CAPITOLO 2

# Rette e piani

**Esercizio 2.1.** *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta del piano*

(a) *Passante per i punti* $A(1,2)$ *e* $B(-1,3)$.
(b) *Passante per il punto* $C(2,3)$ *e parallela al vettore* $\overrightarrow{OP} = (-1,2)$.
(c) *Di equazione Cartesiana* $y = 2x+5$. *Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.*

**Esercizio 2.2.** *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta dello spazio*

(a) *Passante per i punti* $A(1,0,2)$ *e* $B(3,-1,0)$.
(b) *Passante per il punto* $P(1,3,1)$ *e parallela al vettore* $\overrightarrow{OQ} = (2,0,0)$.
(c) *Di equazioni Cartesiane*

$$\begin{cases} y = 3x+1 \\ y - x + z = 0 \end{cases}$$

*Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.*

**Esercizio 2.3.**

a) *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana del piano* $\pi$ *passante per i punti* $A(1,3,1)$, $B(2,0,0)$ *e* $C(0,1,1)$. *Il punto* $P(0,2,0)$ *appartiene a tale piano?*
b) *Determinare una equazione della retta passante per* $A$ *ortogonale a* $\pi$.

**Esercizio 2.4.** *Sia* $r$ *la retta di* $\mathbf{R}^3$ *passante per i punti* $A(1,-1,2)$ *e* $B(-2,0,1)$, *e sia* $s$ *la retta contenente* $C(1,3,-3)$ *e parallela al vettore* $OD(2,-2,3)$.

a) *Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).*
b) *Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.*

**Esercizio 2.5.**

a) *Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette* $r$ *e* $r'$ *di equazioni parametriche:*

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \\ z = t+3 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = s \\ y = 2 \\ z = s+2 \end{cases}$$

b) *Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.*

**Esercizio 2.6.** *Determinare la posizione reciproca (parallele, incidenti o sghembe) delle rette* $r$ *e* $r'$ *di equazioni parametriche:*

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = s \\ y = 1 \\ z = 2s+1 \end{cases}$$

**Esercizio 2.7.**

a) *Determinare equazioni parametriche della retta* $r$ *passante per i punti* $A = (2,3,1)$ *e* $B = (0,0,1)$ *e della retta* $s$ *passante per i punti* $C = (0,0,0)$ *e* $D = (4,6,0)$.
b) *Stabilire se* $r$ *e* $s$ *sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente* $r$ *e* $s$.

**Esercizio 2.8.** *Si considerino le rette $r_1$ e $r_2$ di equazioni*

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

a) *Si mostri che le due rette sono incidenti.*
b) *Si determini l'equazione della retta ortogonale a $r_1$ e $r_2$ e passante per il loro punto di intersezione.*

**Esercizio 2.9.** *Si considerino le rette di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) *Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $P(1, 1, 1)$ e incidente $r$ e $s$.*
b) *Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $C(1, 2, -3)$ e perpendicolare a $r$.*
c) *Determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare alle due rette $r$ e $s$.*

**Esercizio 2.10.** *Sia $r$ la retta nello spazio passante per i punti $A = (0, 0, 1)$ e $B = (-2, -1, 0)$. Sia $s$ la retta passante per i punti $C = (1, 1, 1)$ e $D = (-1, 0, 0)$.*

a) *Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano $\pi$ che le contiene.*
b) *Trovare equazioni parametriche della retta per l'origine ortogonale al piano $\pi$ del punto* a).

**Esercizio 2.11.**

a) *Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane della retta $r$ dello spazio passante per i punti $A = (2, -1, 3)$ e $B = (3, 5, 4)$.*
b) *Stabilire se la retta $r$ interseca il piano di equazione cartesiana $2x - y + z = 0$.*

**Esercizio 2.12.** *Sia $r$ la retta nello spazio di equazioni cartesiane $x + z + 1 = 2x + 2y - z - 3 = 0$ e sia $l$ la retta di equazioni parametriche $x = 2t, \ y = -t, \ z = 0$.*

a) *Determinare una equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente il punto $P(1, 2, 3)$ e ortogonale alla retta $l$.*
b) *Stabilire se esiste una retta passante per $P$, contenuta in $\pi$ ed incidente la retta $r$. In caso affermativo determinare equazioni di tale retta.*

**Esercizio 2.13.** *Si considerino i piani dello spazio*

$$\pi : x - y + z = 0 \qquad e \qquad \pi' : 8x + y - z = 0.$$

a) *Stabilire la posizione reciproca dei due piani.*
b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per $P = (1, 1, 1)$ e perpendicolare ai piani $\pi$ e $\pi'$.*

**Esercizio 2.14.**

a) *Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta $r$ passante per i punti $A = (2, 1, 3)$ e $B = (1, 2, 1)$.*
b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano $\pi$ parallelo alla retta $r$ e all'asse $z$ e passante per l'origine.*

**Esercizio 2.15.**

a) *Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano $\pi$ passante per i punti $A = (-1, 1, 1)$ e $B = (2, 0, 1)$ e perpendicolare alla retta $r$ di equazioni cartesiane $x = y - 1 = 0$.*
b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano $\pi'$ parallelo al piano $\pi$ e passante per il punto $C = (0, 1, 2)$.*

**Esercizio 2.16.** *Nello spazio si considerino la due rette di equazioni:*

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} \qquad s: \ x + y - 1 = x - y + z = 0$$

a) *Mostrare che le due rette sono sghembe.*
b) *Determinare un'equazione del piano contenente la retta $r$ e parallelo alla retta $s$.*
c) *Determinare un'equazione del piano parallelo alle due rette ed equidistante da esse.*

**Esercizio 2.17.** *Si considerino le rette $r_1, r_2, r_3$ di equazioni*

$$\begin{aligned} r_1 &: x = 3t + 1, \ y = -t, \ z = 3t + 1 \\ r_2 &: x = s, \ y = 2, \ z = s \\ r_3 &: x - 1 = z = 0 \end{aligned}$$

a) *Si determini un'equazione del piano $\pi$ contenente le rette $r_1$ e $r_2$.*
b) *Si stabilisca se il piano $\pi$ contiene $r_3$.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale del punto $P(1, 2, 0)$ sul piano $\pi_1$.*

**Esercizio 2.18.** *Si considerino i piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ di equazioni*

$$\begin{aligned} \pi_1 &: z - 3 = 0 \\ \pi_2 &: x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &: 3x + 3y - z + 9 = 0 \end{aligned}$$

*e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*

a) *Si stabilisca se il piano $\pi_3$ contiene $r$.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana del piano $\pi_4$ passante per l'origine e contenente $r$.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano $\pi_1$.*

**Esercizio 2.19.** *Si considerino i piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ di equazioni*

$$\begin{aligned} \pi_1 &: 3x + 3y - z = -9 \\ \pi_2 &: x + y + 2 = 0 \\ \pi_3 &: x + y + z = 1 \end{aligned}$$

*e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*

a) *Si stabilisca se il piano $\pi_3$ contiene $r$.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana del piano $\pi_4$ passante per l'origine e contenente $r$.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano $\pi_1$.*

**Esercizio 2.20.** *Si considerino la retta $r$ di equazione*

$$r \ : \ \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

*e la famiglia di piani $\pi_k: \ 2x + ky - z = 1$ dove $k$ è un parametro reale.*

a) *Si determini per quali $k$ il piano $\pi_k$ risulta parallelo a $r$.*
b) *Per il valore di $k$ trovato al punto precedente calcolare la distanza tra $\pi_k$ e $r$.*

**Esercizio 2.21.** *Nel piano, si considerino le rette $r_1, r_2, r_3$ di equazioni*

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \qquad r_2 \ : \ x - 2y + 1 = 0, \qquad r_3 \ : \ 2x + y - 2 = 0.$$

a) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta $r$ parallela a $r_1$ e passante per il punto $A = r_2 \cap r_3$.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta $s$ perpendicolare a $r_1$ e passante per $A$.*
c) *Si calcoli l'angolo tra le rette $r_1$ e $r_2$ e tra le rette $r_2$ e $r_3$.*

**Esercizio 2.22.** *Verificare che i quattro punti*

$$P_1 = (1, 2, 1), \quad P_2 = (2, 1, 0), \quad P_3 = (-1, 0, -1), \quad P_4 = (0, 0, -1)$$

*sono complanari e determinare un'equazione cartesiana del piano che li contiene.*

**Esercizio 2.23.** *Siano $\pi_1$ il piano di equazioni parametriche:*

$$x = 1 + u + v, \quad y = 2 + u - v, \quad z = 3 + u, \qquad u, v \in \mathbf{R}$$

*e $\pi_2$ il piano di equazione cartesiana $x - y + z + 1 = 0$.*

a) *Si scriva l'equazione cartesiana di $\pi_1$.*
b) *Si scrivano le equazioni parametriche della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*
c) *Detta $s$ la retta di equazioni parametriche: $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$, si verifichi che $r$ e $s$ sono sghembe.*

