CAPITOLO 13

Coniche

Esercizio 13.1. *Stabilire il tipo di conica corrispondente alle seguenti equazioni. Se si tratta di una conica a centro determinare inoltre le coordinate del centro della conica.*

a) $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$

b) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$

c) $x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$

d) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$

e) $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 1 = 0$

f) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

g) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

h) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$

i) $x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0$

l) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

m) $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

Esercizio 13.2. *Ridurre in forma canonica le coniche* f), g) *dell'esercizio precedente e le coniche*

n) $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$

p) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$

Esercizio 13.3. *Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri $f(x, y) = 0$:*

(1) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$

(2) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$

(3) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

(4) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

(5) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Per ognuna di esse:

a) *Determinare la matrice A della forma quadratica associata alla conica.*
b) *Determinare la matrice di rotazione R (ortogonale speciale) tale che $R^TAR = D$, con D matrice diagonale.*
c) *Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.*
d) *Se si tratta di una conica a centro (ellisse o iperbole), determinarne il centro e gli assi.*

Esercizio 13.4. *Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri $f(x, y) = 0$:*

(1) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$

(2) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$

(3) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

(4) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

(5) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Per ognuna di esse:

a) *Determinare la matrice A della forma quadratica asociata alla conica.*
b) *Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.*
c) *Se si tratta di una conica a centro (ellisse o iperbole), determinarne il centro e gli assi. Se si tratta di una parabola, determinarne il vertice e l'asse.*

Esercizio 13.5. *Riconoscere che le seguenti coniche $f(x, y) = 0$ sono degeneri e determinare le equazioni delle rette che le formano. Se si tratta di una conica a centro determinarne il centro.*

(1) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$

(2) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$

(3) $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

Esercizio 13.6. *Ridurre in forma canonica le seguenti coniche:*

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Esercizio 13.7. *Ridurre in forma canonica le seguenti coniche e determinare il cambiamento di coordinate necessario per passare da una forma all'altra:*

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Esercizio 13.8. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C} \ : \ 2xy - x - 3y = k$$

a) *Stabilire per quali valori di k la conica $\mathcal{C}$ è degenere.*
b) *Posto $k = 0$, stabilire di quale tipo di conica si tratti.*
c) *Trovare gli assi (o l'asse) di simmetria di $\mathcal{C}$.*

Esercizio 13.9. *Sia k un parametro reale. Si consideri la famiglia di coniche $\mathcal{C}_k$ di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ : \ 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x = 1.$$

a) *Esistono coniche degeneri nella famiglia?*
b) *Si classifichi la conica $\mathcal{C}_k$ al variare di k.*
c) *Si determinino le coordinate dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ (quando esistono).*

Esercizio 13.10. *Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ : \quad x^2 + (k-2)xy + y^2 - 4 = 0 \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.*
b) *Trovare le coniche degeneri della famiglia.*
c) *Mostrare che ci sono due rette che sono assi di simmetria di ogni conica della famiglia.*

Esercizio 13.11. *Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ : \quad x^2 + kxy + y^2 - 4 = 0 \quad (k \text{ parametro reale})$$

a) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.*
b) *Trovare le coniche degeneri della famiglia.*
c) *Mostrare che tutte le ellissi appartenenti alla famiglia sono reali.*

Esercizio 13.12. *Fissato il parametro reale t, sia $\mathcal{C}_t$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_t \ : \ (2t-1)x^2 + 6txy + ty^2 + 2x = 0$$

a) *Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.*
b) *Determinare il tipo di conica al variare del parametro t.*
c) *Scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_t$ per $t = \frac{1}{3}$.*

Esercizio 13.13. *Fissato il parametro reale t, sia $\mathcal{C}_t$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_t \ : \ tx^2 + 2xy + (t+2)y^2 - 2y = 0$$

a) *Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.*
b) *Determinare il tipo di conica al variare del parametro t.*
c) *Scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_t$ per $t = -1$.*

Esercizio 13.14. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare autovalori e autovettori di A.*
b) *Calcolare una matrice diagonalizzante di A, che sia ortogonale e rappresenti una rotazione dello spazio attorno all'origine.*
c) *Scrivere la forma canonica della conica $\mathcal{C}$ con matrice associata A*

Esercizio 13.15. *Si consideri la conica di equazione*

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

a) *Si determini il tipo di conica.*
b) *Si trovi l'eventuale centro della conica.*
c) *Si trovino gli assi di simmetria e la forma canonica della conica.*

Esercizio 13.16. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C} : \ 3x^2 + 14xy - 5y^2 - 10x + 14y = 0$$

a) *Stabilire il tipo di conica.*
b) *Nel caso sia una conica a centro, trovare le coordinate del centro.*
c) *Trovare equazioni degli eventuali asintoti della conica.*

Esercizio 13.17. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0.$$

a) *Si determini il tipo di conica.*
b) *Si trovi la forma canonica della conica.*
c) *Si trovino gli eventuali assi di simmetria della conica.*

Esercizio 13.18. *Sia* **C** *la conica di equazione*

$$\mathbf{C} \ : \ 6x^2 + 4xy + 9y^2 - 5x + 10y = 0.$$

a) *Stabilire il tipo di conica e la forma canonica di* **C**.
b) *Trovare equazioni degli assi di simmetria di* **C**.

---

1. Suggerimenti

Equazione

A ogni conica $f(x,y) = 0$, possiamo associare due matrici quadrate simmetriche: la matrice $A \in M_{2\times 2}$ relativa alla forma quadratica associata alla conica, e la matrice $A' \in M_{3\times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} \text{coeff. di } x^2 & 1/2 \text{ coeff. di } xy \\ 1/2 \text{ coeff. di } xy & \text{coeff. di } y^2 \end{bmatrix},$$

$$A' = \begin{bmatrix} A & h \\ h^T & k \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix}, \quad k = \text{termine noto dell'equazione}$$

Di conseguenza l'equazione della conica è

$$f(x,y) = [x,y,1] \cdot A' \cdot [x,y,1]^T = [x,y] \cdot A \cdot [x,y]^T + 2\left(h^T \cdot [x,y]^T\right) + k = 0$$

Possiamo inoltre definire gli **invarianti ortogonali** dell'equazione della conica.

- **Invariante cubico**: $I_3 = \det(A')$,
- **Invariante quadratico**: $I_2 = \det(A)$,
- **Invariante lineare**: $I_1 =$ traccia di $A =$ somma degli elementi della diagonale di $A =$ somma degli autovalori di A.

Classificazione.

- Una conica è **non degenere** se $I_3 = \det(A') \neq 0$. Inoltre è:
  - **Ellisse**: se gli autovalori sono concordi, ovvero se $I_2 = \det(A) > 0$.
  - **Iperbole**: se gli autovalori sono discordi, ovvero se $I_2 = \det(A) < 0$.
  - **Parabola**: se ha un autovalore nullo, ovvero se $I_2 = \det(A) = 0$.
- Una conica è **degenere** se $I_3 = \det(A') = 0$. Inoltre:
  - Se $\text{rg}(A') = 2$ è **semplicemente degenere**, ovvero si tratta di una coppia di rette distinte (reali o immaginarie).
  - Se $\text{rg}(A') = 1$ è **doppiamente degenere**, ovvero si tratta di una coppia di rette coincidenti.

Centro e assi o vertice e asse.

- **Centro**
  - Iperbole e ellisse sono coniche a centro. Il centro si determina risolvendo il sistema:
  $$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$
  - Se la conica è degenere e si tratta di una coppia di rette incidenti, si tratta di una conica a centro. Il centro è il punto di intersezione delle due rette e può anche essere determinato come per le coniche a centro non degeneri.
- **Assi**
  - Gli assi di iperbole e ellisse sono le rette passanti per il centro, aventi direzioni parallele agli autovettori di A.
  - L'asse della parabola è una retta di direzione parallela all'autovettore relativo all'autovalore nullo passante per il vertice. Il **vertice** è dato dall'intersezione dell'asse con la parabola. Non avendo in generale il vertice, per determinare l'asse si può:
    - Determinare la direzione dell'asse.
    - Determinare la generica equazione di una retta r perpendicolare all'asse.
    - Determinare i punti di intersezione D e E di r con la parabola.
    - Determinare il punto medio M del segmento DE.
    - L'asse è la retta per M di direzione parallela all'autovettore relativo all'autovalore nullo.
    - Una volta nota l'equazione dell'asse si può ricavare il vertice.
  - In alternativa assi, centro e vertice si possono ricavare dalla forma canonica se si è a conoscenza delle trasformazioni che permettono di passare dall'equazione alla forma canonica e viceversa.

Rotazione.

La matrice A è simmetrica, quindi esiste una matrice R ortogonale speciale detta matrice di **rotazione** tale che

$$R^T A R = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{dove } \lambda_i \text{ sono autovalori di } A$$

La matrice R si ottiene dagli autovettori di A (normalizzati e con i segni in modo che il determinante sia 1).

Forma canonica con equazioni della trasformazione.

Per ottenere la forma canonica di una conica non degenere, ovvero una delle forme:

- $ax^2 + by^2 - 1 = 0$, ellisse reale,
- $ax^2 + by^2 + 1 = 0$, ellisse immaginaria,
- $ax^2 - by^2 - 1 = 0$, iperbole,
- $x^2 - 2py = 0$, parabola,

con $a, b > 0$, dobbiamo eseguire due trasformazioni:

(1) **Rotazione**. Lo scopo è ruotare la conica in modo che gli assi (o l'asse) siano paralleli agli assi cartesiani. Dal punto di vista dell'equazione questo implica la mancanza del termine xy.

(2) **Traslazione**. Lo scopo è traslare la conica in modo che il centro (nel caso di ellisse o iperbole) o il vertice (nel caso della parabola), coincida con l'origine degli assi cartesiani. Dal punto di vista dell'equazione questo implica la mancanza dei termini x e y.

Vediamo come procedere.

(1) **Rotazione**.
   i) Si determinano gli autovalori e autovettori di A, in modo da ottenere la matrice R ortonormale speciale tale che $R^T AR = D$, matrice diagonale. Questo corrisponde a effettuare il cambiamento di base:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
   ii) Si sostituiscono al posto di x e y le nuove coordinate X e Y ottenendo così una equazione priva del termine XY. Notiamo che la forma quadratica associata alla conica nelle nuove coordinate sarà del tipo:
$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2$$
   dove λ_i sono gli autovalori di A. E' quindi opportuno prendere gli autovalori nell'ordine desiderato (e non è necesario sostituire X e Y nella parte quadratica perché sappiamo già il risultato che otterremo).

(2) **Traslazione** Possiamo distinguere due casi.
   - **Coniche a centro**. Si può procedere in due modi:
     i) Completamento dei quadrati, che indicano la traslazione da effettuare.
     ii) Ricerca del centro della conica (eventualmente modificato secondo il cambiamento di coordinate della rotazione), che indica la traslazione da effettuare.
   - **Parabole**.
     i) Completamento del quadrato e contemporaneamente eliminazione del termine noto, che indicano la traslazione da effettuare.
     ii) Ricerca del vertice della parabola (eventualmente modificato secondo il cambiamento di coordinate della rotazione), che indica la traslazione da effettuare. Poiché la ricerca del vertice della parabola è piuttosto laboriosa, in genere conviene utilizzare il primo metodo.

