CAPITOLO 12

Rette e piani con le matrici e i determinanti

Esercizio 12.1. *Stabilire se i punti* $A(1,3)$, $B(-2,-1)$ *e* $C(3,1)$ *sono allineati.*

Esercizio 12.2. *Stabilire se i punti* $A(1,2,3)$, $B(-2,1,3)$, $C(3,2,-1)$ *e* $D(4,1,0)$ *sono complanari.*

Esercizio 12.3. *Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per i punti* $A(2,1)$ *e* $B(-2,3)$.

Esercizio 12.4. *Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i punti* $A(1,2,3)$, $B(-2,1,3)$ *e* $C(3,2,-1)$.

Esercizio 12.5. *Stabilire se i punti* $A(1,2,3)$, $B(-1,2,4)$, $C(2,2,1)$ *sono allineati.*

Esercizio 12.6. *Stabilire per quali valori di* k *i punti* $A(1,2,1)$, $B(1,3,4)$ *e* $C(0,1,k)$ *sono allineati.*

Esercizio 12.7. *Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per i punti* $A(3,1,2)$ *e* $B(1,-1,0)$).

Esercizio 12.8. *Si determini la distanza del punto* $P(2,1)$ *dalla retta di equazione* $2x-y+5=0$.

Esercizio 12.9. *Si determini la distanza del punto* $P(3,1,2)$ *dalla retta di equazione parametrica*

$$\begin{cases} x = 6+t \\ y = 2+2t \\ z = -1-3t \end{cases}$$

Esercizio 12.10. *Si determini la distanza del punto* $P(-1,0,2)$ *dal piano di equazione* $x-2y+3z=-9$.

Esercizio 12.11. *Si determini la distanza tra le rette di equazioni*

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1+t \\ z = 4-t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4+t \\ y = t \\ z = -2-t \end{cases}$$

Esercizio 12.12. *Si determini la distanza tra i piani* π_1 *e* π_2 *di equazioni* $\pi: \ x-2y+z=12$ *e* $\pi_2: \ x-2y+z=6$.

Esercizio 12.13. *Si determini la distanza tra le rette di equazioni*

$$r: \begin{cases} x = 1-t \\ y = -1+3t \\ z = -t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$$

Esercizio 12.14. *Nello spazio* $\mathbf{R}^3$ *si considerino i piani*

$$\pi_1 \ : \ 2x+y=1 \qquad e \qquad \pi_2 \ : \ x=2y.$$

a) *Determinare la mutua posizione dei due piani.*
b) *Scrivere equazioni cartesiane della retta parallela a* π_1*, perpendicolare a* π_2 *e passante per l'origine.*

Esercizio 12.15. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* $A_1(3,1)$, $A_2(2,6)$ *e* $A_3(4,4)$.

Esercizio 12.16. *Determinare per quali valori di* k *il triangolo di vertici* $A_1(0,0)$, $A_2(4,2)$ *e* $A_3(1,k)$ *ha area 5.*

Esercizio 12.17. *Calcolare l'area del poligono di vertici* $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$, $A_3(2,1)$, $A_4(1,3)$ *e* $A_5(0,2)$.

Esercizio 12.18. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* $A_1(1,1,1)$, $A_2(1,3,1)$, $A_3(-1,0,0)$.

Esercizio 12.19. *Calcolare il volume del parallelepipedo di lati* $u(1,0,0)$, $v(-3,1,1)$ *e* $w(-2,2,5)$.

Esercizio 12.20. *Siano* $P_1 = (1,-1,0), P_2 = (1,0,-1), P_3 = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, *e* $P_4 = (1,2,1)$ *quattro punti nello spazio.*

a) *Calcolare l'angolo tra i vettori* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *e* $\overrightarrow{P_2P_3}$.
b) *Calcolare il volume del prisma con base il triangolo* $P_1P_2P_3$ *e lato il segmento* P_1P_4.