**Esercizio 2.24.** *Siano $r$ e $s$ le rette di equazioni:*

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad s : \begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ z = 2 \end{cases}$$

a) *Si determini l'equazione cartesiana del piano $\pi_1$ contenente $r$ e $s$.*
b) *Si determini l'equazione cartesiana del piano $\pi_2$ perpendicolare a $r$ e $s$ e passante per il punto $C(0, 1, 1)$.*

**Esercizio 2.25.** *Si considerino i tre piani di equazioni*

$$\pi_1 : \ x + y + z = 0, \qquad \pi_2 : \ x - y - z + 1 = 0, \qquad \pi_3 : \ 2x + kz = 1$$

a) *Stabilire la posizione reciproca dei tre piani (paralleli, incidenti in un punto o in una retta ...) al variare di $k$ in $\mathbf{R}$.*
b) *Si determini l'equazione del piano per l'origine e perpendicolare alla retta $r : \pi_1 \cap \pi_2$.*

**Esercizio 2.26.** *Si considerino le rette $r_1$ e $r_2$ di equazioni:*

$$r_1 : \begin{cases} y + z = 2 \\ x = 1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si verifichi che le due rette sono incidenti e se ne determini il punto $P$ di intersezione.*
b) *Si trovi un'equazione parametrica della retta passante per $P$ e ortogonale a $r_1$ e $r_2$.*

**Esercizio 2.27.** *Siano assegnati il punto $A = (1, 2, 1)$ il piano $\pi$ e la retta $s$ di equazioni*

$$\pi : \ x + z = 4, \qquad s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) *Si determini il punto $B$, proiezione ortogonale di $A$ su $\pi$ e la retta $r$ passante per $A$ e per $B$.*
b) *Indicato con $C$ il punto di intersezione tra $s$ e $r$ e con $D$ il punto di intersezione tra $s$ e $\pi$, si determini un'equazione della retta $CD$.*
c) *Si determini l'angolo tra $r$ e la retta $CD$.*

**Esercizio 2.28.** *Nello spazio, si considerino le rette $r_1, r_2$ di equazioni*

$$r_1 \ : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad r_2 \ : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z + y - 3 = 0 \end{cases}$$

a) *Determinare la loro posizione reciproca.*
b) *Determinare un'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente le due rette.*
c) *Determinare un'equazione parametrica della retta passante per $P = (-2, 5, 1)$ e perpendicolare alle rette $r_1$ e $r_2$.*

**Esercizio 2.29.** *Nello spazio, si considerino i piani $\pi_1, \pi_2$ di equazioni*

$$\pi_1 \ : \ 3x - y + z = 0, \qquad \pi_2 \ : 2x + y = 0.$$

a) *Scrivere equazioni parametriche della retta $r$ intersezione di $\pi_1$ e $\pi_2$.*
b) *Determinare un'equazione cartesiana del piano ortogonale ai due piani assegnati e passante per il punto $P = (2, 1, 0)$.*
c) *Trovare la proiezione ortogonale del punto $P$ sulla retta $r$.*

**Esercizio 2.30.** *Siano $r$ la retta passante per i punti $A = (1, 0, 2)$ e $B = (-1, 1, 1)$ e $s$ la retta di equazioni parametriche*

$$s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si determini un'equazione cartesiana del piano perpendicolare a $r$ e passante per il punto $Q$ di intersezione tra l'asse delle $y$ e il piano contenente $r$ e $s$.*
b) *Si trovino equazioni cartesiane e parametriche della retta perpendicolare ad $r$ e $s$ e passante per il punto $P = (1, 3, 1)$.*

**Esercizio 2.31.** *Dati i punti i $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(1, 3)$, determinare l'isometria $f(x, y) = (x', y')$ tale che $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ nei seguenti casi. Stabilire in particolare se si tratta di una traslazione, rotazione, riflessione e glissoriflessione trovando gli eventuali punti fissi.*

a) $O' = \left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$, $A' = \left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$, $B' = \left(-2,\ \frac{7}{2}\right)$.
b) $O' = (1,\ 0)$, $A' = \left(\frac{5 - 2\sqrt{2}}{3},\ \frac{1 + 4\sqrt{2}}{3}\right)$, $B' = \left(\frac{4 - 6\sqrt{2}}{3},\ \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}\right)$.
c) $O' = (0,\ 0)$, $A' = \left(-\frac{2}{5},\ \frac{11}{5}\right)$, $B' = \left(\frac{9}{5},\ \frac{13}{5}\right)$.
d) $O' = (-2,\ 1)$, $A' = \left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right)$, $B' = \left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$.

**Esercizio 2.32.** *Si considerino i punti del piano $A = (0, 0)$, $B = (2t, 0)$, $C = (0, 1)$ e $A' = (2, 2)$, $B' = \left(2 + \sqrt{3}, 3\right)$, $C' = \left(\frac{3}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.*

a) *Per quali valori di $t$ esiste un'isometria diretta che trasforma i punti $A$, $B$, $C$ nei punti $A'$, $B'$, $C'$ rispettivamente?*
b) *Per i valori di $t$ determinati al punto precedente, trovare le equazioni dell'isometria.*
c) *Stabilire se l'isometria $f$ in* b) *ha dei punti fissi, cioè tali che $f(P) = P$.*

---

## 1. Suggerimenti

---

- In $\mathbf{R}^2$ l'equazione **parametrica** della **retta** passante per $P(x_0, y_0)$ e di direzione parallela al vettore $u = (u_1, u_2)$ è:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

- In $\mathbf{R}^2$ la generica equazione **cartesiana** di una **retta** è:

$$r : \quad ax + by + k = 0$$

- In $\mathbf{R}^3$ l'equazione **parametrica** della **retta** passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ e di direzione parallela al vettore $u = (u_1, u_2, u_3)$ è:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

- In $\mathbf{R}^3$ la generica equazione **cartesiana** di una **retta** è data dall'intersezione di due piani:

$$r : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2 \end{cases}$$

---

- In $\mathbf{R}^3$ l'equazione **parametrica** del **piano** passante per $P(x_0, y_0, z_0)$ e di direzioni parallele ai vettori $u = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ e $v = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ è:

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + u_1 t + v_1 s \\ y = y_0 + u_2 t + v_2 s \\ z = z_0 + u_3 t + v_3 s \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

- In $\mathbf{R}^3$ la generica equazione **cartesiana** di un **piano** è :

$$\pi : \quad ax + by + cz = k$$

Il vettore $(a, b, c)$ ha direzione perpendicolare al piano.

---

- Due rette $r_1$ e $r_2$ sono **parallele** se hanno la stessa direzione, ovvero se i rispettivi vettori direzione sono proporzionali.
- In $\mathbf{R}^3$ due rette $r_1$ e $r_2$ sono **sghembe** se non sono parallele e non si intersecano.
- In $\mathbf{R}^3$ due rette $r_1$ e $r_2$ sono **complanari** se non sono sghembe, ovvero se sono parallele oppure si intersecano.
- Due piani $\pi_1$ e $\pi_2$ sono **paralleli** se non si intersecano. Analogamente due piani $\pi_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z = k_1$ e $\pi_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z = k_2$ sono paralleli se i vettori $(a_1, b_1, c_1)$ e $(a_2, b_2.c_2)$ sono proporzionali.
- Una retta $r$ è **perpendicolare** al piano $\pi : \ ax + by + cz = k$ se $r$ ha direzione parallela al vettore $u = (a, b, c)$.

---

- Dati due vettori $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ di $R^3$ chiamiamo **prodotto scalare** di $u$ e $v$ il **numero**:

$$(u, v) = u \cdot v^T = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

- Date due rette $r_1$ parallela a un vettore $u$ e $r_2$ parallela a un vettore $v$, l'**angolo** $\vartheta$ tra le due rette è dato da:

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{u \cdot v^T}{|u| \cdot |v|},$$

dove $|u|$ =**norma** di $u$= **lunghezza** di $u =\sqrt{(u, u)} = \sqrt{u \cdot u^T}$.

---

**Isometrie.** Le isometrie sono trasformazioni del piano $f(x, y) = f(x', y')$ che mantengono le distanze. Un punto $P$ tale che $P' = f(P) = P$ è detto **punto fisso**; una retta $r$ tale che $r' = f(r) = r$ è detta **retta fissa**. Ci sono quattro tipi di isometrie:

- Isometrie **dirette**: mantengono l'orientamento degli angoli. Hanno equazione:

$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases} \qquad \text{con } c^2 + s^2 = 1$$

Ci sono due tipi di isometrie dirette:
  - **Traslazioni**: $s = 0$. Non hanno punti fissi.
  - **Rotazioni**: $s \neq 0$. Hanno un punto fisso (il centro di rotazione) che si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = cx - sy + a \\ y = sx + cy + b \end{cases}$$

- Isometrie **inverse**: non mantengono l'orientamento degli angoli. Hanno equazione:

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases} \qquad \text{con } c^2 + s^2 = 1$$

Ci sono due tipi di isometrie inverse:

- **Riflessioni** o simmetrie rispetto ad una retta. Hanno una retta di punti fisi (l'asse di simmetria) e infinite rette fisse (le rette ortogonali all'asse).
- **Glissoriflessioni**: composizione di una rflessione e di una traslazione parallela all'asse di simmetria. Non hanno punti fissi.