Forma canonica versione semplice.

Per ottenere la forma canonica di una conica non degenere senza cercare però l'equazioni della trasformazione che permette di passare dall'equazione originale alla forma canonica e viceversa, possiamo procedere nel seguente modo:

- Calcoliamo $I_3 = \det(A')$ per verificare che la conica non sia degenere.
- Calcoliamo gli autovalori $\lambda_1,\ \lambda_2$ di A e stabiliamo di quale conica si tratta.
- Se si tratta di un'**ellisse** o un'**iperbole** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $ax^2 \pm by^2 \pm 1 = 0$, passando attraverso una equazione del tipo
$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ autovalori di } A$$
  Poiché I_3 è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per t o $-t$ si ottiene la forma canonica.

- Se si tratta di una **parabola** sappiamo che dobbiamo arrivare a una equazione del tipo $x^2 - 2py = 0$, passando attraverso una equazione del tipo

$$\lambda x^2 + 2ty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \lambda \text{ autovalore non nullo di } A$$

  Poiché I_3 è un invariante, imponendo la condizione $\det(A') = \det(B)$ possiamo ricavare il valore di t. Dividendo infine per λ si ottiene la forma canonica.

Equazioni della trasformazione. Passando da un'equazione $f(x, y) =$ alla corrispondente forma canonica $f(X, Y) = 0$ abbiamo effettuato un cambiamento di base corrispondente a una rotazione R (definita dagli autovettori di A) e una traslazione definita dal centro $C(x_0, y_0)$ o dal vertice $V(x_0, y_0)$ della conica. Il cambio di coordinate è dato da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

dove R è la matrice di rotazione, ovvero la matrice diagonalizzante ortogonale speciale associata a A.

Coniche degeneri.

Per determinare le equazioni delle rette che formano che le coniche degeneri si deve risolvere una equazione di secondo grado in cui si considera la x come variabile e la y come parametro, o viceversa.

- Se la conica è semplicemente degenere ($\text{rg}(A') = 2$) si ottengono due rette distinte.
- Se la conica è doppiamente degenere ($\text{rg}(A') = 1$) si ottiene una sola retta.
- Se la conica è a centro ($\det(A) \neq 0$, quindi $\text{rg}(A') = 2$) si ottengono due rette incidenti nel centro.
- Se è una parabola degenere ($\det(A) = 0$, ma $\text{rg}(A') = 2$) si ottengono due rette parallele.

---

2. Soluzioni

Esercizio 13.1. *Stabilire il tipo di conica corrispondente alla seguente equazione. Se si tratta di una conica a centro determinare inoltre le coordinate del centro della conica.*

a) $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$

b) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$

c) $x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$

d) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$

e) $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 1 = 0$

f) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

g) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

h) $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$

i) $x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0$

l) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

m) $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$

Soluzione:

a) Consideriamo l'equazione $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$. La matrice A' associata a tale equazione è

$$A' = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

per cui l'equazione della conica risulta

$$[x, y, 1] \cdot A' \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Analogamente la matrice associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

per cui l'equazione della conica risulta

$$[x, y] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2h^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + k = 0$$

con

$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad k = -10$$

Per stabilire se si tratta di una conica degenere o nondegenere determiniamo il rango di A' comiciando a calcolare il determinante di A':

$$I_3 = \det(A') = -540 + 40 = -500 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{rg}(A') = 3$$

Quindi si tratta di una conica *non degenere.*

Per stabilire se si tratta di un'ellisse, di una parabola o di una iperbole calcoliamo il determinante di A:

$$I_2 = \det(A) = 54 - 4 = 50 > 0$$

Quindi si tratta di un'*ellisse.*

Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \;\Rightarrow\; A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & | & 0 \\ 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2II \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 9 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 9I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -25 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow\; C = (0, 0)$$

Potevamo notare che il centro della conica è $(0, 0)$ osservando che nell'equazione mancano i termini x e y.

b) Consideriamo l'equazione $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$ e le matrici A' e A associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

L'equazione della conica risulta

$$[x, y, 1] \cdot A' \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

ovvero

$$[x, y] \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2h^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + k = 0$$

con

$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad k = \frac{1}{2}$$

Inoltre

$$I_3 = \det(A') = \frac{1}{4} - 3 + \frac{1}{2} = -\frac{9}{4} \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{non degenere}$$
$$I_2 = \det(A) = 1 - 9 = -8 < 0 \ \Rightarrow \ \textit{iperbole.}$$

Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \ \Rightarrow \ A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 1 & | & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 6 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 6I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & -16 & | & 5 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{16} \\ y = -\dfrac{5}{16} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{1}{16}, -\frac{5}{16}\right)$$

c) Consideriamo l'equazione $x^2 + 6xy - 2y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$ e le matrici A e A' associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad k = 2$$

Si ha

$$I_3 = \det(A') = -8 - 24 - 4 = -36 \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{non degenere.}$$
$$I_2 = \det(A) = -2 - 9 = -11 < 0 \ \Rightarrow \ \textit{iperbole.}$$

Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \ \Rightarrow \ A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & -2 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 3I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & -11 & | & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{11} \\ y = -\dfrac{5}{11} \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{4}{11}, -\frac{5}{11}\right)$$

d) Consideriamo l'equazione $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 0$ e le matrici A' e A associate

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \qquad k = 0$$

Poichè A' ha due righe uguali si ha $I_3 = \det(A') = 0$ e $\text{rg}(A') < 3$. Inoltre A' ha una sottomatrice 2×2 di determinante non nullo, per esempio:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{9}{4} \neq 0 \ \Rightarrow$$
$$\text{rg}(A') = 2 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{semplicemente degenere.}$$

Si tratta quindi di due rette distinte.

Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come una equazione di secondo grado nell'incognita x e considerare la y come parametro:

$$x^2 + (2y+3)x + (y^2+3y) = 0$$

Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2y-3 \pm \sqrt{(2y+3)^2 - 4(y^2+3y)}}{2} = \frac{-2y-3\pm\sqrt{9}}{2} \\ &= \frac{-2y-3\pm 3}{2} \\ \Rightarrow \quad & x = -y \qquad \text{oppure} \qquad x = -y-3 \end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette reali parallele:

$$\begin{aligned} r_1 &: \ x+y=0 \\ r_2 &: \ x+y+3=0 \end{aligned}$$

e) Consideriamo l'equazione $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad k = 1$$

Si ha

$$\begin{aligned} & I_3 = \det(A') = 5 \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{rg}(A') = 3 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{non degenere.} \\ & I_2 = \det(A) = 5 > 0 \ \Rightarrow \ \textit{ellisse.} \end{aligned}$$

Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{matrix} \\ 2II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ C = (0,0)$$

f) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 38$$

Si ha

$$\begin{aligned} & I_3 = \det(A') = -32 \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{non degenere.} \\ & I_2 = \det(A) = 25 - 9 = 16 > 0 \ \Rightarrow \ \textit{ellisse.} \end{aligned}$$

Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \ \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -3 & | & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 5II + 3I \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 16 & | & -24\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \ C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \ -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

g) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$ e le matrici associate

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \qquad k = 7$$

Si ha

$$I_3 = \det(A') = 25 \cdot (-49 - 24^2) \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{conica } \textit{non degenere.}$$
$$I_2 = \det(A) = -175 < 0 \;\Rightarrow\; \textit{iperbole.}$$

Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -24 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow C = \left(0, \; \frac{24}{7}\right)$$

h) Consideriamo l'equazione $x^2 + 9y^2 - 6xy + 2x - 6y + 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Notiamo che senza eseguire calcoli possiamo dedurre che $I_3 = \det(A') = 0$ in quanto A' ha due righe uguali. Inoltre riducendo la matrice a gradini otteniamo:

$$\begin{array}{c} \\ II + 3I \\ III - I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $\mathrm{rg}(A') = 1$ e si tratta di una conica *doppiamente degenere*, ovvero di due rette coincidenti.

Per determinare esplicitamente l'equazione della retta risolviamo l'equazione di secondo grado nell'incognita x con parametro y (o viceversa):

$$x^2 - 2(3y - 1) + (9y^2 - 6y + 1) = 0 \;\Rightarrow$$
$$x_{1,2} = (3y - 1) \pm \sqrt{(3y - 1)^2 - (9y^2 - 6y + 1)} = 3y - 1$$

Quindi si tratta della retta $x - 3y + 1 = 0$.

i) Consideriamo l'equazione $x^2 + 2xy + x + 2y - 2 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad k = -2$$

Si ha

$$I_3 = \det(A') = -1 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{conica } \textit{non degenere.}$$
$$I_2 = \det(A) = -1 < 0 \;\Rightarrow\; \textit{iperbole.}$$

Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-1, \; \frac{1}{2}\right)$$

l) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 1$$

Si ha

$$I_3 = \det(A') = -36 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{conica } \textit{non degenere.}$$
$$I_2 = \det(A) = 0 \;\Rightarrow\; \textit{parabola.}$$

m) Consideriamo l'equazione $x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$ e le matrici associate:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

Si ha

$$I_3 = \det(A') = 0 \;\Rightarrow\; \text{conica } \textit{degenere.}$$

Inoltre A' ha una sottomatrice 2×2 di determinante non nullo, per esempio:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} = -2 - \frac{1}{4} \neq 0 \;\Rightarrow$$
$$\text{rg}(A') = 2 \;\Rightarrow\; \text{conica } \textit{semplicemente degenere.}$$

Si tratta quindi di due rette distinte.

Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come una equazione di secondo grado nell'incognita x e considerare la y come parametro (o viceversa):

$$x^2 + xy + (-2y^2 + 3y - 1) = 0$$

Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4(-2y^2 + 3y - 1)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{9y^2 - 12y + 4}}{2} \\ &= \frac{-y \pm (3y - 2)}{2} \\ &\Rightarrow \quad x = y - 1 \qquad \text{oppure} \qquad x = -2y + 1 \end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette reali incidenti:

$$r_1 : \; x - y + 1 = 0$$
$$r_2 : \; x + 2y - 1 = 0$$

Notiamo che le due rette si intersecano nel punto $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ che corrisponde al centro della conica. Il punto C lo possiamo quindi anche ricavare, come nei casi precedenti, risolvendo il sistema $A \cdot [x\ y]^T = -h$.

