_i, v_j) *per* $i, j = 1, 2, \dots, 6$, *e si dica quali vettori sono ortogonali tra loro.*

$$v_1 = (1, 3, 4) \qquad v_2 = (0, -1, 2) \qquad v_3 = (1, 2, 1)$$

$$v_4 = (-2, 3, 0) \qquad v_5 = (1, 1, 1) \qquad v_6 = (1, -3, 2)$$

Soluzione:

$$(v_1, v_1) = 26 \qquad (v_1, v_2) = 6 \qquad (v_1, v_3) = 11 \qquad (v_1, v_4) = 9$$

$$(v_1, v_5) = 8 \qquad (v_1, v_6) = 0 \qquad (v_2, v_2) = 5 \qquad (v_2, v_3) = 0$$

$$(v_2, v_4) = -3 \qquad (v_2, v_5) = 1 \qquad (v_2, v_6) = 7 \qquad (v_3, v_3) = 6$$

$$(v_3, v_4) = 4 \qquad (v_3, v_5) = 4 \qquad (v_3, v_6) = -3 \qquad (v_4, v_4) = 13$$

$$(v_4, v_5) = 1 \qquad (v_4, v_6) = -11 \qquad (v_5, v_5) = 3 \qquad (v_5, v_6) = 0$$

$$(v_6, v_6) = 14$$

I vettori ortogonali tra loro sono:

$$v_1 \text{ e } v_6, \qquad v_2 \text{ e } v_3, \qquad v_5 \text{ e } v_6$$

□

Esercizio 10.4. *Si calcoli la norma dei seguenti vettori*

$$v_1 = (-2, 5, 1) \qquad v_2 = (1, 0, -2) \qquad v_3 = (7, 1, 1)$$

$$v_4 = (4, 1) \qquad v_5 = (10, 1) \qquad v_6 = (-1, -3)$$

Soluzione:

La norma di un vettore è data dalla radice quadrata del prodotto scalare del vettore per se stesso:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

Di conseguenza

$$\|v_1\| = \sqrt{30}, \qquad \|v_2\| = \sqrt{5}, \qquad \|v_3\| = \sqrt{51},$$
$$\|v_4\| = \sqrt{17}, \qquad \|v_5\| = \sqrt{101}, \qquad \|v_6\| = \sqrt{10}.$$

□

Esercizio 10.5. *Si calcoli la distanza tra i vettori v_1 e v_2, e tra i vettori v_5 e v_6 dell'esercizio precedente.*

Soluzione:

La distanza tra due vettori è data dalla norma della loro differenza.

$$\mathrm{d}(u, v) = \|u - v\|$$

Di conseguenza

$$\mathrm{d}(v_1, v_2) = \|(3, -5, -3)\| = \sqrt{43}$$
$$\mathrm{d}(v_5, v_6) = \|(-11, -4)\| = \sqrt{137}$$

□

Esercizio 10.6. *Determinare il valore del parametro $k \in \mathbf{R}$ tale che i vettori*

$$v = (1, 3, 7, -1), \qquad w = (3, 5, 1, k)$$

siano ortogonali.

Soluzione:

Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è zero.

$$(v, w) = 3 + 15 + 7 - k = 25 - k \quad \Rightarrow \quad (v, w) = 0 \text{ se } k = 25$$

Quindi v e w sono ortogonali se $k = 25$

□

Esercizio 10.7. *Siano assegnati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$:*

$$v = (2, -1, 0, 1), \qquad w = (-1, 2, 0, 2)$$

a) *Si calcoli l'angolo tra i due vettori.*
b) *Si determini la proiezione ortogonale di v su w.*
c) *Si scriva v come somma di un vettore v_1 multiplo di w e di un vettore v_2 ortogonale a w.*

Soluzione:

a) Se indichiamo con ϑ l'angolo (convesso) tra i due vettori, sappiamo che

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v, w)}{\| v \| \cdot \| w \|}$$

Poiché

$$(v, w) = -2 - 2 + 2 = -2, \quad \| v \| = \sqrt{6}, \quad \| w \| = \sqrt{9} = 3,$$

otteniamo

$$\cos(\vartheta) = \frac{-2}{\sqrt{6} \cdot 3} = -\frac{2}{3\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{9}$$

e

$$\vartheta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{9}\right), \quad \text{con } 0 \leq \vartheta < \pi$$

b) La proiezione ortogonale di v su w è il vettore

$$pr_w(v) = \frac{(v, w)}{\| w \|^2} \cdot w = \frac{(v, w)}{(w, w)} \cdot w$$

Notiamo che $pr_w(v)$ è un vettore multiplo di w.