Esercizio 12.21. *Si considerino le rette* r_1, r_2, r_3 *di equazioni*

$$\begin{aligned} r_1 &: 3x+y-1 = 4x+y-z-1 = 0 \\ r_2 &: 2x-y+z = x-y+2z = 0 \\ r_3 &: x-z = y+z = 0 \end{aligned}$$

a) *Mostrare che le tre rette sono complanari.*
b) *Calcolare l'area del triangolo determinate dalle tre rette.*

Esercizio 12.22. *Si considerino i piani* π_1, π_2, π_3 *di equazioni:*

$$\pi_1:\ 2x-y=1, \qquad \pi_2:\ x+y+z=0, \qquad \pi_3:\ x-2z=1.$$

a) *Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.*
b) *Si trovi il piano* π_4 *passante per l'origine e perpendicolare alla retta* $r = \pi_1 \cap \pi_2$.
c) *Si determini l'area del triangolo di vertici* A, B, C, *con* $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$.

Esercizio 12.23. *Siano* $A = (0,-1,0)$, $B = (-2,0,-3)$, $C = (-1,0,-1)$ *punti dello spazio.*

a) *Calcolare l'area del triangolo di vertici* A, B, C.
b) *Stabilire se il punto* $D = (2,2,2)$ *appartiene al piano contenente* A, B, C.
c) *Eseiste un'isometria che trasforma i punti* A, B, C *nei punti* $O = (0,0,0)$, $P = (1,0,2)$ *e* $Q = (1,1,1)$ *rispettivamente?*

Esercizio 12.24. *Siano* $M = (1,1,1)$, $N = (3,2,1)$, $L = (1,2,2)$ *punti dello spazio* $\mathbf{R}^3$. *Sia* $C = (-1,0,1)$.

a) *Si calcoli l'area del triangolo* MNL.
b) *Si determini l'insieme* $M'N'L'$ *che si ottiene proiettando il triangolo* MNL *dal centro* C *sul piano* $x+y=0$.
c) *Si calcoli l'area del triangolo* $M'N'L'$.

---

1. Suggerimenti

- Tre punti $P_i(x_i, y_i)$ del piano sono **allineati** se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- Quattro punti $P_i(x_i, y_i, z_i)$ dello spazio sono **complanari** se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- **L'equazione cartesiana della retta** passante per due punti (distinti) del piano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ si può calcolare direttamente imponendo

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- **L'equazione cartesiana del piano** passante per tre punti (non allineati) $P_i(x_i, y_i, z_i)$ si può calcolare direttamente imponendo

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

- Tre punti dello spazio $P_i(x_i, y_i, z_i)$ sono **allineati** se e solo se:

$$\text{rg} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \leq 2$$

- **L'equazione cartesiana della retta** passante per due punti (distinti) dello spazio $P_1(x_i, y_i, z_i)$ si può calcolare direttamente imponendo

$$\text{rg} \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

  Questo, per Kronecker, implica che due opportune sottomatrici 3×3 abbiano determinante nullo. Le due equazioni in x, y, z così ottenute costituiscono l'equazione cartesiana della retta.

- Dati due vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ di R^3 chiamiamo **prodotto vettoriale** di u e v il vettore:

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

- L'**Area di un parallelogramma** in $\mathbf{R}^2$, di lati $u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2)$ è:

$$A(\text{parallelogramma}) = |u_1v_2 - u_2v_1| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right|$$

- L'**Area di un parallelogramma** in $\mathbf{R}^3$, di lati $u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3)$ è data dalla lunghezza (norma) $|u \times v|$ del vettore $u \times v$ prodotto vettoriale di u e v:

$$A(\text{parallelogramma}) = |u \times v|$$

- Il **volume del parallelepipedo** di lati $u = (u_1, u_2, u_3),\ v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ è uguale al valore assoluto del prodotto misto $(u,\ v \times w)$:

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = |(u,\ v \times w)| = \left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|$$

---

2. Soluzioni

Esercizio 12.1. *Stabilire se i punti* $A(1,3)$, $B(-2,-1)$ *e* $C(3,1)$ *sono allineati.*

SOLUZIONE:

Sia A la matrice associata ai tre punti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo stabilire se $\det(A) = 0$.

Come osservato nell'Esercizio 5.1, dal momento che ci interessa solo se il determinante è o non è nullo, possiamo effettuare alcuni passi della riduzione prima di calcolarne il determinante. Inoltre poichè l'ultima colonna contiene tutti 1 risulta semplice ottenere gli zeri sull'ultima colonna anzicchè sulla prima.

$$\begin{array}{c} \\ II - I \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo quindi calcolare il determinante della matrice ridotta A':

$$\det(A') = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 6 + 8 = 14 \neq 0$$

Quindi $\det(A) \neq 0$ e i tre punti non sono allineati.