---

## 2. Soluzioni

**Esercizio 2.1.** *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta del piano*

(a) *Passante per i punti* $A(1,2)$ *e* $B(-1,3)$.
(b) *Passante per il punto* $C(2,3)$ *e parallela al vettore* $\overrightarrow{OP} = (-1,2)$.
(c) *Di equazione Cartesiana* $y = 2x+5$. *Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.*

Soluzione:

(a) Poichè $\overrightarrow{AB} = (-2,1)$ otteniamo

$$r: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Per ottenere l'equazione Cartesiana basta ricavare $t$:

$$\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-2(y-2) \\ t = y-2 \end{cases} \Rightarrow x+2y-5=0$$

(b) Possiamo scrivere direttamente l'equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3+2t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Ricaviamo ora l'equazione Cartesiana:

$$\begin{cases} t = 2-x \\ y = 3+2(2-x) \end{cases} \Rightarrow 2x+y-7=0$$

(c) La cosa più semplice è porre una variabile uguale al parametro $t$, ottenendo

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 5+2t \end{cases} \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}$$

Per determinare un punto $P$ appartenente a $r$ è sufficiente trovare un punto $(x,y)$ che soddisfi l'equazione di $r$ (parametrica o cartesiana). Assegnando per esempio il valore 0 al parametro $t$ nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow P(0,5).$$

□

**Esercizio 2.2.** *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana della retta dello spazio*

(a) *Passante per i punti* $A(1,0,2)$ *e* $B(3,-1,0)$.
(b) *Passante per il punto* $P(1,3,1)$ *e parallela al vettore* $\overrightarrow{OQ} = (2,0,0)$.
(c) *Di equazioni Cartesiane*

$$\begin{cases} y = 3x+1 \\ y-x+z=0 \end{cases}$$

*Determinare inoltre un punto appartenente a tale retta.*

Soluzione:

(a) Poichè $\overrightarrow{AB} = (2, -1, -2)$ otteniamo

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \qquad \forall\, t \ \in \ \mathbf{R}$$

Ricaviamo ora l'equazione Cartesiana:

$$\begin{cases} x = 1 + 2(-y) \\ t = -y \\ z = 2 - 2(-y) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che l'equazione Cartesiana di una retta nello spazio è data mediante l'intersezione di due piani.

(b) Possiamo scrivere direttamente l'equazione parametrica:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \forall\, t \ \in \ \mathbf{R}$$

Notiamo che l'equazione si può equivalentemente scrivere

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \forall\, t \ \in \ \mathbf{R}$$

E' immediato ricavare l'equazione Cartesiana:

$$\begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

(c) La cosa più semplice è porre la variabile $x$ uguale al parametro $t$, ottenendo

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -(1 + 3t) + t \end{cases} \quad \Rightarrow \ r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \qquad \forall\, t \ \in \ \mathbf{R}$$

Per determinare un punto $P$ appartenente a $r$ è sufficiente trovare un punto $(x, y, z)$ che soddisfi l'equazione di $r$ (parametrica o cartesiana). Assegnando per esempio il valore 0 al parametro $t$ nell'equazione parametrica otteniamo il punto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow P(0, 1, -1).$$

□

**Esercizio 2.3.**

a) *Determinare l'equazione parametrica e Cartesiana del piano* $\pi$ *passante per i punti* $A(1, 3, 1)$, $B(2, 0, 0)$ *e* $C(0, 1, 1)$. *Il punto* $P(0, 2, 0)$ *appartiene a tale piano?*

b) *Determinare una equazione della retta passante per* $A$ *ortogonale a* $\pi$.

Soluzione:

a) Possiamo determinare prima l'equazione parametrica. Poichè

$$\overrightarrow{AB} = (1, -3, -1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1, -2, 0)$$

otteniamo

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 3 - 3t - 2s \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \forall\, t,\, s \ \in \ \mathbf{R}$$

Per ottenere l'equazione Cartesiana da quella parametrica basta ricavare $s$ e $t$ e procedere per sostituzione:

$$\begin{cases} x = 1 + (1-z) - s \\ y = 3 - 3(1-z) - 2s \\ t = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -x - z + 2 \\ y = 3z - 2(-x - z + 2) \\ t = 1 - z \end{cases} \Rightarrow 2x - y + 5z - 4 = 0$$

In alternativa si può ricavare direttamente l'equazione cartesiana, considerando la generica equazione $ax + by + cz = d$ e imponendo il passaggio per i tre punti $A, B$ e $C$ in modo da ricavare i valori di $a, b, c$ e $d$. Notiamo che così come l'equazione cartesiana è determinata a meno di multipli, anche i valori di $a, b, c$ e $d$ non saranno univocamente determinati.

$$ax + by + cz = d \quad \Rightarrow \begin{array}{ll} A: & a + 3b + c = d \\ B: & 2a = d \\ C: & b + c = d \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} + 3b + (d - b) = d \\ a = \frac{d}{2} \\ c = d - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{d}{4} \\ a = \frac{d}{2} \\ c = \frac{5}{4}d \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di $d$. Ponendo $d = 4$ otteniamo

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 5 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x - y + 5z = 4$$

Infine $P(0, 2, 0)$ appartiene al piano se le sue coordinate soddisfano l'equazione (Cartesiana o parametrica). Sostituendo nell'equazione Cartesiana otteniamo

$$-2 - 4 = 0 \quad \text{no}$$

Poichè le coordinate non soddisfano l'equazione $P$ non appartiene al piano.

Analogamente potevamo sostituire nell'equazione parametrica ottenendo:

$$\begin{cases} 0 = 1 + t - s \\ 2 = 3 - 3t - 2s \\ 0 = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 - s \\ 2 = 3 - 3 - 2s \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 \\ s = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Poichè la prima e seconda equazione si contraddicono il sistema non ammette soluzione e $P$ non appartiene al piano.

b) Sappiamo che dato un generico piano $ax + by + cz = k$ il vettore $(a, b, c)$ è ortogonale al piano. Quindi dall'equazione cartesiana del piano ricaviamo che la retta cercata ha direzione $(2, -1, 5)$. Sappiamo inoltre che tale retta passa per $A = (1, 3, 1)$, quindi

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

□

**Esercizio 2.4.** *Sia $r$ la retta di $\mathbf{R}^3$ passante per i punti $A(1, -1, 2)$ e $B(-2, 0, 1)$, e sia $s$ la retta contenente $C(1, 3, -3)$ e parallela al vettore $\overrightarrow{OD}(2, -2, 3)$.*

a) *Determinare la posizione reciproca delle due rette (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe).*
b) *Se sono incidenti determinarne il punto di intersezione.*

Soluzione:

La retta $r$ passante per $B$ e parallela al vettore $\overrightarrow{BA} = (-3, 1, -1)$ ha equazione parametrica:

$$r: \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \forall t \in R$$

Analogamente

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2h \\ y = 3 - 2h \\ z = -3 + 3h \end{cases} \qquad \forall h \in R$$

a) Osserviamo subito che $r$ e $s$ non sono parallele in quanto i vettori direzione $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{OD}$ non hanno le componenti proporzionali uno rispetto all'altro.

Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione $r\cap s$ risolvendo il sistema di 3 equazioni nelle due incognite $t, h$:

$$\begin{cases} -2-3t=1+2h \\ t=3-2h \\ 1-t=-3+3h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3(3-2h)-2h=3 \\ t=3-2h \\ -(3-2h)-3h=-4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -9+6h-2h=3 \\ t=3-2h \\ -3+2h-3h=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=3 \\ t=3-2h \\ h=1 \end{cases}$$

Poichè la prima e terza equazione si contraddicono il sistema non ammette soluzione e le rette non sono incidenti.

Infine le rette sono sghembe.

In alternativa potevamo per esempio ricavare l'equazione cartesiana di una delle due rette

$$r: \begin{cases} x=-2-3t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=-2 \\ y+z=1 \end{cases}$$

e quindi rislovere il sistema

$$\begin{cases} x=1+2h \\ y=3-2h \\ z=-3+3h \\ x+3y=-2 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2h \\ y=3-2h \\ z=-3+3h \\ 1+2h+9-6h=-2 \\ 3-2h-3+3h=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2h \\ y=3-2h \\ z=-3+3h \\ -4h=-12 \\ h=1 \end{cases}$$

Poichè le ultime due equazioni si contraddicono il sistema non ammette soluzione e le rette non sono incidenti.

Infine le rette sono sghembe.

□

**Esercizio 2.5.**

a) *Determinare la posizione reciproca (cioè se sono incidenti, parallele o sghembe) delle rette $r$ e $r'$ di equazioni parametriche:*

$$r: \begin{cases} x=2t \\ y=t+1 \\ z=t+3 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x=s \\ y=2 \\ z=s+2 \end{cases}$$

b) *Se le rette sono incidenti determinare l'ampiezza dell'angolo tra esse.*

Soluzione:

a) Osserviamo subito che $r$ e $r'$ non sono parallele in quanto $r$ è parallela al vettore $(2,1,1)$ mentre $r'$ è parallela al vettore $(1,0,1)$.