Sappiamo già che $(v,w) = -2$, inoltre $(w,w) = \| w \|^2 = 3^2 = 9$, quindi

$$pr_w(v) = \frac{-2}{9} \cdot w = \left(\frac{2}{9},\ -\frac{4}{9},\ 0,\ -\frac{4}{9}\right)$$

c) Dalla teoria sappiamo che il vettore $v - pr_w(v)$ è un vettore ortogonale a w (è comunque immediato verificarlo), quindi possiamo prendere:

$$\begin{aligned} &v_1 = pr_w(v) \quad \text{multiplo di } w \\ &v_2 = v - pr_w(v) \quad \text{ortogonale a } w \\ &v_1 + v_2 = v \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{2}{9},\ -\frac{4}{9},\ 0,\ -\frac{4}{9}\right) \\ v_2 &= \left(\frac{16}{9},\ -\frac{5}{9},\ 0,\ \frac{13}{9}\right) \end{aligned}$$

□

Esercizio 10.8. *Si ripeta l'esercizio precedente con i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v = (3, 4, -2), \qquad w = (2, 1, -1)$$

SOLUZIONE:

- La proiezione ortogonale di v su w è il vettore

$$pr_w(v) = \frac{(v,w)}{\| w \|^2} \cdot w = \frac{(v,w)}{(w,w)} \cdot w$$

  Notiamo che $pr_w(v)$ è un vettore multiplo di w.

$$\begin{aligned} (v,w) &= 12 \\ (w,w) &= 6 \end{aligned}$$

  quindi

$$pr_w(v) = \frac{12}{6} \cdot w = (4,\ 2,\ -2)$$

- Dalla teoria sappiamo che il vettore $v - pr_w(v)$ è un vettore ortogonale a w , quindi possiamo prendere:

$$\begin{aligned} &v_1 = pr_w(v) \quad \text{multiplo di } w \\ &v_2 = v - pr_w(v) \quad \text{ortogonale a } w \\ &v_1 + v_2 = v \end{aligned}$$

  Quindi

$$\begin{aligned} v_1 &= (4,\ 2,\ -2) \\ v_2 &= (-1,\ 2,\ 0) \end{aligned}$$

□

Esercizio 10.9. *Siano* $u = (4, 2, -2)$ *e* $v = (3, -3, 2)$ *vettori di* $\mathbf{R}^3$.

a) *Calcolare le lunghezze di* u *e di* v *(rispetto al prodotto scalare canonico di* $\mathbf{R}^3$*).*
b) *Trovare tutti i vettori* w *di lunghezza 1 ortogonali a* u *e a* v.

SOLUZIONE:

a) Ricordiamo che $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$, quindi:

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \\ \|v\| &= \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{22} \end{aligned}$$

b) Si $w = (x, y, z)$ il generico vettore di $\mathbf{R}^3$ e imponiamo la condizione che sia ortogonale a u e a v, ovvero $(u, w) = (v, w) = 0$:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema considerando la matrice associata

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & | & 0 \\ 3 & -3 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ II + I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 7 & -1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 7x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 7t \\ z = 2t + 7t = 9t \end{cases}$$

Quindi il generico vettore w ortogonale a u e v è del tipo

$$(t, 7t, 9t)$$

Imponiamo ora la condizione che w abbia norma 1:

$$\sqrt{t^2 + (7t)^2 + (9t)^2} = 1 \ \Rightarrow \sqrt{131t^2} = 1 \ \Rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{131}}$$

Quindi abbiamo due possibili scelte per w:

$$w = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{131}}, \frac{7}{\sqrt{131}}, \frac{9}{\sqrt{131}}\right)$$

$\square$

Esercizio 10.10. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = (0, -2, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, 0, 1).$$

a) *Calcolare le lunghezze di* v_1 *e di* v_2 *(rispetto al prodotto scalare canonico di* $\mathbf{R}^4$*).*
b) *Determinare la proiezione ortogonale di* v_1 *su* v_2*.*