□

Esercizio 12.2. *Stabilire se i punti* $A(1,2,3)$, $B(-2,1,3)$, $C(3,2,-1)$ *e* $D(4,1,0)$ *sono complanari.*

SOLUZIONE:

Come nell'esercizio precedente riduciamo parzialmente a gradini la matrice associata ai quattro punti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II - I \\ III - I \\ IV - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sia A' la matrice così ottenuta. Ne calcoliamo il determinante rispetto alla quarta colonna.

$$\det(A') = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} = -1\left[-3(-4) + 1(-6+12)\right] = -18 \neq 0$$

Quindi $\det(A) \neq 0$ e i quattro punti non sono complanari.

□

Esercizio 12.3. *Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per i punti* $A(2,1)$ *e* $B(-2,3)$.

SOLUZIONE:

Imponiamo che la matrice associata al generico punto della retta $P(x,y)$, ad A e B abbia determinante nullo:

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$= x(1-3) - y(2+2) + 1(6+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x - 4y + 8 = 0$$

Infine la retta AB ha equazione

$$x + 2y - 4 = 0$$

□

Esercizio 12.4. *Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i punti* $A(1,2,3)$, $B(-2,1,3)$ *e* $C(3,2,-1)$.

Soluzione:

Imponiamo che la matrice associata al generico punto del piano $P(x, y, z)$, ad A, B e C abbia determinante nullo:

$$\det(M) = \det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Anche in questo caso conviene forse effettuare qualche passo di riduzione per semplificare i calcoli. Notiamo che non conviene utlizzare la prima riga:

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - II \\ IV - II \end{array} \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = M'$$

Quindi

$$\begin{aligned} &\det(M') = 0 = \det(M) \qquad \Rightarrow \\ &-1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} x & y & z \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = 0 \\ &-(1 \cdot 4 - 2 \cdot 12 + 3 \cdot 2) + (x \cdot 4 - y \cdot 12 + z \cdot 2) = 0 \\ &4x - 12y + 2z + 14 = 0 \end{aligned}$$

Infine il piano ABC ha equazione

$$2x - 6y + z + 7 = 0$$

□

Esercizio 12.5. *Stabilire se i punti $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 2, 4)$, $C(2, 2, 1)$ sono allineati.*

Soluzione:

Calcoliamo il rango della matrice Massociata ai tre punti riducendola a gradini (secondo la prima colonna):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II + I \\ III - 2I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2III + II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi M ha tre pivot, $\text{rg}(M) = 3$ e i tre punti non sono allineati.

□

Esercizio 12.6. *Stabilire per quali valori di k i punti $A(1, 2, 1)$, $B(1, 3, 4)$ e $C(0, 1, k)$ sono allineati.*

Soluzione:

Calcoliamo il rango della matrice Massociata ai tre punti riducendola a gradini (secondo la prima colonna):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow II - I \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III - II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che in ogni caso la matrice M ha tre pivot, quindi ha rango tre e i tre punti non sono mai allineati.

□

Esercizio 12.7. *Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per i punti $A(3, 1, 2)$ e $B(1, -1, 0)$).*

Soluzione:

Sia Mla matrice associata al generico punto $P(x, y, z)$ della retta, ad A e B:

$$M = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che M contiene la sottomatrice 2×2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con determinante non nullo. Affinchè M abbia rango due è quindi necessario che

$$\det \begin{bmatrix} x & z & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} y & z & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Quindi

$$\begin{cases} 2x - 2z - 2 = 0 \\ 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

Semplificando le equazioni si ottiene l'equazione cartesiana della retta AB:

$$\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

□

Esercizio 12.8. *Si determini la distanza del punto $P(2, 1)$ dalla retta di equazione $2x - y + 7 = 0$.*

SOLUZIONE:

Utilizziamo un metodo che non è sicuramente il più breve (anche rispetto ad altri concetti noti dalle superiori), ma che si può generalizzare a situazioni analoghe in $\mathbf{R}^3$ e che non richiede la conoscenza di formule.

Ricaviamo l'equazione parametrica di r:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 7 + 2t \end{cases}$$

Quindi r è parallela al vettore $u = (1, 2)$.