Per stabilire se sono incidenti cerchiamo l'intersezione $r\cap r'$ risolvendo il sistema di 3 equazioni nelle due incognite $t, s$:

$$\begin{cases} 2t=s \\ t+1=2 \\ t+3=s+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=2 \\ t=1 \\ 1+3=2+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=2 \\ t=1 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di $r$ (o analogamente di $r'$) il valore di $t$ (o di $s$) determinato, troviamo che $r$ e $r'$ sono incidenti nel punto $P(2,2,4)$.

b) L'ngolo $\vartheta$ formato dalle rette $r$ e $r'$ corrisponde all'angolo formato dai rispettivi vettori direzione $u=(2,1,1)$ e $v=(1,0,1)$. Possiamo quindi sfruttare la formula

$$\cos(\vartheta)=\frac{(u,v)}{|u|\cdot|v|}=\frac{u\cdot v^T}{|u|\cdot|v|}$$

dove

$$|u| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$|v| = \sqrt{(v,v)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Quindi

$$\cos(\vartheta) = \frac{2+1}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \vartheta = 30°.$$

□

**Esercizio 2.6.** *Determinare la posizione reciproca (parallele, incidenti o sghembe) delle rette $r$ e $r'$ di equazioni parametriche:*

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases} \qquad\qquad r': \begin{cases} x = s \\ y = 1 \\ z = 2s+1 \end{cases}$$

Soluzione:
Cominciamo a verificare se le rette sono incidenti risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2t = s \\ t+1 = 1 \\ t = 2s+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Poichè il sistema non ammette soluzioni le rette non sono incidenti.

Inoltre la retta $r$ è diretta come il vettore $(2,1,1)$ mentre la retta $r'$ è diretta come il vettore $(1,0,2)$ quindi le due rette non sono parallele tra loro.

Di conseguenza $r$ e $r'$ sono sghembe.

□

**Esercizio 2.7.**

a) *Determinare equazioni parametriche della retta $r$ passante per i punti $A = (2,3,1)$ e $B = (0,0,1)$ e della retta $s$ passante per i punti $C = (0,0,0)$ e $D = (4,6,0)$.*
b) *Stabilire se $r$ e $s$ sono complanari. In caso affermativo, trovare un'equazione cartesiana del piano contenente $r$ e $s$.*

Soluzione:

a) Il vettori direzione $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno componenti:

$$\overrightarrow{AB} = (-2,-3,0) \qquad \overrightarrow{CD} = (4,6,0)$$

Quindi:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = -3t \\ z = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4t \\ y = 6t \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Poichè i due vettori direzione sono paralleli lo sono anche le due rette $r$ e $s$ e in particolare le rette sono complanari.

Per determinare il piano che li contiene abbiamo bisogno però di un vettore direzione differente, appartenente al piano. Possiamo per esempio determinare il vettore direzione $\overrightarrow{AC}$ (in quanto $A$ e $C$ appartengono al piano cercato):

$$\overrightarrow{AC} = (2,3,1)$$

Infine il piano $\pi$ che contiene $r$ e $s$ ha equazione parametrica:

$$\pi: \begin{cases} x = -2t + 2s \\ y = -3t + 3s \qquad \forall s,t \in \mathbf{R} \\ z = s \end{cases}$$

Per ricavare l'equazione cartesiana basta eliminare i parametri $s$ e $t$:

$$\begin{cases} x = -2t + 2z \\ y = -3t + 3z \\ z = s \end{cases} \quad \Rightarrow 3x - 2y = 0$$

In alternativa si può ricavare direttamente l'equazione cartesiana, considerando la generica equazione $ax + by + cz = d$ e imponendo il passaggio per tre dei quattro punti, per esempio $B, C$ e $D$ in modo da ricavare i valori di $a, b, c$ e $d$. Notiamo che così come l'equazione cartesiana è determinata a meno di multipli, anche i valori di $a, b, c$ e $d$ non saranno univocamente determinati.

$$ax + by + cz = d \quad \Rightarrow \begin{array}{ll} B: & c = d \\ C: & 0 = d \\ D: & 4a + 6b = d \end{array} \quad \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \\ a = -\frac{3}{2}b \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di $b$. Ponendo $b = 2$ otteniamo

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -3x + 2y = 0$$

□

**Esercizio 2.8.** *Si considerino le rette $r_1$ e $r_2$ di equazioni*

$$r_1 \; : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad r_2 \; : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

a) *Si mostri che le due rette sono incidenti.*
b) *Si determini l'equazione della retta ortogonale a $r_1$ e $r_2$ e passante per il loro punto di intersezione.*

Soluzione:

a) Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \\ x + y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \\ 1 + t + 2t = 1 \\ 1 + t - 2t + 1 + t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \\ 3t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = 0 \end{cases}$$

Quindi le rette sono incidenti nel punto $P(1, 0, 1)$.

b) Determiniamo l'equazione parametrica di $r_2$:

$$r_2 : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Quindi $r_2$ è parallela al vettore $(-1, 1, 2)$.

Per determinare la direzione ortogonale a $r_1$ e $r_2$ determiniamo la Il piano $\pi$ passante per $P$ e contenente $r_1$ e $r_2$. $\pi$ ha direzioni parallele a $r_1$ e $r_2$ e quindi ha equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 0 + 2t + s \\ z = 1 + t + 2s \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 + 3t \\ 2x + z = 3 + 3t \end{cases} \quad x - y + z = 2$$

Di conseguenza la direzione ortogonale a $\pi$ (e quindi a $r_1$ e $r_2$) è $(1, -1, 1)$. Infine la retta cercata ha equazione

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Un metodo alternativo consisteva nel determinare il piano $\pi_1$ ortogonale a $r_1$ e il piano $\pi_2$ ortogonale a $r_2$ passanti per $P$. Il piano ortogonale a $r_1$ ha equazione del tipo $x + 2y + z = d$. Imponendo il passaggio per $P$ otteniamo $1 + 1 = d$, quindi

$$\pi_1 : \ x + 2y + z = 2$$

In maniera analoga

$$\pi_2 : \ -x + y + 2z = 1$$

La retta cercata è data dall'intersezione di $\pi_1$ e $\pi_2$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3y + 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Notiamo che anche se l'equazione parametrica è differente, si tratta ovviamente della stessa retta.

□

**Esercizio 2.9.** *Si considerino le rette di equazioni cartesiane*

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

a) *Dopo avere verificato che le due rette sono incidenti, determinare l'equazione cartesiana della retta passante per $P(1,1,1)$ e incidente $r$ e $s$.*
b) *Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per $C(1,2,-3)$ e perpendicolare a $r$.*
c) *Determinare equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P = (1,1,1)$ e perpendicolare alle due rette $r$ e $s$.*

SOLUZIONE:

a) Cominciamo con il determinare se le rette $r$ e $s$ sono incidenti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Quindi le rette sono incidenti nel punto $O(0,0,0)$. E' allora sufficiente determinare l'equazione della retta passante per $P(1,1,1)$ e $O(0,0,0)$. In questo modo tale retta interseca $r$ e $s$. La direzione è data dal vettore $\overrightarrow{OP}(1,1,1)$, quindi la retta cercata ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

b) Il piano passante per $C(1,2,-3)$ e perpendicolare a $r$ ha equazione del tipo

$$ax + by + cz = k$$

dove $a,\ b,\ c$ corrispondono alle componenti del vettore direzione di $r$ (perpendicolare al piano), mentre il valore di $k$ si determina imponendo il passaggio per $C$.

Determiniamo quindi l'equazione parametrica di $r$:

$$r : \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Quindi $r$ è parallela al vettore $(-2,1,1)$, e il piano cercato è del tipo

$$-2x + y + z = k$$

Imponendo poi il passaggio per $C(1,2,-3)$ otteniamo:

$$-2 \cdot 1 + 2 + (-3) = k \qquad \Rightarrow \qquad k = -3$$

Infine il piano cercato ha equazione:

$$-2x + y + z = -3$$

c) Scriviamo l'equazione di $r$ e $s$ in forma parametrica:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Il piano passante per $P(1,1,1)$ e perpendicolare a $r$ ha equazione

$$-2x + y + z = 0$$

Analogamente il piano passante per $P(1,1,1)$ e perpendicolare a $s$ ha equazione

$$-y + z = 0$$

La retta cercata è data dall'intersezione dei due piani appena determinati:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Notiamo che la retta coincide, casualmente, con quella determinata al punto precedente.

Un metodo alternativo consisteva nel calcolare il piano $\pi$ contenente $r$ e $s$. Tale piano ha direzione parallela ai due vettori direzione di $r$ e $s$ e contiene il punto $O(0,0,0)$ di intersezione di $r$ e $s$:

$$r: \begin{cases} x = -2t \\ y = t - s \\ z = t + s \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 0$$

La retta cercata è quindi la retta passante per $P$ e perpendicolare a tale piano:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Notiamo che si tratta, ovviamente, della stessa retta determinata con l'altro metodo, scritta in maniera differente.