□

Esercizio 13.2. *Ridurre in forma canonica le coniche* f), g), l) *dell'esercizio precedente e le coniche*

n) $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$

p) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$

Soluzione:

f) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$. Sappiamo già che si tratta di un'ellisse di centro $C\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$. Sappiamo inoltre che gli autospazi della matrice A sono:

$$E(8) = \langle(-1,1)\rangle$$
$$E(2) = \langle(1,1)\rangle$$

Per determinare la forma canonica dobbiamo effettuare due trasformazioni:
- **Rotazione**
- **Traslazione**

- **Rotazione.** Per determinare una matrice di cambiamento di base ortonormale e speciale, corrispondente a una rotazione, dobbiamo determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori, imponendo inoltre che la matrice P di cambiamento di base abbia determinante $+1$.
  Notiamo che i due autovettori sono ortogonali (anche per il teorema spettrale). E' quindi sufficiente normalizzarli e eventualmente cambiarli di segno in modo che P abbia determinante $+1$:

  $$E(8) = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle \qquad E(2) = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle$$

  La matrice P di cambiamento di base è quindi la matrice ortogonale

  $$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

  Se indichiamo con (x', y') le nuove coordinate abbiamo che

  $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P^T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x-y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x+y) \end{cases}$$

  $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x'+y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x'+y') \end{cases}$$

  In questo momento ci serve il secondo cambio di coordinate. Sostituendo infatti le coordinate (x, y) nell'equazione otteniamo:

  $$\frac{5}{2}(x'+y')^2 + \frac{5}{2}(-x'+y')^2 - 6 \cdot \frac{1}{2}(x'+y')(-x'+y') + \\ + 16(x'+y') + 38 = 0$$
  $$8(x')^2 + 2(y')^2 + 16x' + 16y' + 38 = 0$$

  Abbiamo così effettuato la rotazione.
- **Traslazione** Si tratta ora di effettuare la traslazione. Possiamo procedere in due modi.
  MODO 1: completamento del quadrato.

  $$8\left((x')^2 + 2x'\right) + 2\left((y')^2 + 8y'\right) + 38 = 0$$
  $$8\left((x')^2 + 2x' + 1\right) - 8 \cdot 1 + 2\left((y')^2 + 8y' + 4^2\right) - 2 \cdot 4^2 + 38 = 0$$
  $$8\left(x'+1\right)^2 + 2\left(y'+4\right)^2 - 2 = 0$$

  Sostituiamo ora le nuove incognite

  $$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' + 4 \end{cases}$$

  ottenendo l'equazione

  $$8X^2 + 2Y^2 = 2 \ \Rightarrow \ 4X^2 + Y^2 = 1$$

Notiamo che il cambiamento di base da (x, y) a (X, Y) è

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x - y) + 1 \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + y) + 4 \end{cases}$$

MODO 2: utilizziamo il centro. Sappiamo che il centro ha coordinate

$$C : \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate (x', y') il centro ha coordinate:

$$C : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(-\dfrac{5}{2}\sqrt{2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{2} \right) = -1 \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(-\dfrac{5}{2}\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}\sqrt{2} \right) = -4 \end{cases}$$

Quindi le coordinate rispetto alle quali il centro si trova nell'origine degli assi sono

$$\begin{cases} X = x' + 1 \\ Y = y' + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = X - 1 \\ y' = Y - 4 \end{cases}$$

Sostituendo tali valori nell'equazione

$$8(x')^2 + 2(y')^2 + 16x' + 16y' + 38 = 0$$

otteniamo, ovviamente come nel caso precedente, l'equazione canonica

$$4X^2 + Y^2 = 1$$

g) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$. Sappiamo già che si tratta di una iperbole di centro $C\left(0, \dfrac{24}{7}\right)$. Inoltre gli autospazi di A sono

$$E(25) = \langle (1, 0) \rangle$$
$$E(-7) = \langle (0, 1) \rangle$$

– **Rotazione** Notiamo che la matrice A è già diagonale, quindi non dobbiamo effettuare questa operazione. In effetti la matrice P di cambiamento di base sarebbe la matrice identica.
– **Traslazione**
  Si tratta ora di effettuare la traslazione. Possiamo procedere in due modi.
  MODO 1: completamento del quadrato.

$$25x^2 - 7\left(y^2 - \frac{48}{7}y\right) + 7 = 0$$
$$25x^2 - 7\left[y^2 - \frac{48}{7}y + \left(\frac{24}{7}\right)^2\right] + 7 \cdot \left(\frac{24}{7}\right)^2 + 7 = 0$$
$$25x^2 - 7\left(y - \frac{24}{7}\right)^2 + \frac{625}{7} = 0$$

  Sostituiamo ora le nuove incognite

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - \dfrac{24}{7} \end{cases}$$

  ottenendo l'equazione

$$25X^2 - 7Y^2 + \frac{625}{7} = 0 \Rightarrow -\frac{7}{25}X^2 + \frac{49}{625}Y^2 = 1$$

Per ottenere la forma canonica dobbiamo in effetti effettuare la rotazione che scambi gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x'' = Y \\ y'' = -X \end{cases}$$

ottenendo

$$\frac{49}{625}(x'')^2 - \frac{7}{25}(y'')^2 = 1$$

MODO 2: utilizziamo il centro. Sappiamo che il centro ha coordinate

$$C : \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{24}{7} \end{cases}$$

Non avendo effettuato il cambiamento di coordinate corrispondente alla rotazione possiamo immediatamente individuare le coordinate (X, Y) rispetto alle quali il centro si trova nell'origine degli assi:

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - \dfrac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X \\ y = Y + \dfrac{24}{7} \end{cases}$$

Sostituendo tali valori nell'equazione

$$25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$$

otteniamo, ovviamente come nel caso precedente, l'equazione canonica

$$-\frac{7}{25}X^2 + \frac{49}{625}Y^2 = 1$$

ovvero

$$\frac{49}{625}(x'')^2 - \frac{7}{25}(y'')^2 = 1$$

l) Consideriamo l'equazione $x^2+4xy+4y^2-6x+1 = 0$. Sappiamo già che si tratta di una parabola, ma in questo caso, non trattandosi di una conica a centro, non abbiamo determinato gli autospazi.

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 5)$$

Quindi A ha due autovalori:

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 5$$

Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{II-2I} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(0) = \langle(-2, 1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II+I \end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -2x + y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow E(5) = \langle(1, 2)\rangle$$

Possiamo ora procedere come negli esercizi precedenti.

– **Rotazione** Per determinare una matrice di cambiamento di base ortonormale e speciale, corrispondente a una rotazione, dobbiamo determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori, imponendo inoltre che la matrice P di cambiamento di base abbia determinante $+1$.
Notiamo che i due autovettori sono ortogonali (anche per il teorema spettrale). E' quindi sufficiente normalizzarli e eventualmente cambiarli di segno in modo che P abbia determinante $+1$:

$$E(0) = \left\langle \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\rangle \qquad E(5) = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\rangle$$

La matrice P di cambiamento di base è quindi la matrice ortogonale

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Se indichiamo con (x', y') la nuove coordinate abbiamo che

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2x - y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x + 2y) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-x' + 2y') \end{cases}$$

In questo momento ci serve il secondo cambio di coordinate. Sostituendo infatti le coordinate (x, y) nell'equazione otteniamo:

$$\frac{1}{5}(2x' + y')^2 + \frac{4}{5}(2x' + y')(-x' + 2y') + \frac{4}{5}(-x' + 2y')^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}(2x' + y') + 1 = 0$$

$$5(y')^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}x' - \frac{6}{\sqrt{5}}y' + 1 = 0$$

Abbiamo così effettuato la rotazione.

– **Traslazione**
Si tratta ora di effettuare la traslazione. Non essendo una conica a centro dobbiamo procedere nel
MODO 1: completamento del quadrato e eliminazione del termine noto.

$$5\left[(y')^2 - \frac{6}{5\sqrt{5}}y'\right] - \frac{12}{\sqrt{5}}x' + 1 = 0$$

$$5\left[(y')^2 - \frac{6}{5\sqrt{5}}y' + \left(\frac{3}{5\sqrt{5}}\right)^2\right] - \frac{12}{\sqrt{5}}x' + 1 - \frac{9}{25} = 0$$

$$5\left[y' - \frac{3}{5\sqrt{5}}\right]^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}x' + \frac{16}{25} = 0$$

$$5\left[y' - \frac{3}{5\sqrt{5}}\right]^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}\left[x' - \frac{4\sqrt{5}}{75}\right] = 0$$

Sostituiamo ora le nuove incognite

$$\begin{cases} X = x' - \frac{4\sqrt{5}}{75} \\ Y = y' - \frac{3}{5\sqrt{5}} \end{cases}$$

ottenendo l'equazione

$$5Y^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}X = 0 \Rightarrow Y^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}}X = 0$$

Per ottenere la forma canonica dobbiamo in effetti effettuare la rotazione che scambi gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x'' = Y \\ y'' = -X \end{cases}$$

ottenendo

$$(x'')^2 + \frac{12}{5\sqrt{5}} y'' = 0$$

- Scriviamo la conica in forma normale:

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$$

Le matrici associate alla conica sono

$$A' = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Si vede facilmente che

$$I_3 = \det(A') \neq 0 \ \Rightarrow \ \text{conica } \textit{non degenere.}$$
$$I_2 = \det(A) = 50 > 0 \ \Rightarrow \ \textit{ellisse.}$$

  - **Rotazione**
    Come prima cosa dobbiamo individuare un cambiamento di base ortogonale che trasformi A in matrice diagonale (rotazione). A tale scopo cerchiamo gli autovalori e autovettori di A per trovare una nuova base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A. Quindi

$$p_A(\lambda) = (9 - \lambda)(6 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$$

e gli autovalori sono $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 10$.
Calcoliamo lo spazio $E(10)$ risolvendo il sistema omogeneo asociato alla matrice $A - 10I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II + 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(10) = \langle (2, 1) \rangle$$

Calcoliamo lo spazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 5I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 08 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(5) = \langle (1, -2) \rangle$$

Notiamo che i due autovettori sono ortogonali (per il teorema spettrale). E' quindi suffinciente normalizzarli cambiandoli di segno in modo che la matrice P di cambiamento di base abbia determinante $+1$:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Se indichiamo con (x', y') le nuove coordinate abbiamo che

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2x + y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-x + 2y) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (2x' - y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x' + 2y') \end{cases}$$

Sostituendo ora le coordinate (x, y) nell'equazione otteniamo:

$$\frac{9}{5}(2x' - y')^2 + \frac{4}{5}(2x' - y')(x' + 2y') + \frac{6}{5}(x' + 2y')^2 - 10 = 0$$
$$10(x')^2 + 5(y')^2 - 10 = 0$$
$$2(x')^2 + (y')^2 - 2 = 0$$

Traslazione
Come si vede dal fatto che mancano i termini in x e y in questo caso non è necessario effettuare il secondo cambiamento di base corrispondente alla traslazione per ottenere la forma canonica. In effetti se ricerchiamo il centro otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & | & 0 \\ 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{9II-2I} \begin{bmatrix} 9 & 2 & | & 0 \\ 0 & 50 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0,0)$$