Sia s la retta per P e perpendicolare a r e sia s parallela al vettore $v = (a, b)$. Per la condizione di perpendicolarità u e v devono essere ortogonali, quindi

$$(u, v) = a + 2b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2t \\ b = t \end{cases}$$

La retta s è quindi parallela al vettore $v = (-2, 1)$. Imponendo inoltre il passaggio per P otteniamo

$$s : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

Calcoliamo ora il punto A di intersezione tra r e s:

$$\begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - 4t - 1 - t + 7 = 0 \\ x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Quindi $A = (-2, 3)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(r, P) = d(A, P) = \parallel AP \parallel = \parallel (4, -2) \parallel = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

□

Esercizio 12.9. *Si determini la distanza del punto $P(3, 1, 2)$ dalla retta r di equazione parametrica*

$$r : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

Soluzione:

La retta r è parallela al vettore $u = (1, 2, -3)$.

Sia π il piano perpendicolare a r passante per P. La prima condizione implica che π sia del tipo

$$x + 2y - 3z = k$$

Imponendo il passaggio per P otteniamo $3 + 2 - 6 = k$, ovvero $k = -1$. Infine

$$\pi : \quad x + 2y - 3z = -1$$

Determiniamo ora il punto di intersezione A di r con π:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 + t + 4 + 4t + 3 + 9t = -1 \\ x = 6 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 5 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Quindi $A = (5, 0, 2)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(r, P) = d(A, P) = \| AP \| = \| (2, -1, 0) \| = \sqrt{5}$$

□

Esercizio 12.10. *Si determini la distanza del punto $P(-1, 0, 2)$ dal piano π di equazione $\pi : \ x - 2y + 3z = -9$.*

Soluzione:

Si può applicare la formula: $d(\Pi, P) = \dfrac{| ax_0 + by_0 + cz_0 + d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{14}$.

L'esercizio può essere svolto, in caso di oblio della formula, come è illustrato di seguito. Il piano π è perpendicolare al vettore $u = (1, -2, 3)$.

Sia r la retta perpendicolare a π passante per P:

$$r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Determiniamo ora il punto di intersezione A di r con π:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -9 \\ x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + t + 4t + 6 + 9t = -9 \\ x = -1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = -2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Quindi $A = (-2, 2, -1)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(\pi, P) = d(A, P) = \| AP \| = \| (1, -2, 3) \| = \sqrt{14}$$

Notiamo che l'esercizio poteva anche essere risolto utilizzando la formula della distanza punto-piano.

□

Esercizio 12.11. *Si determini la distanza tra le rette r e s di equazioni*

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

Soluzione:

Notiamo che le due rette sono parallele. Consideriamo un qualsiasi punto della retta r, per esempio $P = (0, 1, 4)$. A questo punto è sufficiente calcolare la distanza di s da P come abbiamo fatto nell'Esercizio 12.2.

Sia π il piano perpendicolare a s passante per P:

$$x + y - z = -3$$

Determiniamo ora il punto di intersezione A di s con π:

$$\begin{cases} x+y-z=-3 \\ x=4+t \\ y=t \\ z=-2-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+t+t+2+t=-3 \\ x=4+t \\ y=t \\ z=-2-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-3 \\ x=1 \\ y=-3 \\ z=1 \end{cases}$$

Quindi $A=(1,-3,1)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(r,s)=d(A,P)=\parallel AP \parallel=\parallel (-1,4,3) \parallel=\sqrt{26}$$

□

Esercizio 12.12. *Si determini la distanza tra i piani π_1 e π_2 di equazioni $\pi_1: \ x-2y+z=12$ e $\pi_2: \ x-2y+z=6$.*

Soluzione:

Notiamo che i due piani sono paralleli. Consideriamo un qualsiasi punto del piano π_1, per esempio $P=(12,0,0)$. A questo punto è sufficiente calcolare la distanza di π_2 da P come abbiamo fatto nell'Esercizio 12.3.

Sia r la retta perpendicolare a π_2 passante per P:

$$r: \begin{cases} x=12+t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$$

Determiniamo ora il punto di intersezione A di r con π_2:

$$\begin{cases} x-2y+z=6 \\ x=12+t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12+t+4t+t=6x=12+t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=11 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$$

Quindi $A=(11,2,-1)$.