□

**Esercizio 2.10.** *Sia $r$ la retta nello spazio passante per i punti $A = (0,0,1)$ e $B = (-2,-1,0)$. Sia $s$ la retta passante per i punti $C = (1,1,1)$ e $D = (-1,0,0)$.*

a) *Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano $\pi$ che le contiene.*
b) *Trovare equazioni parametriche della retta per l'origine ortogonale al piano $\pi$ del punto* a).

Soluzione:

a) Due rette sono complanari se sono parallele o incidenti.

Il vettori direzione $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ hanno componenti:

$$\overrightarrow{AB} = (-2,-1,-1) \qquad \overrightarrow{CD} = (-2,-1,-1)$$

Poichè i due vettori sono paralleli lo sono anche le due rette $r$ e $s$ e quindi in particolare sono complanari. Per determinare il piano che li contiene abbiamo bisogno però di un vettore direzione differente, appartenente al piano. Possiamo per esempio determinare il vettore direzione $\overrightarrow{AC}$ (in quanto $A$ e $C$ appartengono al piano cercato):

$$\overrightarrow{AC} = (1,1,0)$$

Infine il piano $\pi$ che contiene $r$ e $s$ ha equazione parametrica:

$$\pi: \begin{cases} x = -2t + s \\ y = -t + s \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

Per ricavare l'equazione cartesiana basta eliminare i parametri $s$ e $t$:

$$\begin{cases} t = 1 - z \\ x = -2 + 2z + s \\ y = -1 + z + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 - z \\ s = x + 2 - 2z \\ y = -1 + z + x + 2 - 2z \end{cases} \Rightarrow x - y - z + 1 = 0$$

b) Un vettore perpendicolare al piano $\pi$ ha componenti proporzionali ai cofficienti della $x, y$ e $z$ dell'equazione cartesiana di $\pi$, ovvero $(1, -1, -1)$ (o un suo multiplo). Di conseguenza l'equazione della retta cercata è

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

□

**Esercizio 2.11.**

a) *Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane della retta $r$ dello spazio passante per i punti $A = (2, -1, 3)$ e $B = (3, 5, 4)$.*
b) *Stabilire se la retta $r$ interseca il piano di equazione cartesiana $2x - y + z = 0$.*

Soluzione:

a) Il vettore direzione $\overrightarrow{AB}$ é dato da $\overrightarrow{AB} = (-1, -6, -1)$, di conseguenza l'equazione parametrica di $r$ é:

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 6t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Per determinare l'equazione cartesiana ricaviamo il parametro $t$ per esempio dalla prima equazione e lo sostituiamo nelle altre due ottenendo

$$r : \begin{cases} 6x - y - 13 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) Per calcolare l'eventuale intersezione tra $r$ e il piano assegnato possiamo mettere a sistema l'equazione cartesiana di $r$ con quella del piano:

$$\begin{cases} 6x - y - 13 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

In questo caso risulta forse più semplice mettere a sistema l'equazione parametrica di $r$ con quella del piano:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 2(2 - t) - (-1 - 6t) + (3 - t) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 6t \\ z = 3 - t \\ t = -\dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{14}{3} \\ y = 15 \\ z = \dfrac{17}{3} \\ t = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Di conseguenza la retta $r$ interseca il piano nel punto $P\left(\dfrac{14}{3},\ 15,\ \dfrac{17}{3}\right)$.

□

**Esercizio 2.12.** *Sia $r$ la retta nello spazio di equazioni cartesiane $x + z + 1 = 2x + 2y - z - 3 = 0$ e sia $l$ la retta di equazioni parametriche $x = 2t,\ y = -t,\ z = 0$.*

a) *Determinare una equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente il punto $P(1,2,3)$ e ortogonale alla retta $l$.*
b) *Stabilire se esiste una retta passante per $P$, contenuta in $\pi$ ed incidente la retta $r$. In caso affermativo determinare equazioni di tale retta.*

SOLUZIONE:

a) La retta $l$ ha direzione $(2,-1,0)$, quindi il piano ortogonale a $l$ ha equazione del tipo $2x-y=d$. Imponendo il passaggio per il punto $P$ si ottiene $2-2=d$, quindi $d=0$ e
$$\pi: \qquad 2x-y=0$$
b) Il punto $P$ appartiene a $\pi$; se la retta $r$ interseca $\pi$ in un punto $A$, la retta passante per $A$ e $P$ è la retta cercata. Determiniamo quindi l'eventuale intersezione tra $r$ e $\pi$:
$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z=-1 \\ 2x+2y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x+z=-1 \\ 6x-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x+z=-1 \\ 7x=2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow A\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, -\frac{9}{7}\right)$$
Determiniamo quindi il vettore direzione $\overrightarrow{AP}$
$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{30}{7}\right) \quad \text{parallelo a} \quad (1,2,6)$$
Infine la retta cercata ha equazioni
$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+6t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2x-y=0 \\ 6x-z=3 \end{cases}$$

□

**Esercizio 2.13.** *Si considerino i piani dello spazio*
$$\pi \,:\, x-y+z=0 \qquad e \qquad \pi' \,:\, 8x+y-z=0.$$
a) *Stabilire la posizione reciproca dei due piani.*
b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per $P=(1,1,1)$ e perpendicolare ai piani $\pi$ e $\pi'$.*

SOLUZIONE:

a) Due piani o sono paralleli o la loro intersezione è una retta. In questo caso il piano $\pi$ è perpendicolare al vettore $(1,-1,1)$, mentre $\pi'$ è perpendicolare al vettore $(8,1,-1)$, quindi i piani non sono paralleli tra loro. Determiniamo la loro intersezione mettendo a sistema le loro equazioni:
$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 8x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$
Quindi i piani si intersecano nella retta
$$\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$
b) La direzione perpendicolare al piano $\pi$ è data dal vettore $(1,-1,1)$, mentre la direzione perpendicolare a $\pi'$ è $(8,1,-1)$. Di conseguenza il piano perpendicolare a $\pi$ e $\pi'$ passante per il punto $P(1,1,1)$ ha equazione parametrica:
$$\begin{cases} x=1+t+8s \\ y=1-t+s \\ z=1+t-s \end{cases}$$

Ricavando i parametri $s$ e $t$ e sostituendo si ottiene una equazione cartesiana:

$$y + z = 2$$

In alternativa si può osservare che un piano pependicolare a $\pi$ e $\pi'$ è anche perpendicolare alla retta loro intersezione. Di conseguenza il piano cercato è perpendicolare al vettore $(0, 1, 1)$ (direzione della retta intersezione), ovvero ha equazione del tipo $y+z = k$. Imponendo il passaggio per $P$ si ottiene direttamente l'equazione cartesiana:

$$y + z = 2$$

□

**Esercizio 2.14.**

a) *Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta $r$ passante per i punti $A = (2, 1, 3)$ e $B = (1, 2, 1)$.*
b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano $\pi$ parallelo alla retta $r$ e all'asse $z$ e passante per l'origine.*

SOLUZIONE:

a) $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -2)$, quindi

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - z = 1 \end{cases}$$

b) L'asse delle $z$ ha equazione

$$a_z : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

quindi il piano $\pi$ cercato ha come direzioni $(-1, 1, -2)$, $(0, 0, 1)$:

$$\pi : \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -2t + s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x + y = 0$$

□

**Esercizio 2.15.**

a) *Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano $\pi$ passante per i punti $A = (-1, 1, 1)$ e $B = (2, 0, 1)$ e perpendicolare alla retta $r$ di equazioni cartesiane $x = y - 1 = 0$.*
b) *Trovare un'equazione cartesiana del piano $\pi'$ parallelo al piano $\pi$ e passante per il punto $C = (0, 1, 2)$.*

SOLUZIONE:

a) La retta $r$ ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi $r$ ha direzione $(0, 0, 1)$ e un piano ad essa perpendicolare ha equazione del tipo $z = k$. Imponendo il passaggio per $A$ (o per $B$) si ottiene $k = 1$. Infine il piano $\pi$ cercato ha equazione cartesiana $z = 1$. Una equazione parametrica di $\pi$ è

$$\pi : \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 1 \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R}$$

b) Un piano parallelo al piano $\pi$ ha equazione del tipo $z = k$. Imponendo il passaggio per $C$ si ottiene $k = 2$. Infine il piano $\pi'$ cercato ha equazione $z = 2$.

□

**Esercizio 2.16.** *Nello spazio si considerino la due rette di equazioni:*

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} \qquad s: \ x + y - 1 = x - y + z = 0$$

a) *Mostrare che le due rette sono sghembe.*
b) *Determinare un'equazione del piano contenente la retta $r$ e parallelo alla retta $s$.*
c) *Determinare un'equazione del piano parallelo alle due rette ed equidistante da esse.*

Soluzione:

a) Due rette del piano sono sghembe se non sono parallele e non si intersecano. L'equazione parametrica di $s$ è:

$$s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Quindi $r$ ha direzione $(1, -1, 0)$ mentre $s$ ha direzione $(-1, 1, 2)$ e le due rette non sono parallele. Inoltre se calcoliamo $r \cap s$:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ x + y - 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ 1 + t + 1 - t - 1 = 0 \\ 1 + t - 1 + t + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \\ 1 = 0 \\ 3 + 2t = 0 \end{cases}$$

il sistema non ammette soluzione, quindi le due rette non si intersecano.