Soluzione:

a) La lunghezza di un vettore corrisponde alla sua norma:

$$\| v_1 \| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$
$$\| v_2 \| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

b) Utilizzando la formula per calcolare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2 otteniamo:

$$pr_{v_2}(v_1) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_2, v_2)} \cdot v_2 = \frac{1}{2} \cdot (1, 0, 0, 1) = \left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$$

$\square$

Esercizio 10.11. *Data la base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (-1, 0, 1),\ v_2 = (0, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, 1)\}$$

di $\mathbf{R}^3$*, si determini una base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$ *utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt a partire da* $\mathcal{B}$*.*

Soluzione:

Sia $\mathcal{B}' = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base $\mathcal{B}$.

Costruiamo prima una base $\mathcal{B}'' = \{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (-1, 0, 1) \\ w_2 &= v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (0, 1, 0) - 0 \cdot w_1 = (0, 1, 0) \\ w_3 &= v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2 \\ &= (1, 0, 1) - 0 \cdot w_1 - 0 \cdot w_2 = (1, 0, 1) \end{aligned}$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i, ma di norma 1:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
u_2 &= w_2 = (0,1,0)\\
u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Notiamo che potevamo osservare dall'inizio che $v_1,\ v_2$ e v_3 sono già ortogonali, quindi era sufficiente normalizzarli per ottenere a partire da essi una base ortonormale.

□

Esercizio 10.12. *Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (0,0,1)\}$$

Soluzione:
Sia $\mathcal{B}' = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base $\mathcal{B}$. Per facilitare i conti scambiamo innanzitutto l'ordine di v_1, v_2 e v_3 in $\mathcal{B}$ (cambiando i nomi per evitare confusioni):

$$\mathcal{B} = \{v_1' = (0,0,1),\ v_2' = (0,1,1),\ v_3' = (1,1,1)\}$$

Come nell'esercizio precedente costruiamo prima una base $\mathcal{B}'' = \{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1' = (0,0,1)\\
w_2 &= v_2' - pr_{w_1}(v_2') = v_2' - \frac{(v_2', w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (0,1,1) - \frac{1}{1} \cdot (0,0,1) = (0,1,0)\\
w_3 &= v_3' - pr_{w_1}(v_3') - pr_{w_2}(v_3') = v_3' - \frac{(v_3', w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3', w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2\\
&= (1,1,1) - \frac{1}{1} \cdot (0,0,1) - \frac{1}{1} \cdot (0,1,0) = (1,0,0)
\end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso i vettori ottenuti hanno già norma 1, quindi

$$u_1 = w_1 = (0,0,1), \qquad u_2 = w_2 = (0,1,0), \qquad u_3 = w_3 = (1,0,0)$$

Infine

$$\mathcal{B}' = \{(0,0,1),\ (0,1,0),\ (1,0,0)\ \}$$

□

Esercizio 10.13. *Si ripeta l'esercizio precedente partendo dalla base*

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (2,0,0),\ v_2 = (1,2,0),\ v_3 = (0,-1,-1)\}$$

Soluzione:
Sia

$$\mathcal{B}' = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$$

la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dalla base $\mathcal{B}$.

- Il vettore u_1 lo otteniamo normalizzando v_1:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(2,0,0)}{2} = (1,0,0)$$

- Per calcolare il vettore u_2 cominciamo con il calcolare il vettore w_2 ortogonale a u_1:

$$w_2 = v_2 - (v_2, u_1)\, u_1 = (1,2,0) - 1 \cdot (1,0,0) = (0,2,0)$$

  Quindi

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(0,2,0)}{2} = (0,1,0)$$

- Anche per calcolare il vettore u_3 calcoliamo prima il vettore w_3 ortogonale a u_1 e u_2.

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - (v_3, u_1)\, u_1 - (v_3, u_2)\, u_2 = (0, -1, -1) - 0 - (-1) \cdot (0, 1, 0) \\ &= (0, 0, -1) \end{aligned}$$

Notiamo che w_3 è già normale, quindi $u_3 = w_3 = (0, 0, -1)$.