La forma canonica della conica è quindi

$$(x')^2 + \frac{1}{2}(y')^2 - 1 = 0$$

- Consideriamo la conica $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$ e le matrici associate

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Si vede facilmente che

$$I_3 = \det(A') \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{conica } \textit{non degenere.}$$
$$I_2 = \det(A) = -9 < 0 \;\Rightarrow\; \textit{iperbole.}$$

  - **Rotazione** Come prima cosa dobbiamo individuare un cambiamento di base ortogonale che trasformi A in matrice diagonale (rotazione). A tale scopo cerchiamo gli autovalori e autovettori di A per trovare una nuova base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A. Quindi

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

e gli autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -2$.
Calcoliamo lo spazio $E(4)$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A - 4I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(4) = \langle (1, 1) \rangle$$

Calcoliamo lo spazio $E(-2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $A + 2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ 3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi

$$E(-2) = \langle (1, -1) \rangle$$

Notiamo che i due autovettori sono ortogonali (per il teorema spettrale). E' quindi sufficiente normalizzarli:

$$E(4) = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \qquad E(-2) = \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle$$

La matrice P di cambiamento di base è quindi la matrice ortogonale speciale

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Se indichiamo con (x', y') le nuove coordinate abbiamo che

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x - y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + y) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x' + y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-x' + y') \end{cases}$$

Sostituendo ora le coordinate (x, y) nell'equazione otteniamo:

$$\frac{1}{2}(x' + y')^2 + \frac{6}{2}(x' + y')(-x' + y') + \frac{1}{2}(-x' + y')^2 + \\ + \frac{2}{\sqrt{2}}(x' + y') + \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') + \frac{1}{2} = 0$$

$$-2(x')^2 + 4(y')^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{3}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{2} = 0$$

– **Traslazione**
Possiamo ora completare il quadrato:

$$-2\left((x')^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}x'\right) + 4\left((y')^2 + \frac{3}{4\sqrt{2}}y'\right) + \frac{1}{2} = 0$$

$$-2\left[(x')^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}}x' + \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2\right] + 2 \cdot \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \\ 4\left[(y')^2 + \frac{3}{4\sqrt{2}}y' + \left(\frac{3}{8\sqrt{2}}\right)^2\right] - 4 \cdot \left(\frac{3}{8\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$-2\left(x' - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(y' + \frac{3}{8\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{9}{32} = 0$$

Sostituiamo ora le nuove incognite

$$\begin{cases} X = x' - \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \\ Y = y + \dfrac{3}{8\sqrt{2}} \end{cases}$$

ottenendo l'equazione

$$-2X^2 + 4Y^2 + \frac{9}{32} = 0$$

$$\frac{64}{9}X^2 - \frac{128}{9}Y^2 = 1$$

□

Esercizio 13.3. *Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri $f(x, y) = 0$:*

(1) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$
(2) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$
(3) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$
(4) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$
(5) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Per ognuna di esse:

a) *Determinare la matrice A della forma quadratica asociata alla conica.*
b) *Determinare la matrice di rotazione R (ortogonale speciale) tale che $R^T AR = D$, con D matrice diagonale.*
c) *Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.*
d) *Se si tratta di una conica a centro (ellisse o iperbole), determinarne il centro e gli assi.*

Soluzione:

(1) Consideriamo l'equazione $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$.

a) La matrice associata alla forma quadratica è

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

b) Determiniamo gli autovalori e autovettori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$$

Quindi A ha due autovalori: $\lambda_1 = 10, \ \lambda_2 = 5$

Calcoliamo l'autospazio $E(10)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 10I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II + 2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(10) = \langle (2,1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 5I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x + y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} \Rightarrow E(5) = \langle (1,-2) \rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

c) La matrice A ha due autovalori concordi (ovvero $\det(A) > 0$), quindi si tratta di un'ellisse.

d) Per determinare il centro risolviamo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \ \Rightarrow \ A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

dove

$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix}$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & | & 0 \\ 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2II \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 9 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 9I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -25 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (0,0)$$

Potevamo notare che il centro della conica è $(0,0)$ osservando che nell'equazione mancano i termini x e y.

Gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione gli autovettori di A, quindi

$$a_1 : \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + t \end{cases} \Rightarrow x - 2y = 0$$

$$a_2 : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 - 2t \end{cases} \Rightarrow 2x + y = 0$$

(2) Consideriamo l'equazione $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$

a) La matrice della forma quadratica associata alla conica è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

Quindi A ha due autovalori:

$$\lambda_1 = 4$$
$$\lambda_2 = -2$$

Calcoliamo l'autospazio $E(4)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 4I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II+I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x+y=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(4) = \langle (1,1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + 2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ 3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x+y=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \Rightarrow E(-2) = \langle (1,-1) \rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

c) La matrice A ha due autovalori discordi (ovvero $\det(A) < 0$), quindi si tratta di un'iperbole.

d) Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \Rightarrow A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

dove

$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix}$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 1 & | & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 6 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-6I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & -16 & | & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{16} \\ y = -\dfrac{5}{16} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{1}{16}, -\frac{5}{16} \right)$$

Infine gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione parallela agli autovettori trovati:

$$a_1 : \begin{cases} x = -\frac{1}{16} + t \\ y = -\frac{5}{16} + t \end{cases} \Rightarrow 4x - 4y - 1 = 0$$

$$a_2 : \begin{cases} x = -\frac{1}{16} + t \\ y = -\frac{5}{16} - t \end{cases} \Rightarrow 8x + 8y + 3 = 0$$

(3) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

a) La matrice della forma quadratica associata alla conica è:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 38$$

b) Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

Quindi A ha due autovalori:

$$\lambda_1 = 8$$
$$\lambda_2 = 2$$

Calcoliamo l'autospazio $E(8)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 8I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II-I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -x - y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow E(8) = \langle(-1,1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-2I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/3I \\ II+I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x - y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow E(2) = \langle(1,1)\rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

c) La matrice A ha due autovalori concordi (ovvero $\det(A) > 0$), quindi si tratta di un'ellisse.

d) Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} II \\ 5II+3I \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 16 & -24\sqrt{2} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2},\ -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

Infine

$$a_1 : \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} - t \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + t \end{cases} \quad \Rightarrow x + y + 4\sqrt{2} = 0$$

$$a_2 : \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} + t \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + t \end{cases} \quad \Rightarrow x - y + \sqrt{2} = 0$$

(4) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$.

a) La matrice della forma quadratica associata alla conica è:

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \qquad k = 7$$

b) Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 25-\lambda & 0 \\ 0 & -7-\lambda \end{bmatrix} = (25-\lambda)(-7-\lambda)$$

Quindi A ha due autovalori: $\lambda_1 = 25,\ \lambda_2 = -7$.
Calcoliamo l'autospazio $E(25)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 25I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -32y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(25) = \langle(1,0)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-7)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + 7I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 32x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(-7) = \langle(0,1)\rangle$$

E' chiaro che abbiamo eseguito calcoli sostanzialmente inutili. Infatti la ricerca degli autospazi corrisponde alla rotazione della conica. Il fatto che nell'equazione manchi il termine in xy, ovvero A è diagonale, indica che non è necessario effettuare la rotazione e che possiamo prendere come autovettori i vettori della base canonica $(1,0)$ e $(0,1)$.
La matrice di rotazione cercata è quindi la matrice identica

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) La matrice A ha due autovalori discordi (ovvero $\det(A) < 0$), quindi si tratta di un'iperbole.

d) Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -24 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow C = \left(0,\ \frac{24}{7}\right)$$

Infine

$$a_1 : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = \frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{24}{7}$$

$$a_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{24}{7} + t \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

(5) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$.

a) La matrice della forma quadratica associata alla conica è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Inoltre

$$h = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 1$$

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 5)$$

Quindi A ha due autovalori:

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = 5$$

Calcoliamo l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow_{II - 2I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(0) = \langle(-2,1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & | & 0 \\ 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II + I \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x + y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow E(5) = \langle (1, 2) \rangle$$

La matrice R di cambiamento di base (rotazione) è quindi la matrice ortogonale speciale

$$R = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c) La matrice A ha un autovalore nullo (ovvero $\det(A) = 0$), quindi si tratta di una parabola.

□

Esercizio 13.4. *Siano assegnate le seguenti coniche non degeneri $f(x, y) = 0$:*

(1) $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 10 = 0$

(2) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0$

(3) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

(4) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

(5) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Per ognuna di esse:

a) *Determinare la matrice A della forma quadratica associata alla conica.*
b) *Stabilire se si tratta di un'iperbole, ellisse o parabola.*
c) *Se si tratta di una conica a centro (ellisse o iperbole), determinarne il centro e gli assi. Se si tratta di una parabola, determinarne il vertice e l'asse.*

Soluzione:

(1) Consideriamo l'equazione $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10$.

a) La matrice associata alla conica sono

$$A' = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ associata alla forma quadratica}$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi la conica è non degenere.

b) Possiamo calcolare il determinante di A, oppure determinarne gli autovalori:

$$I_2 = \det(A) = 50 > 0 \qquad \Rightarrow \text{ si tratta di un'ellisse}$$

Oppure:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 9 - \lambda & 2 \\ 2 & 6 - \lambda \end{bmatrix} = (9 - \lambda)(6 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$$

Quindi A ha due autovalori concordi($\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 5$), $I_2 = 10 \cdot 5 > 0$ e si tratta di un'ellisse.

c) Per determinare il centro risolviamo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \Rightarrow A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

dove

$$h = \begin{bmatrix} 1/2 \text{ coeff. della } x \\ 1/2 \text{ coeff. della } y \end{bmatrix}$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & | & 0 \\ 2 & 6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2II \\ I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 9 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow II - 9I \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -25 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (0, 0)$$

Potevamo notare che il centro della conica è $(0,0)$ osservando che nell'equazione mancano i termini x e y che indicano la traslazione.
Gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione gli autovettori di A. Dobbiamo quindi prima determinare gli autovettori: Calcoliamo l'autospazio $E(10)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 10I$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -4 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II+2I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x+2y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$$
$$\Rightarrow E(10) = \langle (2,1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-5I$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/2I \\ 2II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases}$$
$$\Rightarrow E(5) = \langle (1,-2) \rangle$$

Infine:

$$a_1 : \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + t \end{cases} \Rightarrow x - 2y = 0$$
$$a_2 : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 - 2t \end{cases} \Rightarrow 2x + y = 0$$

(2) Consideriamo l'equazione $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \dfrac{1}{2} = 0$

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ associata alla forma quadratica}$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Possiamo calcolare il determinante di A, oppure determinarne gli autovalori:

$$I_2 = \det(A) = -80 < 0 \qquad \Rightarrow \text{ si tratta di un'iperbole}$$

Oppure:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

Quindi A ha due autovalori discordi ($\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2$), $I_2 < 0$ e si tratta di un'iperbole.