Di conseguenza $r$ e $s$ sono sghembe.

b) Sia $\pi$ il piano cercato. Poiché $\pi$ contiene $r$, deve essere parallelo a $r$ e passare per un punto di $r$. Sia $A = (1, 1, 3)$ il punto di $r$, imponendo inoltre le condizioni di parallelismo alle due rette, otteniamo:

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 1 - t + s \\ z = 3 + 2s \end{cases} \Rightarrow x + y = 2$$

c) Si può procedere in più modi. Forse il più semplice è calcolare il piano $\pi'$ passante per $s$ e parallelo a $r$ in maniera analoga al punto precedente. Sia $B = (1, 0, -1)$ il punto di $s$:

$$\pi': \begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = -t + s \\ z = -1 + 2s \end{cases} \Rightarrow x + y = 1$$

Il piano cercato è parallelo a $\pi$ e $\pi'$, quindi ha una equazione del tipo $x + y = d$. Inoltre essendo equidistante da $r$ e da $s$ è anche equidistante da $\pi$ e $\pi'$, ovvero il valore di $d$ è dato dalla media degli analoghi valori di $\pi$ e $\pi'$:

$$d = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$

Infine il piano cercato è

$$x + y = \frac{3}{2}$$

□

**Esercizio 2.17.** *Si considerino le rette $r_1, r_2, r_3$ di equazioni*

$$\begin{aligned} r_1 &: \ x = 3t + 1, \ y = -t, \ z = 3t + 1 \\ r_2 &: \ x = s, \ y = 2, \ z = s \\ r_3 &: \ x - 1 = z = 0 \end{aligned}$$

a) *Si determini un'equazione del piano $\pi$ contenente le rette $r_1$ e $r_2$.*
b) *Si stabilisca se il piano $\pi$ contiene $r_3$.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale del punto $P(1, 2, 0)$ sul piano $\pi_1$.*

Soluzione:

a) Notiamo che $r_1$ ha direzione $(3,-1,3)$ e $r_2$ ha direzione $(1,0,1)$. Le due rette sono comunque complanari in quanto si intersecano:

$$\begin{cases} 3t+1=s \\ -t=2 \\ 3t+1=s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=-5 \\ t=-2 \end{cases} \Rightarrow r_1 \cap r_2 = A(-5,2,-5)$$

Quindi il piano cercato ha equazioni:

$$\pi : \begin{cases} x=-5+3t+s \\ y=2-t \\ z=-5+3t+s \end{cases} \Rightarrow x-z=0$$

b) Un modo per verificare se $\pi$ contiene $r_3$ è di controllare se $\pi$ contiene due qualsiasi punti di $r_3$. Dall'equazione di $r_3$ otteniamo per esempio i punti $B(1,0,0)$ e $C(1,1,0)$ di $r_3$. Quindi $\pi$ contiene $B$ e $C$ se:

$$1-0=0$$
$$1-0=0$$

Siccome le condizioni non sono verificate $B$ e $C$, e di conseguenza $r_3$, non sono contenuti in $\pi$.

c) Determiniamo la retta $s$ per $P$ ortogonale a $\pi$, cioè di direzione $(1,0,-1)$:

$$s : \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=-t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale dell'origine sul piano $\pi$ è quindi l'intersezione di $s$ con $\pi$:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=-t \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=-t \\ 1+t+t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=2 \\ z=\frac{1}{2} \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è il punto $D\left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{2}\right)$.

□

**Esercizio 2.18.** *Si considerino i piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ di equazioni*

$$\begin{aligned} \pi_1 &: z-3=0 \\ \pi_2 &: x+y+2=0 \\ \pi_3 &: 3x+3y-z+9=0 \end{aligned}$$

*e la retta $r=\pi_1 \cap \pi_2$.*

a) *Si stabilisca se il piano $\pi_3$ contiene $r$.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana del piano $\pi_4$ passante per l'origine e contenente $r$.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano $\pi_1$.*

Soluzione:

Calcoliamo un'equazione parametrica di $r=\pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} z-3=0 \\ x+y+2=0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x=-t-2 \\ y=t \\ z=3 \end{cases}$$

a) Un modo per verificare se $\pi_3$ contiene $r$ è di controllare se $\pi_3$ contiene due qualsiasi punti di $r$. Dall'equazione parametrica di $r$, assegnando per esempio i valori $t=0$ e $t=1$ otteniamo i punti $A(-2,0,3)$ e $B(-3,1,3)$ di $r$. Quindi $\pi_3$ contiene $A$ e $B$ se:

$$3\cdot(-2)+3\cdot 0-3+9=0$$
$$3\cdot(-3)+3\cdot 1-3+9=0$$

Siccome le due condizioni sono verificate $A$ e $B$, e di conseguenza $r$, sono contenuti in $\pi_3$.

b) Un piano $\pi_4$ contenente $r$ contiene i suoi due punti $A$ e $B$. Si tratta quindi di trovare l'equazione del piano per $A, B$ e l'origine. Poiché chiede l'equazione cartesiana la cosa più semplice è probabilmente considerare la generica equazione cartesiana e imporre il passaggio pre i tre punti:

$$ax + by + cz = d \quad \Rightarrow \begin{cases} -2a + 3c = d \\ -3a + b + 3c = d \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}c \\ b = \frac{3}{2}c \\ d = 0 \end{cases}$$

Possiamo ora scegliere un valore di $c$. Ponendo $c = 2$ otteniamo

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 3x + 3y + 2z = 0$$

In alternativa potevamo ricavare l'equazione parametrica e da questa ricavare l'equazione cartesiana. Poichè $\overrightarrow{OA} = (-2, 0, 3)$ e $\overrightarrow{OB} = (-3, 1, 3)$, otteniamo le equazioni di $\pi_4$:

$$\pi_4 : \begin{cases} x = -2t - 3s \\ y = s \\ z = 3t + 3s \end{cases} \Rightarrow 3x + 3y + 2z = 0$$

c) Determiniamo la retta $s$ per l'origine ortogonale a $\pi_1$, cioè di direzione $(0, 0, 1)$:

$$s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale dell'origine sul piano $\pi_1$ è quindi l'intersezione di $s$ con $\pi_1$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è il punto $P(0, 0, 3)$.

□

**Esercizio 2.19.** *Si considerino i piani $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ di equazioni*

$$\pi_1 \ : \ 3x + 3y - z = -9$$
$$\pi_2 \ : \ x + y + 2 = 0$$
$$\pi_3 \ : \ x + y + z = 1$$

*e la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*

a) *Si stabilisca se il piano $\pi_3$ contiene $r$.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana del piano $\pi_4$ passante per l'origine e contenente $r$.*
c) *Si calcoli la proiezione ortogonale dell'origine sul piano $\pi_1$.*

SOLUZIONE:

Calcoliamo un'equazione parametrica di $r = \pi_1 \cap \pi_2$:

$$\begin{cases} 3x + 3y - z = -9 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = t \\ y = -t - 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

a) Un modo per verificare se $\pi_3$ contiene $r$ è di controllare se $\pi_3$ contiene due qualsiasi punti di $r$. Dall'equazione parametrica di $r$, assegnando per esempio i valori $t = 0$ e $t = 1$ otteniamo i punti $A(0, -2, 3)$ e $B(1, -3, 3)$ di $r$. Quindi $\pi_3$ contiene $A$ e $B$ se:

$$0 + (-2) + 3 = 1$$
$$1 + (-3) + 3 = 1$$

Siccome le due condizioni sono verificate $A$ e $B$, e di conseguenza $r$, sono contenuti in $\pi_3$.

b) Un piano $\pi_4$ contenente $r$ contiene i suoi due punti $A$ e $B$. Si tratta quindi di trovare l'equazione del piano per $A, B$ e l'origine. Poichè $\overrightarrow{OA} = (0, -2, 3)$ e $\overrightarrow{OB} = (1, -3, 3)$, otteniamo le equazioni di $\pi_4$:

$$\pi_4 : \begin{cases} x = s \\ y = -2t - 3s \\ z = 3t + 3s \end{cases} \Rightarrow 3x + 3y + 2z = 0$$

c) Determiniamo la retta $s$ per l'origine ortogonale a $\pi_1$, cioè di direzione $(3, 3, -1)$:

$$s : \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$$

La proiezione ortogonale dell'origine sul piano $\pi_1$ è quindi l'intersezione di $s$ con $\pi_1$:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = -t \\ 3x + 3y - z = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = -t \\ 9t + 9t + t = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 3t \\ z = -t \\ t = -\frac{9}{19} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{27}{19} \\ y = -\frac{27}{19} \\ z = \frac{9}{19} \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è il punto $P\left(-\frac{27}{19}, -\frac{27}{19}, \frac{9}{19}\right)$.