Possiamo ora calcolare la distanza cercata:

$$d(\pi,\pi_2)=d(A,P)=\parallel AP \parallel=\parallel (1,-2,1) \parallel=\sqrt{6}$$

□

□

Esercizio 12.13. *Si determini la distanza tra le rette di equazioni*

$$r: \begin{cases} x=1-t \\ y=-1+3t \\ z=-t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$$

Soluzione:

Si verifica facilmente che le due rette sono sghembe, infatti non sono parallele e non si intersecano.

Sia π il piano contenente s e parallelo a r. Questo in particolare implica che π sia parallelo a entrambe le rette, ovvero ai vettori $u=(-1,3,-1)$ e $v=(1,1,-1)$. Inoltre, una volta impostata la condizione che π sia parallelo a s, in particolare conterrà s se ne contiene un suo qualsiasi punto. Scegliamo quindi un qualsiasi punto P di s, per esempio $P=(2,0,1)$. Infine

$$\pi: \begin{cases} x=2-t+s \\ y=3t+s \\ z=1-t-s \end{cases} \Rightarrow x+y+2z-4=0$$

Abbiamo così ottenuto un piano contenente s e parallelo alle due rette. A questo punto la distanza tra le due rette è uguale alla distanza di π da r. Inoltre, essendo r e π paralleli la loro distanza è uguale alla distanza di un qualsiasi punto B di r da π (o viceversa). Sia $B=(1,-1,0)$ il punto scelto su r. Possiamo ora utilizzare la formula della distanza punto-piano:

$$d(r,s)=d(B,\pi)=\frac{|1\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 0-4|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

In alternativa, non utilizzando la formula, per calcolare la distanza tra B e π potevamo calcolare il punto A di intersezione tra la retta l per B perpendicolare a π, e calcolare poi la distanza tra A e B. La retta passante per B e perpendicolare a π è la retta

$$l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

Sia A il punto di intersezione tre l e π:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Infine

$$d(r,s) = d(B,\pi) = d(B,A) = \| AB \| = \| \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) \| = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

□

Esercizio 12.14. *Nello spazio* $\mathbf{R}^3$ *si considerino i piani*

$$\pi_1 \ : \ 2x + y = 1 \qquad e \qquad \pi_2 \ : \ x = 2y.$$

a) *Determinare la mutua posizione dei due piani.*
b) *Scrivere equazioni cartesiane della retta parallela a* π_1*, perpendicolare a* π_2 *e passante per l'origine.*

Soluzione:

a) Il piano π_1 è perpendicolare al vettore $u_1 = (2,1,0)$ mentre il piano π_2 è perpendicolare al vettore $u_2 = (1,-2,0)$. Poichè u_1 e u_2 sono ortogonali, lo sono anche i piani π_1 e π_2.

   In particolare i piani π_1 e π_2 sono incidenti e hanno per intersezione la retta ottenuta risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = t. \end{cases}$$

b) La retta perpendicolare a π_2 e passante per l'origine è la retta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$$

   In effetti tale retta è parallela a π_1. Questo si può verificare in due modi:

   – MODO 1. Cerchiamo l'intersezione tra r e π_1:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t - 2t = 1 \\ x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 \\ x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$$

   Poichè il sistema è impossibile, retta e piano non si intersecano quindi sono paralleli.

   – MODO 2: La retta r è parallela al vettore $v = (1,-2,0)$, mentre il piano π è ortogonale al vettore $u_1 = (2,1,0)$. I due vettori v e u_1 sono ortogonali in quanto

$$(u_1, v) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 0$$

   quindi r è parallela a π_1.

□

Esercizio 12.15. *Calcolare l'area del triangolo di vertici* $A_1(3,1)$, $A_2(2,6)$ *e* $A_3(4,4)$.