c) Poichè si tratta di una conica a centro ne possiamo determinare il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + h = 0 \Rightarrow A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h$$

ovvero il sistema associato alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 3 & 1 & | & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 6 & 2 & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-6I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & | & -1 \\ 0 & -16 & | & 5 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{16} \\ y = -\frac{5}{16} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{1}{16}, -\frac{5}{16} \right)$$

Gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione parallela agli autovettori di A.
Calcoliamo l'autospazio $E(4)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 4I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & | & 0 \\ 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II+I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$
$$\Rightarrow E(4) = \langle (1,1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A+2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & | & 0 \\ 3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(-2) = \langle (1,-1) \rangle$$

Infine gli assi sono le rette passanti per il centro e di direzione parallela agli autovettori trovati:

$$a_1: \begin{cases} x = -\frac{1}{16} + t \\ y = -\frac{5}{16} + t \end{cases} \Rightarrow 4x - 4y - 1 = 0$$

$$a_2: \begin{cases} x = -\frac{1}{16} + t \\ y = -\frac{5}{16} - t \end{cases} \Rightarrow 8x + 8y + 3 = 0$$

(3) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 38$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Calcoliamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

Quindi A ha due autovalori concordi ($\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$), $I_2 = det(A) > 0$ e si tratta di un'ellisse.

c) Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -3 & | & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 5II+3I \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 16 & | & -24\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2},\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} \right)$$

Per determinare gli assi calcoliamo gli autospazi.
Calcoliamo l'autospazio $E(8)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 8I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & | & 0 \\ -3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -x-y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(8) = \langle (-1,1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & | & 0 \\ -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II+I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(2) = \langle (1,1) \rangle$$

Infine gli assi sono le rette per il centro di direzione parallela agli autovettori:

$$a_1: \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} - t \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + t \end{cases} \Rightarrow x + y + 4\sqrt{2} = 0$$

$$a_2: \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} + t \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + t \end{cases} \Rightarrow x - y + \sqrt{2} = 0$$

(4) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$.

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \qquad k = 7$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 25-\lambda & 0 \\ 0 & -7-\lambda \end{bmatrix} = (25-\lambda)(-7-\lambda)$$

Quindi A ha due autovalori discordi ($\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = -7$), $I_2 < 0$ e si tratta di un'iperbole.

c) Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -24 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow C = \left(0, \frac{24}{7}\right)$$

Per determinare gli assi cerchiamo gli autovettori di A.
Calcoliamo l'autospazio $E(25)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 25I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -32y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(25) = \langle (1,0) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(-7)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + 7I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow 32x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(-7) = \langle (0,1) \rangle$$

E' chiaro che abbiamo eseguito calcoli sostanzialmente inutili. Infatti la ricerca degli autospazi corrisponde alla rotazione della conica. Il fatto che nell'equazione manchi il termine in xy, ovvero A è diagonale, indica che non è necessario effettuare la rotazione e che possiamo prendere come autovettori i vettori della base canonica $(1,0)$ e $(0,1)$.
Infine gli assi sono le rette per il centro parallele agli autovettori (in questo caso parallele agli assi cartesiani):

$$a_1 : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = \frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{24}{7}$$

$$a_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{24}{7} + t \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

(5) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$.

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 1$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere.

b) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 5)$$

Quindi A ha autovalori: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. Poiché ha un autovalore nullo, $I_2 = 0$ e si tratta di una parabola.

c) Calcoliamo la direzione dell'asse ricordando che questo è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo.
Calcoliamo quindi l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \underset{II - 2I}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(0) = \langle (-2,1) \rangle$$

Ora che abbiamo la direzione dell'asse dobbiamo determinarne un punto per potere scrivere l'equazione.
Consideriamo una qualsiasi retta ortogonale all'asse, cioè di direzione $(1, 2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y = k \quad \text{per qualche } k$$

Se una tale retta interseca la parabola in due punti D e E, allora il punto medio M del segmento DE sarà un punto dell'asse. Senza tenere k variabile assegnamo a k un valore a caso, la cosa più semplice è porre $k = 0$. Se la retta trovata non interseca la parabola la cosa formalmente più corretta sarebbe cambiare valore. In realtà, pensando per un attimo di lavorare in $\mathbf{C}$ anziché in $\mathbf{R}$ possiamo comunque raggiungere il risultato, come vedremo tra poco.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + 8x^2 + 16x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado ottenuta ha soluzioni in $\mathbf{C}$, ma non in $\mathbf{R}$:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 25}}{25} = \frac{3 \pm \sqrt{-16}}{25}$$

A noi però interessa in realtà il punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento DE e

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3 + \sqrt{-16}}{25} + \frac{3 - \sqrt{-16}}{25}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{-16} + 3 - \sqrt{-16}}{25} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{25} = \frac{3}{25} \end{aligned}$$

Quindi indipendentemente dal Δ, il valore di x_M viene comunque reale (e corretto).
In alternativa potevamo anche utilizzare le relazioni tra le radici e i coefficienti di una equazione di secondo grado. Infatti data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sappiamo che $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Quindi data l'equazione

$$25x^2 - 6x + 1 = 0$$

otteniamo

$$x_1 + x_2 = \frac{6}{25} \qquad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{25}$$

A questo punto possiamo calcolare y_M, ricordando che M appartiene al segmento DE, cioè alla retta $y = 2x$.

$$\begin{cases} x_M = \frac{3}{25} \\ y_M = 2x_M = \frac{6}{25} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{3}{25}, \frac{6}{25}\right)$$

Infine l'asse è la retta per M parallela all'autovettore relativo a $\lambda = 0$, cioè di direzione $(-2, 1)$:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{25} - 2t \\ y = \frac{6}{25} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x + 10y = 3$$

Il vertice della parabola è dato dall'intersezione dell'asse con la parabola stessa:

$$\begin{cases} x + 2y = \dfrac{3}{5} \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ \left(-2y + \dfrac{3}{5}\right)^2 + 4y\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 4y^2 - 6\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ 12y - \frac{56}{25} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{75} \\ y = \frac{14}{75} \end{cases} \Rightarrow V = \left(\frac{17}{75}, \frac{14}{75}\right)$$

□

Esercizio 13.5. *Riconoscere che le seguenti coniche $f(x,y)=0$ sono degeneri e determinare le equazioni delle rette che le formano. Se si tratta di una conica a centro determinarne il centro.*

(1) $x^2+2xy+y^2+3x+3y=0$

(2) $x^2+9y^2-6xy+2x-6y+1=0$

(3) $x^2+xy-2y^2+3y-1=0$

SOLUZIONE:

(1) Consideriamo l'equazione $x^2+2xy+y^2+3x+3y=0$ e le matrici A' e A associate

$$A'=\begin{bmatrix}1&1&\frac{3}{2}\\1&1&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&0\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\qquad h=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix},\qquad k=0$$

Poichè A' ha due righe uguali si ha $I_3=\det(A')=0$, quindi si tratta di una conica degenere. Inoltre $I_2=\det(A)=0$, quindi si tratta conica degenere non a centro. Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come una equazione di secondo grado nell'incognita x e considerare la y come parametro:

$$x^2+(2y+3)x+(y^2+3y)=0$$

Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo:

$$\begin{aligned}x_{1,2}&=\frac{-2y-3\pm\sqrt{(2y+3)^2-4(y^2+3y)}}{2}=\frac{-2y-3\pm\sqrt{9}}{2}\\&=\frac{-2y-3\pm 3}{2}\\\Rightarrow\quad x&=-y\qquad\text{oppure}\qquad x=-y-3\end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette reali parallele:

$$\begin{aligned}r_1:&\ x+y=0\\r_2:&\ x+y+3=0\end{aligned}$$

(2) Consideriamo l'equazione $x^2+9y^2-6xy+2x-6y+1=0$ e le matrici associate:

$$A'=\begin{bmatrix}1&-3&1\\-3&9&-3\\1&-3&1\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}1&-3\\-3&9\end{bmatrix},\qquad h=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$$

Notiamo che senza eseguire calcoli possiamo dedurre che $I_3=\det(A')=0$ in quanto A' ha due righe uguali, quindi si tratta di una conica degenere.

Per determinare esplicitamente l'equazione della retta risolviamo l'equazione di secondo grado nell'incognita x con parametro y (o viceversa):

$$\begin{aligned}&x^2-2(3y-1)x+(9y^2-6y+1)=0\ \Rightarrow\\&x_{1,2}=(3y-1)\pm\sqrt{(3y-1)^2-(9y^2-6y+1)}=3y-1\end{aligned}$$

Quindi si tratta della retta $x-3y+1=0$ (conica doppiamente degenere, infatti $\mathrm{rg}(A')=1$).

(3) Consideriamo l'equazione $x^2+xy-2y^2+3y-1=0$ e le matrici associate:

$$A'=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&-2&\frac{3}{2}\\0&\frac{3}{2}&-1\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-2\end{bmatrix},\qquad h=\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

Poichè $I_3=\det(A')=0$ si tratta di una conica degenere. Inoltre $I_2=\det(A)\neq 0$ quindi si tratta di una conica degenere a centro.

Per determinare esplicitamente l'equazione delle due rette si può considerare l'equazione della conica come una equazione di secondo grado nell'incognita x e considerare la y come parametro (o viceversa):

$$x^2+xy+(-2y^2+3y-1)=0$$

Risolvendo tale equazione con la formula per le equazioni di secondo grado otteniamo:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4(-2y^2 + 3y - 1)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{9y^2 - 12y + 4}}{2} \\ &= \frac{-y \pm (3y - 2)}{2} \\ \Rightarrow \quad & x = y - 1 \qquad \text{oppure} \qquad x = -2y + 1 \end{aligned}$$

Si tratta quindi di due rette reali incidenti:

$$\begin{aligned} r_1 &: \; x - y + 1 = 0 \\ r_2 &: \; x + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Notiamo che le due rette si intersecano nel punto $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ che corrisponde al centro della conica. Il punto C lo possiamo anche ricavare, come nei casi di coniche a centro non degeneri, risolvendo il sistema $A \cdot [x\ y]^T = -h$.

□

Esercizio 13.6. *Ridurre in forma canonica le seguenti coniche:*

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

SOLUZIONE:

a) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$. La matrice associata è

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:

- $I_3 = \det(A') = 8\sqrt{2}(-40\sqrt{2}) + 38(25 - 9) = -640 + 608 = -32$, e si tratta di una conica non degenere.
- $p_A(\lambda) = (5 - \lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$, concordi, e si tratta di un'ellisse.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2+by^2\pm1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x^2 + 2y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $I_3 = \det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-32 = 16t \quad \Rightarrow \quad t = -2$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$8x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + y^2 - 1 = 0$$

b) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$. La matrice associata è

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:

- $I_3 = \det(A') = 25 \cdot (-49 - 24^2) = -25 \cdot 625 \neq 0$, e si tratta di una conica non degenere.