□

Esercizio 10.14. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ (con il prodotto scalare canonico) generato dai vettori*

$$v_1 = (1, 1, 0, 1), \;\; v_2 = (1, -2, 0, 0), \;\; v_3 = (1, 0, -1, 2).$$

a) *Trovare una base ortonormale di W.*
b) *Trovare una base del complemento ortogonale di W.*

Soluzione:

a) Notiamo che l'insieme $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ è una base di W in quanto i vettori sono linearmente indipendenti (la matrice associata ha rango 3). Per determinare una base ortonormale $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ dobbiamo utilizzare il metodo di Gram-Schmidt, costruendo prima una base $\{w_1,\ w_2,\ w_3\}$ di vettori a due a due artogonali (non necessariamente di norma 1).

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = (1, 1, 0, 1) \\ w_2 &= v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (1, -2, 0, 0) - \frac{-1}{3} \cdot (1, 1, 0, 1) = \\ &= \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Prima di procedere notiamo che dei vettori w_i ci interessa solo la direzione (in modo che siamo tra loro ortogonali), ma non la lunghezza. Quindi ci conviene sostituire il vettore trovato con un suo multiplo:

$$\begin{aligned} w_2 &= 3 \cdot \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}\right) = (4, -5, 0, 1) \\ w_3 &= v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} \cdot w_2 \\ &= (1, 0, -1, 2) - \frac{3}{3} \cdot (1, 1, 0, 1) - \frac{6}{42} \cdot (4, -5, 0, 1) = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, -1, \frac{6}{7}\right) \end{aligned}$$

Anche in questo caso ci conviene sostituire il vettore trovato con un suo multiplo:

$$w_3 = -7 \cdot \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, -1, \frac{6}{7}\right) = (4, 2, 7, -6)$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i, ma di norma 1:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}, 0, \frac{1}{\sqrt{42}}\right) \\ u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{105}}, \frac{2}{\sqrt{105}}, \frac{7}{\sqrt{105}}, -\frac{6}{\sqrt{105}}\right) \end{aligned}$$

Infine una base ortonormale di W è

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{5}{\sqrt{42}}, 0, \frac{1}{\sqrt{42}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{105}}, \frac{2}{\sqrt{105}}, \frac{7}{\sqrt{105}}, -\frac{6}{\sqrt{105}}\right) \right\}$$

b) Il complemento ortogonale $W^\perp$ è formato dai vettori di $\mathbf{R}^4$ ortogonali ai vettori di W, ovvero ortogonali agli elementi di una sua base, quindi

$$W^\perp = \{(x, y, z, w) \mid x + y + w = 0,\ x - 2y = 0,\ x - z + 2w = 0\}$$

Risolviamo quindi il sistema omogeneo ottenuto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & \mid & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & \mid & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ 3III - II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \mid & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}t \\ y = -\frac{1}{3}t \\ z = \frac{4}{3}t \\ w = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Infine

$$\mathcal{B}(W^{\perp}) = \{ \ (-2, -1, 4, 3) \ \}$$

$\square$

Esercizio 10.15. *Si considerino i vettori di* $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 1, 1).$$

a) *Calcolare le lunghezze di v_1 e di v_2.*
b) *Determinare la proiezione ortogonale di v_1 su v_2.*
c) *Trovare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori v_1 e v_2.*

Soluzione:

a)

$$\| \ v_1 \ \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$
$$\| \ v_2 \ \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

b)

$$pr_{v_2}(v_1) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_2, v_2)} \cdot v_2 = \frac{4}{3} \cdot (1, 1, 1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right).$$

c) Sia $\{u_1, u_2\}$ la base ortonormale cercata. La cosa più semplice per sfruttare i conti già fatti è considerare

$$u_1 = \frac{v_2}{\| \ v_2 \ \|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Quindi

$$w_2 = v_1 - (v_1, u_1) \cdot u_1 = v_1 - pr_{v_2}(v_1) = (1, 2, 1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

Notiamo che w_2 è parallelo a $(-1, 2, -1)$, quindi

$$u_2 = \frac{(-1, 2, -1)}{\| \ (-1, 2, -1) \ \|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

Infine la base ortogonale cercata è

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

$\square$

Esercizio 10.16. *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che $2x_1 + x_2 = 0$. Si determini una base ortonormale di U rispetto al prodotto scalare ordinario di $\mathbf{R}^3$.*

Soluzione:

Gli elementi di U sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che $2x_1 + x_2 = 0$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = s \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$U = \langle\ (1,-2,0),\ (0,0,1)\ \rangle$$

Poichè i due generatori sono tra loro ortogonali, per ottenere una base ortonormale di U è sufficiente prenderli di norma 1:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{\sqrt{5}},\ 0\right),\ (0,\ 0,\ 1) \right\}$$

$\square$

Esercizio 10.17. *Sia V il seguente sottospazio di $\mathbf{R}^4$*

$$V = \langle\ v_1 = (1,1,0,0),\ v_2 = (1,2,-1,3)\ \rangle$$

Si determini il complemento ortogonale $V^\perp$ di V.