Soluzione:

L'area del triangolo di vertici $A_1(3,1)$, $A_2(2,6)$ e $A_3(4,4)$ è metà dell'area del parallelogramma di lati

$$\overrightarrow{A_3A_1} = (1,3), \qquad \overrightarrow{A_2A_1} = (-1,5)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogramma in $\mathbf{R}^2$ otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}\text{Area(triangolo } A_1A_2A_3) &= \frac{1}{2}\left|(1\cdot 5 - (-1\cdot 3))\right| = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4\\ &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4\end{aligned}$$

□

Esercizio 12.16. *Determinare per quali valori di k il triangolo di vertici $A_1(0,0)$, $A_2(4,2)$ e $A_3(1,k)$ ha area 5.*

Soluzione:

L'area del triangolo di vertici A_1, A_2 e A_3 è metà dell'area del parallelogramma di lati

$$\overrightarrow{A_3A_1} = (1,k), \qquad \overrightarrow{A_2A_1} = (4,2)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogramma in $\mathbf{R}^2$ otteniamo quindi

$$Area(\text{triangolo } A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & k\\ 4 & 2\end{bmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(2-4k)\right| = |1-2k|$$

Imponendo la condizione che l'area del triangolo sia 5 otteniamo $1-2k=\pm 5$, quindi $k=-2$ o $k=3$.

Abbiamo quindi ottenuto due possibili soluzioni:

- $k=-2$ ovvero $A_3=(1,-2)$.
- $k=3$ ovvero $A_3=(1,3)$.

□

Esercizio 12.17. *Calcolare l'area del poligono di vertici $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$, $A_3(2,1)$, $A_4(1,3)$ e $A_5(0,2)$.*

Soluzione:

Rappresentando i punti nel piano si vede che l'area del poligono corrisponde alla somma delle aree dei triangoli $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$ e $A_1A_4A_5$. Ora

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (1,0), \qquad \overrightarrow{A_1A_3} = (2,1), \qquad \overrightarrow{A_1A_4} = (1,3), \qquad \overrightarrow{A_1A_5} = (0,2)$$

quindi

$$\begin{aligned}\text{Area(triangolo } A_1A_2A_3) &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\\ \text{Area(triangolo } A_1A_3A_4) &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right| = \frac{5}{2}\\ \text{Area(triangolo } A_1A_4A_5) &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right| = 1\end{aligned}$$

Infine

$$\text{Area(poligono } A_1A_2A_3A_4A_5) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 4$$

□

Esercizio 12.18. *Calcolare l'area del triangolo di vertici $A_1(1,1,1)$, $A_2(1,3,1)$, $A_3(-1,0,0)$.*

Soluzione:

L'area del triangolo di vertici $A_1A_2A_3$ è la metà dell'area del parallelogramma di lati $\overrightarrow{A_1A_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_3}$, dove

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (0,2,0), \qquad \overrightarrow{A_1A_3} = (-2,-1,-1)$$

Ricordando la formula per l'area di un parallelogrammo cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} &= (2 \cdot (-1),\ 0,\ -(-2) \cdot 2) = (-2,\ 0,\ 4)\\ &= \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -2i + 0j + 4k = (-2, 0, 4)\end{aligned}$$

Infine

$$\text{Area(triangolo } A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}|(-2, 0, 4)| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$$

Attenzione a non confondere il valore assoluto di un numero: $|a|$ con la lunghezza di un vettore: $|\overrightarrow{v}|$, entrambi indicati con le sbarre verticali.

□

Esercizio 12.19. *Calcolare il volume del parallelepipedo di lati* $u(1, 0, 0)$, $v(-3, 1, 1)$ *e* $w(-2, 2, 5)$.

SOLUZIONE:
Il volume del parallelepipedo è dato dal prodotto misto dei vettori che formano i lati del parallelepipedo. Cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale di v e w:

$$v \times w = (3,\ 13,\ -4)$$

Quindi

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = |(u, (v \times w))| = |u \cdot v \times w| = |((1, 0, 0),\ (3,\ 13,\ -4))| = |3| = 3$$

Analogamente

$$\text{Volume(parallelepipedo)} = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} \right| = |1 \cdot (5 - 2)| = 3$$

□

Esercizio 12.20. *Siano* $P_1 = (1, -1, 0), P_2 = (1, 0, -1), P_3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, *e* $P_4 = (1, 2, 1)$ *quattro punti nello spazio.*

a) *Calcolare l'angolo tra i vettori* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *e* $\overrightarrow{P_2P_3}$.
b) *Calcolare il volume del prisma con base il triangolo* $P_1P_2P_3$ *e lato il segmento* P_1P_4.