- $p_A(\lambda) = (25 - \lambda)(-7 - \lambda)$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = -7$, disconcordi, e si tratta di un'iperbole.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 - by^2 - 1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 25x^2 - 7y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-25 \cdot 625 = -25 \cdot 7t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{625}{7}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$25x^2 - 7y^2 + \frac{625}{7} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{25}x^2 - \frac{49}{625}y^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{7}{25}x^2 + \frac{49}{625}y^2 - 1 = 0$$

Per ottenere la forma canonica in questo caso dobbiamo effettuare la rotazione che manda x in y e y in $-x$::

$$\frac{49}{625}x^2 - \frac{7}{25}y^2 - 1 = 0$$

c) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$. La matrice associata è

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:
- $I_3 = \det(A') = -3 \cdot 12 = -36 \neq 0$, e si tratta di una conica non degenere.
- $p_A(\lambda) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$, e si tratta di una parabola.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_2 x^2 + 2ty = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-36 = -5t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{36}{5} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{6}{\sqrt{5}}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$5x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{6}{\sqrt{5}}\right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}}y = 0$$

$\square$

Esercizio 13.7. *Ridurre in forma canonica le seguenti coniche e determinare il cambiamento di coordinate necessario per passare da una forma all'altra:*

a) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$

b) $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$

c) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$

Soluzione:

a) Consideriamo l'equazione $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$. Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} 8\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 38$$

Poiché $I_3 = \det(A') \neq 0$ è una conica non degenere.

Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 16$$

Quindi A ha due autovalori concordi $\lambda_1 = 8$ e $\lambda_2 = 2$, $I_2 > 0$ e si tratta di un'ellisse la cui forma canonica ha associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione sull'invariante $I_3 = \det(A') = \det(B)$ otteniamo l'equazione:

$$-32 = 16t \quad \Rightarrow \quad t = -2$$

Infine la forma canonica cercata è:

$$8X^2 + 2Y^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4X^2 + Y^2 - 1 = 0$$

Per determinare le trasformazioni per passare da una forma all'altra dobbiamo determinare il centro della conica, che indica la traslazione, e la matrice di rotazione R.

Determiniamo il centro risolvendo il sistema

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -h \;\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -3 & | & -8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ 5II+3I \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 5 & | & 0 \\ 0 & 16 & | & -24\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \; C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2},\; -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$$

Per determinare la matrice di rotazione dobbiamo trovare gli autovettori di A. Calcoliamo l'autospazio $E(8)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 8I$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & | & 0 \\ -3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II-I \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \; -x-y=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; E(8) = \langle(-1,1)\rangle = \langle(1,-1)\rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(2)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A-2I$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & | & 0 \\ -3 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1/3I \\ II+I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \; x-y=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; E(2) = \langle(1,1)\rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; R^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine le trasformazioni sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

dove (x_0, y_0) è il centro C della conica. Quindi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) - \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) - \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e la sua inversa

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y + \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) + \frac{5}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) + \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Notiamo che utilizzando il primo cambio di variabile, quello da (x, y) a (X, Y), nell'equazione iniziale si ottiene effettivamente la forma canonica che abbiamo determinato utilizzando gli invarianti.

b) Consideriamo l'equazione $25x^2 - 7y^2 + 48y + 7 = 0$.
Le matrici associate alla conica sono

$$A' = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \end{bmatrix}, \qquad k = 7$$

$I_3 = \det(A') \neq 0$, quindi è una conica non degenere.
Determiniamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 25 - \lambda & 0 \\ 0 & -7 - \lambda \end{bmatrix} = (25 - \lambda)(-7 - \lambda)$$

Quindi A ha due autovalori discordi: $\lambda = 25$ e $\lambda = -7$, $I_2 < 0$ e si tratta di un'iperbole la cui forma canonica ha associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione sull'invariante $I_3 = \det(A') = \det(B)$ otteniamo $t = \dfrac{625}{7}$, per cui la forma canonica cercata è:

$$-7X^2 + 25Y^2 + \frac{625}{7} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{49}{625}X^2 - \frac{7}{25}Y^2 - 1 = 0$$

Per determinare le trasformazioni per passare da una forma all'altra dobbiamo determinare il centro della conica, che indica la traslazione, e la matrice di rotazione R.

Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema $A| - h$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -24 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow C = \left(0, \frac{24}{7}\right)$$

Calcoliamo l'autospazio $E(-7)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A + 7I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(-7) = \langle (0, 1) \rangle = \langle (0, -1) \rangle$$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(25)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - 25I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(25) = \langle (1, 0) \rangle$$

La matrice di rotazione cercata è la matrice ortogonale di determinante 1 che ha per colonne gli autovettori determinati normalizzati, quindi

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che in effetti abbiamo solo effettuato la rotazione che scambia x e y in quando la conica di partenza non presentava il termine xy, quindi era già ruotata con gli assi paralleli agli assi cartesiani.

Infine le trasformazioni sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{24}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ -X + \frac{24}{7} \end{bmatrix}$$

e la sua inversa

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - \frac{24}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y + \frac{24}{7} \\ x \end{bmatrix}$$

Notiamo che utilizzando il primo cambio di variabile, quello da (x, y) a (X, Y) nell'equazione iniziale si ottiene effettivamente la forma canonica che abbiamo determinato utilizzando gli invarianti.

c) Consideriamo l'equazione $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0$. Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad h = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k = 1$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \lambda(\lambda - 5)$$

Quindi A ha due autovalori $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 0$, $I_2 = 0$ e si tratta di una parabola.

Calcoliamo l'autospazio $E(5)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a $A - I$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} 1/2I \\ 2II + I \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -2x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$$

$\Rightarrow \; E(5) = \langle (1,2) \rangle$

Analogamente calcoliamo l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow II - 2I \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$$

$\Rightarrow \; E(0) = \langle (-2,1) \rangle$

Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_2 x^2 + 2ty = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sfruttando l'invariante I_3 per cui $\det(A') = \det(B)$ otteniamo $t = -\frac{6}{\sqrt{5}}$ Infine possiamo la forma canonica cercata è:

$$5x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{6}{\sqrt{5}} \right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{12}{5\sqrt{5}} y = 0$$

Dagli autovettori ricaviamo inoltre la matrice ortogonale speciale R di cambiamento di base:

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Per determinare la traslazione dobbiamo trovare il vertice, dato dal punto di intersezione tra l'asse e la parabola. Sappiamo che l'asse è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo e che $E(0) = (-2, 1)$. Consideriamo una qualsiasi retta ortogonale all'asse, cioè di direzione $(1, 2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y = k \quad \text{per qualche } k$$

Se una tale retta interseca la parabola in due punti D e E, allora il punto medio M del segmento DE sarà un punto dell'asse. Senza tenere k variabile assegnamo a k un valore a caso, la cosa più semplice è porre $k = 0$. Se la retta trovata non interseca la parabola la cosa formalmente più corretta sarebbe cambiare valore. In raltà, pensando per un attimo di lavorare in $\mathbf{C}$ anziché in $\mathbf{R}$ possiamo comunque raggiungere il risultato, come vedremo tra poco.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + 8x^2 + 16x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

Dalle relazione tra i coefficienti e le soluzioni di una equazione di secondo grado otteniamo

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-b}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{25} = \frac{3}{25}$$

A questo punto possiamo calcolare y_M, ricordando che M appartiene al segmento DE, cioè alla retta $y = 2x$.

$$\begin{cases} x_M = \frac{3}{25} \\ y_M = 2x_M = \frac{6}{25} \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{3}{25}, \frac{6}{25}\right)$$

Infine l'asse è la retta per M parallela all'autovettore relativo a $\lambda = 0$, cioè di direzione $(-2, 1)$:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{25} - 2t \\ y = \frac{6}{25} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = \frac{3}{5} \Rightarrow 5x + 10y = 3$$

Il vertice della parabola è dato dall'intersezione dell'asse con la parabola stessa:

$$\begin{cases} x + 2y = \dfrac{3}{5} \\ x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ \left(-2y + \dfrac{3}{5}\right)^2 + 4y\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 4y^2 - 6\left(-2y + \dfrac{3}{5}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y + \frac{3}{5} \\ 12y - \frac{56}{25} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{75} \\ y = \frac{14}{75} \end{cases} \Rightarrow V = \left(\frac{17}{75}, \frac{14}{75}\right)$$

Infine le trasformazioni cercate sono

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{17}{75} \\ \frac{14}{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y) + \frac{17}{75} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y) + \frac{14}{75} \end{bmatrix}$$

e la sua inversa

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - \frac{17}{75} \\ y - \frac{14}{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x + 2y - \frac{3}{5}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2x + y + \frac{4}{15}\right) \end{bmatrix}$$

In realtà con la parabola ci può essere un problema: effettuando il cambio di variabile indicato non otteniamo l'equazione canonica determinata. Questo è dovuto al fatto che in realtà la rotazione corretta è:

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

data dalla composizione della rotazione R precedentemente trovata con la rotazione

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

che manda X in $-X$ e Y in $-Y$. Infatti la scelta della matrice di rotazione (ortogonale speciale) è sempre a meno del segno.

La trasformazione corretta che permette di passare dall'equazione iniziale alla forma canonica è:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{17}{75} \\ \frac{14}{75} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(-X + 2Y) + \frac{17}{75} \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(-2X - Y) + \frac{14}{75} \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 13.8. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C} \ : \ 2xy - x - 3y = k$$

(1) *Stabilire per quali valori di k la conica $\mathcal{C}$ è degenere.*
(2) *Posto $k = 0$, stabilire di quale tipo di conica si tratti.*
(3) *Trovare gli assi (o l'asse) di simmetria di $\mathcal{C}$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -k \end{bmatrix}$$

(1) Per stabilire se la conica è degenere calcoliamo il determinante di A':

$$I_3 = \det(A') = -\left(-k - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) = k + \frac{3}{2}$$

Quindi $\mathcal{C}$ è degenere se $k = -\dfrac{3}{2}$.

(2) Posto $k = 0$ calcoliamo il determinante della sottomatrice A

$$I_2 = \det(A) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 < 0$$

Si tratta quindi di un'iperbole.

(3) Per determinare il centro di $\mathcal{C}$ risolviamo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Per determinare gli assi dobbiamo inoltre individuare la rotazione da effettuare per passare alla forma canonica. Calcoliamo quindi gli autospazi di A.