SOLUZIONE:

Sia $u = (x,y,z,w)$ il generico elemento di $V^\perp$. Per la condizione di ortogonalità deve essere

$$(u,v_1) = (u,v_2) = 0$$

ovvero

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y-z+3w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=t+3s \\ w=s \end{cases} \qquad \forall s,t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$\begin{aligned} V^\perp &= \{(-1,1,1,0)\cdot t + (0,0,3,1)\cdot s \mid \forall s,t \in \mathbf{R}\} \\ &= \langle\ (-1,1,1,0),\ (0,0,3,1)\ \rangle \end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 10.18.

a) *Partendo dalla base $\{v_1 = (1,0,1),\ v_2 = (2,1,-3),\ v_3 = (-1,1,0)\}$, costruire una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.*
b) *Sia U il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato da v_1 e v_2. Determinare una base del complemento ortogonale di U.*

SOLUZIONE:

a) Sia $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ la base ortonormale che vogliamo ottenere a partire dai tre vettori. Cominciamo a costruire una base ortogonale $\mathcal{B}' = \{w_1,\ w_2,\ w_3\}$.

$w_1 = v_1 = (1,0,1)$

$w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) == (2,1,-3) - \dfrac{-1}{2}\cdot(1,0,1) = \left(\dfrac{5}{2}, 1, -\dfrac{5}{2}\right)$

$\Rightarrow w_2 = (5,2,-5)$

$w_3 = v_3 - pr_{w_1}(v_3) - pr_{w_2}(v_3) = (-1,1,0) - \dfrac{-1}{2}\cdot(1,0,1) - \dfrac{-3}{34}(5,2,-5) = \left(-\dfrac{4}{18}, \dfrac{20}{18}, \dfrac{4}{18}\right)$

$\Rightarrow w_3 = (-1,5,1)$

Ora basta normalizzare i vettori trovati:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ u_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(5,2,-5)}{\sqrt{54}} = \left(\frac{5}{3\sqrt{6}}, \frac{2}{3\sqrt{6}}, -\frac{5}{3\sqrt{6}}\right) \\ u_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{(-1,5,1)}{\sqrt{27}} = \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

La base ortonormale cercata è $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$.

b) Sia $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ e sia $w = (x, y, z) \in U^\perp$. Imponiamo quindi a w l'ortogonalità agli elementi di U, ovvero agli elementi di una base di U:

$$(w, v_1) = 0 \;\Rightarrow\; x + z = 0$$
$$(w, v_2) = 0 \;\Rightarrow\; 2x + y - 3z = 0$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{B}\left(U^\perp\right) = \{(-1, 5, 1)\}.$$

$\square$

Esercizio 10.19. *Siano $v_1 = (2, 1, 1, 0)$ e $v_2 = (-1, 1, 2, 0)$ e sia $V = \langle v_1,\ v_2 \rangle \subset \mathbf{R}^4$.*

a) *Calcolare l'angolo tra v_1 e v_2.*
b) *Trovare una base del complemento ortogonale di V.*

Soluzione:

a) Indichiamo con ϑ l'angolo tra v_1 e v_2. Sappiamo che

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v_1, v_2)}{||v_1|| \cdot ||v_2||} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta = \arccos\left(\frac{1}{6}\right)$$

b) Il complemento ortogonale di V è lo spazio

$$\begin{aligned} V^\perp &= \left\{v = (x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid (v, v_1) = (v, v_2) = 0\right\} \\ &= \left\{v = (x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x + y + z = 0, \quad -x + y + 2z = 0 \ \right\} \end{aligned}$$

Risolviamo il sistema di due equazioni in quattro incognite:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad \underset{2II+I}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = -\frac{5}{3}t \\ z = t \\ w = s \end{cases}$$