SOLUZIONE:

a) Sia ϑ l'angolo cercato, usiamo la formula

$$\cos(\vartheta) = \frac{(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3})}{|\overrightarrow{P_1P_2}| \cdot |\overrightarrow{P_2P_3}|}$$

Poichè

$$\overrightarrow{P_2P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, -1),$$

si ha

$$(\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_2P_3}) = 0 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

Quindi $\cos(\vartheta) = 0$ e $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Il volume del prisma é metà del volume del parallelepipedo di lati $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ e $\overrightarrow{P_1P_4}$. Poichè

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = (0, 3, 1)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} V &= \left|\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \left(\overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left|\left((0, 1, -1), \left(4 + \frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}}\right)\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{8}{\sqrt{3}}\right| = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Analogamente

$$V = \left|\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{8}{\sqrt{3}}\right| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

□

Esercizio 12.21. *Si considerino le rette* r_1, r_2, r_3 *di equazioni*

$$\begin{aligned} r_1 &: 3x + y - 1 = 4x + y - z - 1 = 0 \\ r_2 &: 2x - y + z = x - y + 2z = 0 \\ r_3 &: x - z = y + z = 0 \end{aligned}$$

a) *Mostrare che le tre rette sono complanari.*
b) *Calcolare l'area del triangolo determinate dalle tre rette.*

Soluzione:

a) Tenendo anche conto del punto b) dell'esercizio per verificare che le tre rette sono complanari determiniamo i loro punti di intersezione a due a due.

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$$

$$r_1 \cap r_3 : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x + y - z = 1 \\ x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$r_2 \cap r_3 : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0, 0, 0)$$

Il piano passante per A, B e C contiene le tre rette che sono quindi complanari.

b) Calcoliamo i due vettori che formano due lati del triangolo: $\overrightarrow{CA} = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ e $\overrightarrow{CB} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, quindi

$$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}i - \frac{1}{3}k$$

Infine

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

□

Esercizio 12.22. *Si considerino i piani* $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3$ *di equazioni:*

$$\pi_1 :\ 2x - y = 1, \qquad \pi_2 :\ x + y + z = 0, \qquad \pi_3 :\ x - 2z = 1.$$

a) *Si determini l'insieme intersezione dei tre piani.*
b) *Si trovi il piano* π_4 *passante per l'origine e perpendicolare alla retta* $r = \pi_1 \cap \pi_2$.
c) *Si determini l'area del triangolo di vertici* A, B, C, *con* $A = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, $B = \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4$, $C = \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4$.

Soluzione:

a) Riduciamo a gradini il sistema associato ai tre piani

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II-I \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \\ 0 & -1 & -3 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3III+II \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & -7 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-y=1 \\ 3y+2z=-1 \\ -7z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{7} \\ y=-\frac{1}{7} \\ z=-\frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = A = \left(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right).$$

b) Calcoliamo la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 3y+2z=-1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3} \\ y=-\frac{2}{3}t-\frac{1}{3} \\ z=t \end{cases}$$

La retta ha direzione $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$ cioè $(1,2,-3)$, quindi un piano ortogonale a r ha equazione del tipo $x+2y-3z=d$. Imponendo il pasaggio per l'origine otteniamo $d=0$. Infine il piano cercato è

$$\pi_4 : \ x+2y-3z=0$$

c) Abbiamo già trovato A nel punto a). Analogamente mettiamo a sistema π_1, π_3 e π_4:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{7} \\ y=-\frac{5}{7} \\ z=-\frac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad \pi_1 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = B = \left(\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, -\frac{3}{7}\right).$$

Mettendo a sistema π_2, π_3 e π_4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{7} \\ y=-\frac{4}{7} \\ z=-\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad \pi_2 \cap \pi_3 \cap \pi_4 = C = \left(\frac{5}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right).$$

Di conseguenza

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right), \qquad \overrightarrow{BC} = \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}\right). \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = -i+2k$$

Infine

$$\text{Area}(ABC) = \frac{1}{2}|\,(-1,\ 0,\ 2)\,| = \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$\square$