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

Quindi A ha due autovalori distinti: $\lambda = \pm 1$. Inoltre

$$E(1) = \langle\ (1,1)\ \rangle$$
$$E(-1) = \langle\ (-1,1)\ \rangle$$

I due autovettori indicano le direzioni degli assi della conica, quindi gli assi sono le due rette passanti per il centro C della conica e parallele a tali vettori:

$$a_1 : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + t \\ y = \frac{1}{2} + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

$$a_2 : \begin{cases} x = \frac{3}{2} - t \\ y = \frac{1}{2} + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Ricavando le equazioni in forma cartesiana otteniamo:

$$a_1 : \ x - y = 1$$
$$a_2 : \ x + y = 2$$

□

Esercizio 13.9. *Sia k un parametro reale. Si consideri la famiglia di coniche $\mathcal{C}_k$ di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ : \ 2kx^2 + 2(k-2)xy - 4y^2 + 2x = 1.$$

a) *Esistono coniche degeneri nella famiglia?*
b) *Si classifichi la conica $\mathcal{C}_k$ al variare di k.*
c) *Si determinino le coordinate dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ (quando esistono).*

Soluzione:

Consideriamo le matrici associate a $\mathcal{C}$:

$$A' = \begin{bmatrix} 2k & k-2 & 1 \\ k-2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2k & k-2 \\ k-2 & -4 \end{bmatrix}$$

a) $I_3 = \det(A') = k^2 + 4k + 8 \neq 0$ per ogni valore di k, quindi non esistono coniche degeneri nella famiglia.
b) $I_2 = \det(A) = -(k+2)^2$, quindi
   - Se $k = -2$, $I_2 = \det(A) = 0$ e $\mathcal{C}_{-2}$ è una parabola.
   - Se $k \neq -2$, $I_2 = \det(A) < 0$ e $\mathcal{C}_k$ è una iperbole.

c) Calcoliamo il centro C_k delle coniche $\mathcal{C}_k$ nel caso $k \neq -2$:

$$\begin{bmatrix} 2k & k-2 & | & -1 \\ k-2 & -4 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Scambiando prima e seconda riga e prima e seconda colonna otteniamo:

$$\begin{bmatrix} -4 & k-2 & | & 0 \\ k-2 & 2k & | & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow_{4II+(k-2)I} \begin{bmatrix} -4 & k-2 & | & 0 \\ 0 & (k+2)^2 & | & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4y + (k-2)x = 0 \\ (k+2)^2 x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{4}{(k+2)^2} \\ y = -\dfrac{k-2}{(k+2)^2} \end{cases}$$

$\square$

Esercizio 13.10. *Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_k \ : \quad x^2 + (k-2)xy + y^2 - 4 = 0 \quad \textit{(k parametro reale)}$$

a) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.*
b) *Trovare le coniche degeneri della famiglia.*
c) *Mostrare che ci sono due rette che sono assi di simmetria di ogni conica della famiglia.*

Soluzione:
Consideriamo le matrici A' e A associate alla conica:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k-2}{2} & 0 \\ \frac{k-2}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Cominciamo a distinguere il caso degenere:

$$\det(A') = -4\left(1 - \left(\frac{k-2}{2}\right)^2\right)$$

quindi $\det(A') = 0$ se $\left(\dfrac{k-2}{2}\right)^2 = 1$, cioè

$$\frac{k-2}{2} = 1 \ \Rightarrow \ k-2 = 2 \ \Rightarrow \ k_1 = 4$$
$$\frac{k-2}{2} = -1 \ \Rightarrow \ k-2 = -2 \ \Rightarrow \ k_2 = 0$$

Infine la conica è non degenere se $k \neq 4$ e $k \neq 0$. Inoltre:

$$\det(A) = 1 - \left(\frac{k-2}{2}\right)^2 = \frac{-k^2+4k}{4}$$

Quindi
- Se $0 < k < 4$, si ha $\det(A) > 0$ e $\mathcal{C}$ è un'ellisse.
- Se $k < 0$ o $k > 4$, si ha $\det(A) < 0$ e $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
- Se $k = 0$ o $k = 4$ si tratta di una parabola degenere.

b) Abbiamo già visto che la conica è degenere se $k = 0$ o $k = 4$, inoltre:
- Se $k = 0$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$. Anche senza risolvere l'equazione con l'uso della formula otteniamo:

$$(x-y)^2 = 4 \ \Rightarrow \ x - y = \pm 2$$

Quindi in questo caso la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1 : \ x - y = 2, \qquad r_2 : \ x - y = -2$$

- Se $k = 4$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0$ e in maniera del tutto analoga otteniamo:

$$(x+y)^2 = 4 \ \Rightarrow \ x + y = \pm 2$$

e la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1 : \ x + y = 2, \qquad r_2 : \ x + y = -2$$

c) Calcoliamo il centro delle coniche limitandoci a considerare $k \neq 0, 4$, in quanto in questi casi abbiamo già visto che si tratta di una coppia di rette parallele (e quindi prive di centro). Notiamo inoltre che nell'equazione non compaiono i termini lineari, quindi il centro si trova già nell'origine: $C = (0, 0)$.

Per trovare gli assi delle coniche calcoliamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2$$

Quindi $p_A(\lambda) = 0$ se $1 - \lambda = \pm\dfrac{k-1}{2}$ e gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \frac{k}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{-k+4}{2}$$

Calcoliamo l'autospazio $E\left(\frac{k}{2}\right)$

$$\begin{bmatrix} \frac{2-k}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \\ \frac{k-2}{2} & \frac{2-k}{2} & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II+I} \begin{bmatrix} \frac{2-k}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi se $k \neq 2$ si ha $E\left(\frac{k}{2}\right) = \langle (1, 1) \rangle$. Tratteremo il caso $k = 2$ successivamente separatamente.

Analogamente calcoliamo $E\left(\frac{-k+4}{2}\right)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{k-2}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \\ \frac{k-2}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II-I} \begin{bmatrix} \frac{k-2}{2} & \frac{k-2}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi, sempre supponendo $k \neq 2$, si ha $E\left(\frac{-k+4}{2}\right) = \langle (1, 1) \rangle$.

Infine per $k \neq 0, 4, 2$ gli assi delle coniche sono le rette

$$a_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \Rightarrow x + y = 0$$

$$a_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow x - y = 0$$

Notiamo che tali rette sono assi di simmetria anche per le coppie di rette che costituiscono la conica nei casi degeneri.

Infine se $k = 2$ la conica è la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ centrata nell'origine che ha come assi di simmetria qualsiasi retta per l'origine. In particolare quindi anche a_1 e a_2 sono suoi assi di simmetria.

□

Esercizio 13.11. *Sia $\mathcal{C}_k$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_k \quad : \quad x^2 + kxy + y^2 - 4 = 0 \quad \text{(k parametro reale)}$$

a) *Al variare di $k \in \mathbf{R}$, riconoscere di quale tipo di conica si tratti.*
b) *Trovare le coniche degeneri della famiglia.*
c) *Mostrare che tutte le ellissi appartenenti alla famiglia sono reali.*

Soluzione:

Consideriamo le matrici A' e A associate alla conica:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

a) Cominciamo a distinguere il caso degenere:

$$I_3 = \det(A') = -4\left(1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2\right)$$

quindi $\det(A') = 0$ se $\left(\frac{k}{2}\right)^2 = 1$, cioè

$$\frac{k}{2} = 1 \;\Rightarrow\; k = 2$$
$$\frac{k}{2} = -1 \;\Rightarrow\; k = -2$$

Infine la conica è non degenere se $k \neq \pm 2$. Inoltre:

$$I_2 = \det(A) = 1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{-k^2+4}{4}$$

Quindi
- Se $-2 < k < 2$, si ha $I_2 = \det(A) > 0$ e $\mathcal{C}$ è un'ellisse.
- Se $k < -2$ o $k > 2$, si ha $I_2 = \det(A) < 0$ e $\mathcal{C}$ è un'iperbole.
- Se $k = \pm 2$ si tratta di una parabola degenere.

b) Abbiamo già visto che la conica è degenere se $k = \pm 2$, inoltre:
- Se $k = -2$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$. Anche senza utilizzare la formula per risolvere l'equazione otteniamo:

$$(x-y)^2 = 4 \;\Rightarrow\; x - y = \pm 2$$

Quindi in questo caso la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1 : \; x - y = 2, \qquad r_2 : \; x - y = -2$$

- Se $k = 2$, $\mathcal{C}$ diventa $x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0$ e in maniera del tutto analoga otteniamo:

$$(x+y)^2 = 4 \;\Rightarrow\; x + y = \pm 2$$

e la conica corrisponde alla coppia di rette parallele:

$$r_1 : \; x + y = 2, \qquad r_2 : \; x + y = -2$$

c) Abbiamo visto che $\mathcal{C}$ è un'ellisse se $-2 < k < 2$. Inoltre se per esempio $x = 0$ dall'equazione di $\mathcal{C}$ otteniamo $y = \pm 2$, quindi i punti $A(0,2)$ e $B(0,-2)$ appartengono ad ogni conica. Se una conica (non degenere) contiene un punto reale è necessariamente tutta reale. Quindi in particolare tutte le ellissi sono reali.

□

Esercizio 13.12. *Fissato il parametro reale t, sia $\mathcal{C}_t$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_t \; : \; (2t-1)x^2 + 6txy + ty^2 + 2x = 0$$

a) *Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.*
b) *Determinare il tipo di conica al variare del parametro t.*
c) *Scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_t$ per $t = \frac{1}{3}$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} 2t-1 & 3t & 1 \\ 3t & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\det(A') = -t$, quindi la conica è degenere per $t = 0$
b) $\det(A) = -7t^2 - t$, quindi:
- Se $t < -\frac{1}{7}$ o $t > 0$, $\det(A) < 0$ e si tratta di un'iperbole.
- Se $-\frac{1}{7} < t < 0$, $\det(A) > 0$ e si tratta di un'ellisse.
- Se $t = -\frac{1}{7}$, $\det(A) = 0$ e si tratta di una parabola.
- Se $t = 0$ otteniamo l'equazione $-x^2 + 2x = 0$, quindi si tratta di una coppia di rette parallele (infatti $\det(A) = 0$): $x = 0$ e $x = 2$.

c) Calcoliamo gli autovalori di A per $t = \frac{1}{3}$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} - \lambda & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{10}{9}$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$, discordi infatti si tratta di un'iperbole. La conica ha quindi equazione del tipo

$$\frac{\sqrt{10}}{3}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{3}y^2 + k = 0 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{10}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $I_3 = \det(B) = \det(A) = \frac{1}{3}$ otteniamo $-\frac{10}{9}k = -\frac{1}{3}$, cioè $k = \frac{3}{10}$. Quindi l'equazione di $\mathcal{C}_{\frac{1}{3}}$ è

$$\frac{\sqrt{10}}{3}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{3}y^2 + \frac{3}{10} = 0 \Rightarrow -\frac{10\sqrt{10}}{9}x^2 + \frac{10\sqrt{10}}{9}y^2 - 1 = 0$$

Effettuando infine la rotazione che manda x in y e y in $-x$ otteniamo la forma canonica

$$\mathcal{C}_{\frac{1}{3}} : \quad \frac{10\sqrt{10}}{9}x^2 - \frac{10\sqrt{10}}{9}y^2 - 1 = 0$$

□

Esercizio 13.13. *Fissato il parametro reale t, sia $\mathcal{C}_t$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C}_t \; : \; tx^2 + 2xy + (t+2)y^2 - 2y = 0$$

a) *Stabilire se esistono valori di t per cui la conica è degenere.*
b) *Determinare il tipo di conica al variare del parametro t.*
c) *Scrivere la forma canonica di $\mathcal{C}_t$ per $t = -1$.*