Infine una base di $V^\perp$ è

$$\mathcal{B}\left(V^\perp\right) = = \{\ (1, -5, 3, 0),\ (0, 0, 0, 1)\ \}$$

$\square$

Esercizio 10.20. *Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ di base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 2, 0),\ v_2 = (2, 4, -1)\}$.*

a) *Si trovi una base ortonormale di V a partire da $\mathcal{B}$.*
b) *Si trovi una base ortonormale del complemento ortogonale $V^\perp$ di V.*

Soluzione:

a) Costruiamo prima una base $\{w_1,\ w_2\}$ di vettori a due a due ortogonali (non necessariamente di norma 1).

$$w_1 = v_1 = (1, 2, 0)$$
$$w_2 = v_2 - pr_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} \cdot w_1 = (2, 4, -1) - \frac{10}{5}(1, 2, 0) = (0, 0, -1)$$

A questo punto per ottenere la base cercata basta prendere i vettori u_i paralleli a w_i, ma di norma 1:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \qquad u_2 = w_2 = (0, 0, -1)$$

Infine una base ortonormale cercata è

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right),\ (0, 0, -1)\right\}$$

b) Il complemento ortogonale di V è l'insieme dei vettori di $\mathbf{R}^3$ che sono ortogonali ai vettori di V, e quindi ai vettori di una base di V:
$$V^\perp = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y = 0,\ 2x + 4y - z = 0\right\}$$
Risolvendo il sistema otteniamo
$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V^\perp = \langle(-2, 1, 0)\rangle$$
Per trovare una base ortonormale è sufficiente prendere il generatore di norma 1:
$$\mathcal{B}\left(V^\perp\right) = \left\{\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)\right\} = \left\{\left(\frac{-2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)\right\}$$
□

Esercizio 10.21. *Sia $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ la funzione lineare tale che*
$$T(1, -2, 1) = (2, 1),\ T(1, 0, 0) = (-1, 2),\ T(0, 1, 0) = (-1, 0).$$
a) *Che dimensione ha l'immagine di T?*
b) *Si determini una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$) del nucleo di T.*

Soluzione:
Per risolvere l'esercizio possiamo procedere in due modi:
(1) Determinare la matrice $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T)$ associata a T rispetto alla base
$$\mathcal{B} = \{\ (1, -2, 1),\ (1, 0, 0),\ (0, 1, 0)\ \}$$
di $\mathbf{R}^3$ e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^2$, tenendo poi conto che i vettori ottenuti nello spazio di partenza $\mathbf{R}^3$ (in particolare il Nucleo) saranno espressi rispetto alla base $\mathcal{B}$.
(2) Ricavare l'azione di T sugli elementi della base canonica di $\mathbf{R}^3$ e determinare quindi la matrice $B = M(T)$ associata a T rispetto alle basi canoniche.

Consideriamo entrambi i metodi.
(1) Con il primo metodo consideriamo la matrice A associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$ e $\mathcal{C}$ di $\mathbf{R}^2$:
$$A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
a) La dimensione dell'immagine di T corrisponde al rango di A. Poichè A contiene la sottomatrice
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$
di determinante $2 \neq 0$, la matrice A ha rango 2, quindi
$$\dim(Im(T)) = 2$$
b) Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a A
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 2(-2t) - t = -5t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$
Quindi $N(T))$ è generato dal vettore $(-2, 1, -5)_{\mathcal{B}}$, espresso però rispetto alla base $\mathcal{B}$. Rispetto alla base canonica tale vettore corrisponde al vettore
$$-2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 - 5 \cdot v_3 = (-1, -1, -2)$$
Infine
$$N(T) = \langle\ (-1, -1, -2)\ \rangle$$

Poichè il nucleo ha dimensione uno per determinarne una base ortonormale è sufficiente prendere come generatore un vettore di norma 1:

$$\text{Base ortonormale di } N(T) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

(2) Con il secondo metodo ricaviamo invece la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^2$, calcolando le immagini di $e_1,\ e_2,\ e_3$. Poichè conosciamo già $T(e_1) = (-1, 2)$ e $T(e_2) = (-1, 0)$, dobbiamo solo ricavare $T(e_3)$. Sfruttando la linearità di T otteniamo:

$$\begin{aligned} T(0,0,1) &= T(1,-2,1) - T(1,0,0) + 2T(0,1,0) \\ &= (2,1) - (-1,2) + 2(-1,0) = (1,-1) \end{aligned}$$