$\square$

**Esercizio 2.20.** *Si considerino la retta $r$ di equazione*

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

*e la famiglia di piani $\pi_k : \ 2x + ky - z = 1$ dove $k$ è un parametro reale.*

a) *Si determini per quali $k$ il piano $\pi_k$ risulta parallelo a $r$.*
b) *Per il valore di $k$ trovato al punto precedente calcolare la distanza tra $\pi_k$ e $r$.*

Soluzione:

a) Un metodo consiste nel mettere a sistema retta e piano e stabilire per quali $k$ il sistema non ammette soluzione:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \\ 2x + ky - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = 1 \\ (2 - 2k)t = 3k - 2 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile, e quindi $r$ e $\pi$ sono paralleli, se $k = 1$.

Un altro metodo consiste nell'imporre l'ortogonalità tra il vettore direzione di $r$, $(1, -2, 0)$ e il vettore normale al piano, $(2, k, -1)$:

$$((1, -2, 0), (2, k, -1)) = 2 - 2k = 0 \iff k = 1$$

b) Consideriamo un punto di $r$, per esempio il punto $A(2, -3, 1)$, e sia $s$ la retta passante per $A$ e perpendicolare a $\pi$. Poichè la direzione ortogonale a $\pi$ è $(2, 1, -1)$, l'equazione parametrica di $s$ è:

$$s : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Il punto $B = s \cap \pi$ è dato da:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \\ 4 + 4t - 3 + t - 1 + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{6} \\ y = -\frac{17}{6} \\ z = \frac{5}{6} \\ t = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Quindi $B = s \cap \pi = \left(\frac{14}{6}, \ -\frac{17}{6}, \ \frac{1}{6}\right)$.

Infine

$$d(\pi, r) = d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

In alternativa si può usare la formula della distanza punto-piano, considerando un qualsiasi punto di $r$, per esempio $(2, -3, 1)$ e l'equazione del piano $\pi :\ 2x + y - z - 1 = 0$:

$$d(\pi, r) = d(\pi, (2, -3, 1)) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

□

**Esercizio 2.21.** *Nel piano, si considerino le rette $r_1, r_2, r_3$ di equazioni*

$$r_1\ :\ \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \qquad r_2\ :\ x - 2y + 1 = 0, \qquad r_3\ :\ 2x + y - 2 = 0.$$

a) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta $r$ parallela a $r_1$ e passante per il punto $A = r_2 \cap r_3$.*
b) *Si trovi un'equazione cartesiana della retta $s$ perpendicolare a $r_1$ e passante per $A$.*
c) *Si calcoli l'angolo tra le rette $r_1$ e $r_2$ e tra le rette $r_2$ e $r_3$.*

Soluzione:

a) Determiniamo $A = r_2 \cap r_3$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

La retta $r$ è quindi la retta per $A$ di direzione parallela al vettore $(-2, 2)$:

$$r:\ \begin{cases} x = \frac{3}{5} - 2t \\ y = \frac{4}{5} + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow x + y - \frac{7}{5} = 0$$

In alternativa potevamo ricavare l'equazione cartesiana di $r_1$:

$$r_1:\ \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \end{cases} \quad \Rightarrow\ x + y - 1 = 0 \Rightarrow\ y = -x + 1$$

Di conseguenza l'equazione cartesiana di $r$ è:

$$y - \frac{4}{5} = -\left(x - \frac{3}{5}\right) \ \Rightarrow\ x + y - \frac{7}{5} = 0$$

b) Utilizzando l'equazione parametrica di $s$, una direzione perpendicolare a quella di $r_1$ è data dal vettore $(2, 2)$, quindi:

$$s:\ \begin{cases} x = \frac{3}{5} + 2t \\ y = \frac{4}{5} + 2t \end{cases} \quad \Rightarrow\ x - y + \frac{1}{5} = 0$$

Utilizzando in alternativa l'equazione cartesiana di $r_1$, la retta $s$ ha coefficiente angolare opposto del reciproco del coefficiente angolare di $r_1$, quindi 1:

$$s:\ y - \frac{4}{5} = \left(x - \frac{3}{5}\right) \Rightarrow\ x - y + \frac{1}{5} = 0$$

c) Ricaviamo le equazioni parametriche delle tre rette per avere dei vettori direzione. Sappiamo già che $r_1$ è parallela a $v_1 = (-2, 2)$, inoltre

$$r_2:\ \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases} \qquad\qquad r_3:\ \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

Quindi $r_2$ è parallela a $v_2(2, 1)$ e $r_3$ è parallela a $v_3(1, -2)$. Infine

$$\cos(v_1 v_2) = \frac{-4 + 2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-2}{2\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Notiamo che i vettori $v_2$ e $v_3$ sono ortogonali, quindi l'angolo tra $r_2$ e $r_3$ è $\frac{\pi}{2}$.

□

**Esercizio 2.22.** *Verificare che i quattro punti*

$$P_1 = (1,2,1), \quad P_2 = (2,1,0), \quad P_3 = (-1,0,-1), \quad P_4 = (0,0,-1)$$

*sono complanari e determinare un'equazione cartesiana del piano che li contiene.*

Soluzione:

Sia $ax + by + cz + d = 0$ la generica equazione cartesiana di un piano. Determiniamo il piano $\pi$ passante per $P_2$, $P_3$ e $P_4$ utilizzando la condizione di passaggio per un punto. Si ottiene quindi il sistema:

$$\begin{cases} 2a + b + d = 0 \\ -a - c + d = 0 \\ -c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a - d \\ a = -c + d \\ c = d \end{cases}$$

Ricordando inoltre che l'equazione cartesiana è determinata a meno di un multiplo, possiamo porre arbitrariamente $d = 1$, ottenendo:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi : \ -y + z + 1 = 0$$

A questo punto per stabilire se i quattro punti sono complanari è sufficiente verificare che $P_1$ passa per $\pi$, ovvero che ne soddisfa l'equazione: $-2 + 1 + 1 = 0$.

Notiamo che abbiamo inizialmente scelto $P_2, P_3, P_4$ solo perché il sistema risultante era più semplice. Era però del tutto equivalente scegliere un'altra terna di punti e verificare poi il passaggio per il quarto punto.

□

**Esercizio 2.23.** *Siano $\pi_1$ il piano di equazioni parametriche:*

$$x = 1 + u + v, \quad y = 2 + u - v, \quad z = 3 + u, \qquad u, v \in \mathbf{R}$$

*e $\pi_2$ il piano di equazione cartesiana $x - y + z + 1 = 0$.*

a) *Si scriva l'equazione cartesiana di $\pi_1$.*
b) *Si scrivano le equazioni parametriche della retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.*
c) *Detta $s$ la retta di equazioni parametriche: $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$, si verifichi che $r$ e $s$ sono sghembe.*

Soluzione:

a) Per trovare l'equazione cartesiana di $\pi_1$:

$$\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u - v \\ z = 3 + u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + u + v \\ x + y = 3 + 2u \\ uz - 3 \end{cases} \Rightarrow \quad \pi_1 : \quad x + y - 2z = -3.$$

c) Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow_{II + I} \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x - z = -4 \end{cases} \Rightarrow \quad r : \begin{cases} x = s \\ y = 5 + 3s \\ z = 4 + 2s \end{cases} \quad \forall s \in \mathbf{R}$$

c) $r$ è parallela a $(1,3,2)$, mentre $s$ è parallela a $(1,-1,2)$, quindi le due rette non sono parallele. Per stabilire se sono secanti o sghembe risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 1 + t = s \\ 2 - t = 5 + 3s \\ 3 + 2t = 4 + 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + t = s \\ 2 - t = 5 + 3 + 3t \\ 3 + 2t = 4 + 2 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + t = s \\ 4t = -6 \\ 3 = 6 \end{cases}$$

Poiché l'ultima equazione è impossibile il sistema non ha soluzione e le rette sono sghembe.

□

**Esercizio 2.24.** *Siano $r$ e $s$ le rette di equazioni:*

$$r:\begin{cases} x=1+2t\\ y=3t\\ z=1\end{cases}\qquad \forall t\in\mathbf{R},\qquad\qquad s:\begin{cases}3x-2y=-2\\ z=2\end{cases}$$

a) *Si determini l'equazione cartesiana del piano $\pi_1$ contenente $r$ e $s$.*
b) *Si determini l'equazione cartesiana del piano $\pi_2$ perpendicolare a $r$ e $s$ e passante per il punto $C(0,1,1)$.*

Soluzione:

a) L'equazione parametrica di $s$ è

$$s:\begin{cases} x=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}t\\ y=t\\ z=2\end{cases}\qquad \forall t\in\mathbf{R},$$

quindi $r$ e $s$ hanno entrambe direzione $(2,3,0)$ e sono parallele, quindi complanari. Per determinare un'altra direzione di $\pi_1$ consideriamo due qualsiasi punti di $r$ e $s$ e la direzione da essi individuata:

$$A(1,0,1)\in r,\qquad B\left(-\frac{2}{3},0,2\right)\in s\ \Rightarrow\ AB=\left(-\frac{5}{3},0,1\right)\ \Rightarrow\ (-5,0,3)$$