Soluzione:

La matrice A' associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 1 & t+2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) $\det(A') = -t$, quindi la conica è degenere per $t = 0$
b) $\det(A) = t^2 + 2t - 1$, quindi:
   - Se $t < -1 - \sqrt{2}$ o $t > -1 + \sqrt{2}$, $\det(A) > 0$ e si tratta di un'ellisse.
   - Se $-1 - \sqrt{2} < t < -1 + \sqrt{2}$ con $t \neq 0$, $\det(A) < 0$ e si tratta di un'iperbole.
   - Se $t = -1 \pm \sqrt{2}$, $\det(A) = 0$ e si tratta di una parabola.
   - Se $t = 0$ otteniamo l'equazione $2xy + 2y^2 - 2y = 0$, quindi si tratta di una coppia di rette incidenti (infatti $\det(A) \neq 0$): $y = 0$ e $x + y - 1 = 0$.

c) Calcoliamo gli autovalori di A per $t = -1$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda = \pm\sqrt{2}$, discordi infatti si tratta di un'iperbole. La conica ha quindi equazione del tipo

$$\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 + k = 0 \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $I_3 = \det(B) = \det(A) = 1$ otteniamo $-2k = 1$, quindi l'equazione di $\mathcal{C}_{-1}$ è

$$\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_{-1} : \quad 2\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}y^2 - 1 = 0$$

□

Esercizio 13.14. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *Calcolare autovalori e autovettori di A.*
b) *Calcolare una matrice diagonalizzante di A, che sia ortogonale e rappresenti una rotazione dello spazio attorno all'origine.*
c) *Scrivere la forma canonica della conica $\mathcal{C}$ con matrice associata A*

SOLUZIONE:

a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = -1, 1, 3$. Calcoliamo gli autospazi:

$$E(1) = N(M - I): \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow E(1) = \langle (1,0,0) \rangle$$

$$E(3) = N(M - 3I): \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \Rightarrow E(3) = \langle (0,1,1) \rangle$$

$$E(-1) = N(M + I): \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \quad \Rightarrow E(-1) = \langle (0,-1,1) \rangle$$

b) Gli autovettori trovati, essendo relativi a autovalori distinti, sono già ortogonali tra loro. E' quindi sufficiente renderli di norma 1 per ottenere la matrice diagonalizzante ortogonale di rotazione:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

c) $\det(A) = -3$, quindi si tratta di una conica non degenere. Inoltre l'autovalore della matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ associata alla forma quadratica è $\lambda = 1$ doppio. Si tratta quindi di un'ellisse e cerchiamo un'equazione del tipo $x^2 + y^2 + t = 0$ a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $\det(A) = \det(B)$ otteniamo $t = -3$. Infine la forma canonica della conica (ellisse reale) è

$$x^2 + y^2 - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 1 = 0$$

Notiamo che si tratta in realtà di una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{3}$.

□

Esercizio 13.15. *Si consideri la conica di equazione*

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

a) *Si determini il tipo di conica.*
b) *Si trovi l'eventuale centro della conica.*
c) *Si trovino gli assi di simmetria e la forma canonica della conica.*

SOLUZIONE:

a) La matrice associata alla conica è

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \det(A) = -5 \neq 0$$

e si tratta di una conica non degenere. Inoltre

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 6 \neq 0$$

quindi si tratta di una conica a centro. Per stabilire se si tratta di un'ellisse o un'iperbole calcoliamo gli autovalori di A:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

quindi gli autovalori di A sono $\lambda = 1, 6$. Poiché gli autovalori sono concordi si tratta di un'ellisse.

b) Per trovare il centro risolviamo il sistema $A| - h$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & | & -1 \\ 2 & 5 & | & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II-I} \begin{bmatrix} 2 & 2 & | & -1 \\ 0 & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = -1 \\ 3y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{6} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad C\left(-\frac{7}{6}, \frac{2}{3}\right)$$

c) Calcoliamo gli autospazi di A:

$$E(1) = N(A - I) : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(1) = \langle(-2, 1)\rangle$$

$$E(6) = N(A - 6I) : \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} \Rightarrow E(6) = \langle(1, 2)\rangle$$

Gli assi sono le rette passanti per il centro, di direzione parallela agli autovettori trovati:

$$a_1 : \begin{cases} x = -\frac{7}{6} - 2t \\ y = \frac{2}{3} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = \frac{1}{6}$$

$$a_2 : \begin{cases} x = -\frac{7}{6} + t \\ y = \frac{2}{3} + 2t \end{cases} \Rightarrow 2x - y = -3$$

Inoltre si tratta di un'ellisse con autovalori $\lambda = 1, 6$. La forma canonica cercata è quindi del tipo $x^2 + 6y^2 + t = 0$, a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Imponendo la condizione $\det(A) = \det(B)$ otteniamo $t = -\frac{5}{6}$. Infine la forma canonica della conica (ellisse reale) è

$$x^2 + 6y^2 - \frac{5}{6} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{6}{5}x^2 + \frac{36}{5}y^2 - 1 = 0$$

□

Esercizio 13.16. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$\mathcal{C} : \; 3x^2 + 14xy - 5y^2 - 10x + 14y = 0$$

a) *Stabilire il tipo di conica.*
b) *Nel caso sia una conica a centro, trovare le coordinate del centro.*
c) *Trovare equazioni degli eventuali asintoti della conica.*

Soluzione:

a) Le matrici A' e A associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 7 \\ -5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

La matrice A' ha determinante non nullo, quindi si tratta di una conica non degenere; inoltre $\det(A) = -64 < 0$, quindi si tratta di un'iperbole.

b) Per trovare il centro risolviamo il sistema $Ax = -h$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & \mid & 5 \\ 7 & -5 & \mid & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow_{3II-7I} \begin{bmatrix} 5 & 7 & \mid & 5 \\ 0 & -64 & \mid & -56 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{8} \\ y = \frac{7}{8} \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

c) Gli asintoti sono rette passanti per il centro, di direzione parallela ai punti all'infinito della conica. L'equazione della conica in coordinate omogenee è $3X^2 + 14XY - 5Y^2 - 10XZ + 14YZ = 0$. Ponendo $Z = 0$ otteniamo l'equazione $3X^2 + 14XY - 5Y^2 = 0$ le cui soluzioni sono

$$\frac{X}{Y} = \frac{-7 \pm 8}{3}$$

cioè le due rette $x + 5y = 0$ e $3x - y = 0$. Infine gli asintoti (passanti per il centro) sono le rette

$$a_1 : \ x + 5y - 4 = 0 \qquad a_2 : \ 3x - y + 2 = 0$$

□

Esercizio 13.17. *Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione*

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0.$$

a) *Si determini il tipo di conica.*
b) *Si trovi la forma canonica della conica.*
c) *Si trovino gli eventuali assi di simmetria della conica.*

Soluzione:

a) Le matrici associate alla conica sono:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $I_3 = \det(A') = -4 \neq 0$, quindi si tratta di una conica non degenere. Inoltre $I_2 = \det(A) = 0$, quindi è una parabola.

b) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda$, quindi A ha autovalori: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. La forma canonica sarà del tipo $x^2 - 2py = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda x^2 + 2ty = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 2ty = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(A')$ è un invariante, quindi $\det(A') = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-4 = -5t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$5x^2 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{4}{5\sqrt{5}} y = 0$$

c) Calcoliamo la direzione dell'asse ricordando che questo è parallelo all'autovettore relativo all'autovalore nullo.

Calcoliamo quindi l'autospazio $E(0)$ risolvendo il sistema omogeneo associato a A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid & 0 \\ 2 & 4 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow_{II-2I} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid & 0 \\ 0 & 0 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases} \Rightarrow E(0) = \langle(-2, 1)\rangle$$

Ora che abbiamo la direzione dell'asse dobbiamo determinarne un punto per potere scrivere l'equazione.

Consideriamo una qualsiasi retta ortogonale all'asse, cioè di direzione $(1, 2)$:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x - y = k \quad \text{per qualche } k$$

Se una tale retta interseca la parabola in due punti D e E, allora il punto medio M del segmento DE sarà un punto dell'asse. Senza tenere k variabile assegnamo a k un valore a caso, la cosa più semplice è porre $k = 0$.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + 4xy + 4y^2 + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 + 8x = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D = (0,0), \quad E = \left(-\frac{8}{25}, -\frac{16}{25}\right)$$

Infine il punto medio M del segmento DE è $M = \left(-\frac{4}{25}, -\frac{8}{25}\right)$.

L'asse è la retta per M parallela all'autovettore relativo a $\lambda = 0$, cioè di direzione $(-2, 1)$:

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{25} - 2t \\ y = -\frac{8}{25} + t \end{cases} \Rightarrow x + 2y = -\frac{4}{5} \Rightarrow 5x + 10y = -4$$

□

Esercizio 13.18. *Sia* $\mathbf{C}$ *la conica di equazione*

$$\mathbf{C} \ : \ 6x^2 + 4xy + 9y^2 - 5x + 10y = 0.$$

a) *Stabilire il tipo di conica e la forma canonica di* $\mathbf{C}$.
b) *Trovare equazioni degli assi di simmetria di* $\mathbf{C}$.

Soluzione:

a) Le matrici associate alla conica sono

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 2 & 9 & 5 \\ -\frac{5}{2} & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza:
- $I_3 = \det(\tilde{A}) = -\frac{1025}{4}$, e si tratta di una conica non degenere.
- $p_A(\lambda) = (6-\lambda)(9-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50$. Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 5$, concordi, e si tratta di un'ellisse.
- Sappiamo che la forma canonica sarà del tipo $ax^2 + by^2 \pm 1 = 0$, cerchiamo quindi un'equazione del tipo

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x^2 + 5y^2 + t = 0$$

a cui è associata la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Sappiamo inoltre che $I_3 = \det(\tilde{A})$ è un invariante, quindi $I_3 = \det(\tilde{A}) = \det(B)$. Risolviamo quindi l'equazione:

$$-\frac{1025}{4} = 50t \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{41}{8}$$

Infine possiamo ricavare la forma canonica:

$$10x^2 + 5y^2 - \frac{41}{8} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{80}{41}x^2 + \frac{40}{41}y^2 - 1 = 0$$

Notiamo che si tratta di un ellisse reale.

b) Determiniamo il centro della conica risolvendo il sistema $A | -h$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & \frac{5}{2} \\ 2 & 9 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow_{3II - I} \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 25 & -\frac{35}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{20} \\ y = -\frac{7}{10} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{13}{20}, -\frac{7}{10}\right)$$

Calcoliamo gli autospazi di A:

$$E(10) = N(A - 10I) : \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x - y = 0$$

$$E(5) = N(A - 5I) : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$$

Infine gli assi hanno la direzione degli autovettori e passano per il centro C:

$$a_1 : \ 2x - y = 2 \qquad\qquad a_2 : \ x + 2y = -\frac{3}{4}$$

$\square$