Esercizio 12.23. *Siano* $A=(0,-1,0)$, $B=(-2,0,-3)$, $C=(-1,0,-1)$ *punti dello spazio.*

a) *Calcolare l'area del triangolo di vertici* A, B, C.
b) *Stabilire se il punto* $D=(2,2,2)$ *appartiene al piano contenente* A, B, C.
c) *Eseiste un'isometria che trasforma i punti* A, B, C *nei punti* $O=(0,0,0)$, $P=(1,0,2)$ *e* $Q=(1,1,1)$ *rispettivamente?*

Soluzione:

a) L'area del parallelogramma di lati AB e AC è data dalla lunghezza del vettore $AB \times AC$. Poiché $AB=(-2,1,-3)$ e $AC=(-1,1,-1)$, otteniamo

$$AB \times AC = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2i+j-k = (2,1,-1) \quad \Rightarrow \quad |AB \times AC| = \sqrt{6}.$$

Infine l'area del triangolo è metà dell'area del parallelogramma:

$$Area(ABC) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

b) Un modo consiste nel determinare il piano passante per i tre punti $A,\ B,\ C$ il quale ha equazione
$$\pi: \begin{cases} x = -2t - s \\ y = -1 + t + s \\ z = -3t - s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x + y - z = -1$$
Il punto D non soddisfa l'equazione di π: $4 + 2 - 2 \neq -1$, quindi D non appartiene al piano contenente A, B, C.

c) Un'isometria conserva le distanze, quindi in particolare deve essere $|AB| = |OP|$. Nel nostro caso
$$|AB| = \sqrt{14} \neq |OP| = \sqrt{5}$$
quindi non può esistere un'isometria che trasforma i punti A e B nei punti O e P.

□

Esercizio 12.24. *Siano* $M = (1,1,1)$, $N = (3,2,1)$, $L = (1,2,2)$ *punti dello spazio* $\mathbf{R}^3$. *Sia* $C = (-1,0,1)$.

a) *Si calcoli l'area del triangolo* MNL.
b) *Si determini l'insieme* $M'N'L'$ *che si ottiene proiettando il triangolo* MNL *dal centro* C *sul piano* $x + y = 0$.
c) *Si calcoli l'area del triangolo* $M'N'L'$.

Soluzione:

a) L'area del triangolo di vertici MNL è la metà dell'area del parallelogramma di lati $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{LN}$, dove
$$u = \overrightarrow{MN} = (2,1,0), \qquad v = \overrightarrow{LN} = (2,0,-1)$$
Ricordando la formula per l'area di un parallelogrammo cominciamo a calcolare il vettore prodotto vettoriale:
$$u \times v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -i + 2j - 2k = (-1, 2, -2)$$
Infine
$$\text{Area(triangolo } MNL) = \frac{1}{2}|u \times v| = \frac{1}{2}|(-1,2,-2)| = \frac{3}{2}$$
In alternativa si poteva calcolare l'altezza del triangolo di base LN sfruttando la proiezione del vettore $u = \overrightarrow{MN}$ su $v = \overrightarrow{LN}$:
$$pr_v(u) = \frac{(u,v)}{(v,v)} v = \frac{4}{5}(2,0,-1)$$
Il vettore $u - pr_v(u) = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)$ è ortogonale a v e corrisponde all'altezza del triangolo di base v. Quindi
$$\text{Area(triangolo } MNL) = \frac{1}{2} \cdot |(2,0,-1)| \cdot |\left(\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2}$$

b) Il vettore delle coordinate omogenee del piano è $P = (1,1,0,0)$ e il punto C ha coordinate omogenee $C = (-1,0,1,1)$. La matrice di proiezione è quindi
$$A = P^T C - (P \cdot C) I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Quindi
$$M \cdot A = (-1,1,3,3) \quad \Rightarrow \quad M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$
$$N \cdot A = (-2,2,6,6) \quad \Rightarrow \quad N' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$
$$L \cdot A = (-2,2,5,4) \quad \Rightarrow \quad L' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4},\right)$$
Quindi il triangolo viene proiettato nel segmento $M'L'$.

In alternativa si potevano calcolare le proiezioni senza utilizzare la matrice A. Per esempio per calcolare M' si poteva calcolare la retta

$$CM: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Il punto M' è dato dall'intersezione tra la retta CM e il piano $x + y = 0$:

$$M': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \\ 1 + 2t + 1 + t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

Analogamente si potevano ottenere gli altri punti.

c) Il triangolo $M'N'L'$ è degenere, quindi ha area nulla.

$\square$