Quindi la matrice B associata a T rispetto alle basi canoniche è

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \\ II + 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) La dimensione dell'immagine di T corrisponde al rango di B, quindi

$$\dim(Im(T)) = 2$$

b) Per determinare il nucleo di T risolviamo il sistema omogeneo associato a B

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$N(T) = \langle\ (1,1,2)\ \rangle$$

Notiamo che in questo caso il generatore è già espresso rispetto alla base canonica, è quindi sufficiente prendere come generatore un vettore di norma 1:

$$\text{Base ortonormale di } N(T) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}$$

□

Esercizio 10.22. *Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ costituito dai vettori (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Si determini una base ortonormale di W rispetto al prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$.*

Soluzione:

Gli elementi di W sono i vettori di $\mathbf{R}^3$ tali che $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, ovvero

$$\begin{cases} x_1 = 2s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$W = \langle\ (-1,0,1),\ (2,1,0)\ \rangle$$

Per ottenere una base ortonormale di W utilizziamo il metodo di Gram-Schmidt.
Sia $v_1 = (-1, 0, 1)$, calcoliamo il vettore u_1 normalizzando v_1:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Sia ora $v_2 = (2, 1, 0)$. Per calcolare il vettore u_2 cominciamo con il calcolare il vettore w_2 ortogonale a u_1:

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - (v_2, u_1)\, u_1 = (2,1,0) - \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= (2,1,0) + (-1,0,1) = (1,1,1) \end{aligned}$$

Per ottenere il vettore u_2 cercato normalizziamo w_2:

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

La base ortonormale di W cercata è quindi

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$$

□

Esercizio 10.23. *Si considerino i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v_1 = (1, 0, -1, 0), \quad v_2 = (2, 2, -1, t) \quad (t \text{ parametro reale}).$$

a) *Si determini il valore di* t *tale che* v_1 *e* v_2 *formino un angolo di* $45°$.
b) *Posto* $t = 0$ *si determini la proiezione di* v_2 *su* v_1.
c) *Posto* $t = 0$ *e dato* $v_3 = (0, 0, 1, 1)$, *si determini una base ortonormale dello spazio* $V = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$.

Soluzione:

a) Sia ϑ l'angolo formato da v_1 e v_2. Si ha

$$\cos(\vartheta) = \frac{(v_1, v_2)}{||v_1|| \cdot ||v_2||} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9 + t^2}}$$

Poiché $\cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ otteniamo l'equazione

$$\frac{3}{\sqrt{2}\,\sqrt{9+t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{\sqrt{9+t^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 3 = \sqrt{9+t^2} \quad \Rightarrow \quad 9 = 9 + t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

Quindi v_1 e v_2 formano un angolo di $45°$ se $t = 0$.

b) La proiezione di v_2 su v_1 è

$$\mathrm{pr}_{v_1}(v_2) = \frac{(v_1, v_2)}{(v_1, v_1)} \cdot v_1 = \frac{3}{2} \cdot (1, 0, -1, 0) = \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

c) Cerchiamo prima una base ortogonale w_1, w_2, w_3.

$w_1 = v_1 = (1, 0, -1, 0)$

$w_2 = v_2 - \mathrm{pr}_{w_1}(v_2) = (2, 2, -1, 0) - \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow w_2 = (1, 4, 1, 0)$

$w_3 = v_3 - \mathrm{pr}_{w_1}(v_3) - \mathrm{pr}_{w_2}(v_3) = (0, 0, 1, 1) - \frac{-1}{2}\,(1, 0, -1, 0) - \frac{1}{18}\,(1, 4, 1, 0) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 1\right) \Rightarrow$

$w_3 = (4, -2, 4, 9)$

Per trovare una base ortonormale $\{u_1, u_2, u_3\}$ di V si tratta ora di determinare i generatori di norma 1:

$$u_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1, 0, -1, 0)$$
$$u_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \frac{1}{\sqrt{18}}(1, 4, 1, 0) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,(1, 4, 1, 0)$$
$$u_3 = \frac{w_3}{||w_3||} = \frac{1}{\sqrt{117}}\,(4, -2, 4, 9)$$

□