$\pi_1$ è quindi il piano di direzioni $(2,3,0)$ e $(-5,0,3)$ e passante per $A$:

$$\pi_1:\begin{cases} x=1-5t+2s\\ y=3s\\ z=1+3t\end{cases}\qquad \forall s,t\in\mathbf{R},\ \Rightarrow\ 3x-2y+5z=8$$

In alternativa potevamo osservare dall'inizio che $r$ e $s$ sono parallele in quanto dal testo è chiaro che non sono sghembe e nelle rispettive equazioni contengono rispettivamente le equazioni $z=1$ e $z=2$ in contraddizione. Di conseguenza il sistema $r\cap s$ non può avere soluzione e le rette sono parallele. Per determinare direttamente l'equazione cartesiana si può inoltre determinare tre qualsiasi punti, due su una retta e uno sull'altra e imporre al generico piano $ax+by+cz=d$ il pasaggio per i tre punti. Ponendo per esempio $t=0$ e $t=1$ nell'equazione di $r$ troviamo i punti $A((1,0,1)\in r$ e $C(3,3,1)\in r$. Dall'equazione di $s$ ponendo per esempio $x=0$ troviamo il punto $D(0,1,2)$. Imponendo ora il passaggio per i tre punti otteniamo

$$\begin{cases} a+c=d\\ 3a+3b+c=d\\ b+2c=d\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases} a=-c+d\\ 3(-c+d)+3(-2c+d)+c=d\\ b=-2c+d\end{cases}\quad\Rightarrow$$

$$\begin{cases} a=-c+d\\ 3(-c+d)+3(-2c+d)+c=d\\ b=-2c+d\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases} a=-c+d\\ -8c+5d=0\\ b=-2c+d\end{cases}$$

Ponendo per esempio $d=8$ otteniamo

$$\begin{cases} a=3\\ c=5\\ b=-2\\ d=8\end{cases}\quad\Rightarrow\ \pi_1:\ 3x-2y+5z=8$$

b) Il piano $\pi_2$ cercato è ortogonale a $r$ e $s$, quindi ha direzione ortogonale a $(2,3,0)$ (il vettore direzione di $r$ e $s$) e equazione del tipo $2x+3y=d$. Imponendo il passaggio per $C$ otteniamo

$$\pi_2:\ 2x+3y=3$$

□

**Esercizio 2.25.** *Si considerino i ter piani di equazioni*

$$\pi_1:\ x+y+z=0,\qquad \pi_2:\ x-y-z+1=0,\qquad \pi_3:\ 2x+kz=1$$

a) *Si determini l'equazione del piano per l'origine e perpendicolare alla retta $r:\pi_1\cap\pi_2$.*

b) *Stabilire la posizione reciproca dei tre piani (paralleli, incidenti in un punto o in una retta ...) al variare di $k$ in* $\mathbf{R}$.

SOLUZIONE:

a) Per determinare $r = \pi_1 \cap \pi_2$ mettiamo a sistema i due piani:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ -y-z-y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ 2y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ y=\frac{1}{2}-z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; r = \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-t \\ z=t \end{cases}$$

Quindi $r = \pi_1 \cap \pi_2$ è una retta di direzione $(0,-1,1)$ e il piano ortogonale cercato, passante per l'origine, ha equazione $-y+z=0$.

b) E' sufficiente stabilire la posizione della retta $r$ trovata al punto precedente rispetto a $\pi_3$. Notiamo che una retta e un piano possono essere o incidenti o parallele. Mettiamo a sistema $r$ e $\pi_3$:

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-t \\ z=t \\ 2x+kz=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-t \\ z=t \\ -1+kt=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-t \\ z=t \\ kt=2 \end{cases}$$

Dobbiamo distinguere due casi:

– Se $k \neq 0$, otteniamo la soluzione

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2}-\frac{2}{k}=\frac{k-4}{2k} \\ z=\frac{2}{k} \\ t=\frac{2}{k} \end{cases}$$

quindi i tre piani sono incidenti nel punto $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{k-4}{2k}, \frac{2}{k}\right)$.

– Se $k=0$, il sistema contiene l'equazione $0=2$, quindi non ammette soluzione. Di conseguenza i tre piani non si intersecano in quanto $\pi_3$ è parallelo alla retta $\pi_1 \cap \pi_2$.

In alternativa per risolvere il punto b) potevamo osservare che una retta e un piano se non sono paralleli sono incidenti. La retta $r$ è parallela al vettore $\overrightarrow{u} = (0,-1,1)$ mentre $\pi_3$ è ortogonale al vettore $\overrightarrow{v} = (2,0,k)$. Di conseguenza $r$ e $\pi_3$ sono paralleli se e solo se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sono ortogonali. Calcolando il prodotto scalare tra i due vettori: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = k$, otteniamo che: se $k=0$ i vettori sono ortogonali, quindi $r$ e $\pi_3$ sono paralleli. Se $k \neq 0$ la retta e il piano non sono paralleli, quindi sono incidenti.

□

**Esercizio 2.26.** *Si considerino le rette $r_1$ e $r_2$ di equazioni:*

$$r_1 : \begin{cases} y+z=2 \\ x=1 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x=2-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si verifichi che le due rette sono incidenti e se ne determini il punto $P$ di intersezione.*
b) *Si trovi un'equazione parametrica della retta passante per $P$ e ortogonale a $r_1$ e $r_2$.*

SOLUZIONE:

a) Mettiamo a sistema le due rette per determinarne il punto di intersezione:

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} y+z=2 \\ x=1 \\ x=2-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+1+t=2 \\ 2-2t=1 \\ x=2-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{1}{2} \\ x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Le rette si intersecano nel punto $P = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

b) Per determinare la direzione ortogonale a $r_1$ e $r_2$ determiniamo la direzione ortogonale al piano che contiene $r_1$ e $r_2$. In realtà è sufficiente determinare un piano parallelo a quello che contiene $r_1$ e $r_2$, quindi per semplificare i conti determiniamo il piano $\pi$ passante per l'origine parallelo a $r_1$ e $r_2$. La retta $r_1$ ha equazione parametrica

$$r_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

quindi $r_1$ e $r_2$ sono rispettivamente parallele ai vettori $(0,1,-1)$ e $(-2,1,1)$. Il piano $\pi$ cercato ha quindi equazioni

$$\pi: \begin{cases} x = -2s \\ y = t + s \\ z = -t + s \end{cases} \qquad \forall s, t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad x + y + z = 0$$

La retta passante per $P$ ortogonale a $r_1$ e $r_2$ ha quindi direzione parallela a $(1,1,1)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \frac{1}{2} + t \\ z = \frac{3}{2} + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

$\square$

**Esercizio 2.27.** *Siano assegnati il punto $A = (1,2,1)$ il piano $\pi$ e la retta $s$ di equazioni*

$$\pi: \ x + z = 4, \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) *Si determini il punto $B$, proiezione ortogonale di $A$ su $\pi$ e la retta $r$ passante per $A$ e per $B$.*
b) *Indicato con $C$ il punto di intersezione tra $s$ e $r$ e con $D$ il punto di intersezione tra $s$ e $\pi$, si determini un'equazione della retta $CD$.*
c) *Si determini l'angolo tra $r$ e la retta $CD$.*

Soluzione:

a) Per trovare $B$ determiniamo l'equazione della retta $r$ passante per $A$ e ortogonale a $\pi$, cioè di direzione $(1,0,1)$:

$$r: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Il punto $B$ è dato dall'intersezione tra $r$ e $\pi$:

$$B: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 \\ z = 1 + s \\ 1 + s + 1 + s = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 1 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad B = (2,2,2)$$

Notiamo che la retta passante per $A$ e $B$ richiesta è la retta $r$ precedentemente trovata.

b) Calcoliamo le intersezioni:

$$C = r \cap s : \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2 \\ z = 1+s \\ x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+s \\ y = 2 \\ z = 1+s \\ 1+s = 1+t \\ 2 = 2 \\ 1+s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -1 \\ t = -1 \\ x = 0 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = (0,2,0)$$

$$D = s \cap \pi : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = 0 \\ 1+t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ x = 4 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D = (4,2,0)$$

c) La retta $r$ è parallela al vettore $u = (1,0,1)$ e la retta $CD$ è parallela al vettore $v = (4,0,0)$. Indicato con $\vartheta$ l'angolo tra le due rette si ottiene:

$$\cos(\vartheta) = \frac{(u,v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

□

**Esercizio 2.28.** *Nello spazio, si considerino le rette $r_1, r_2$ di equazioni*

$$r_1 \ : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad r_2 \ : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z + y - 3 = 0 \end{cases}$$

a) *Determinare la loro posizione reciproca.*
b) *Determinare un'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente le due rette.*
c) *Determinare un'equazione parametrica della retta passante per $P = (-2,5,1)$ e perpendicolare alle rette $r_1$ e $r_2$.*

Soluzione:

a) Mettiamo a sistema $r_1$ e $r_2$ per calcolarne l'eventuale intersezione:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \\ 3t + 2 - t - 2 = 0 \\ 1 + t + 2 - t - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 2-t \\ z = 1+t \\ t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è compatibile e le rette si intersecano nel punto $A(0,2,1)$.

b) Un'equazione cartesiana di $r_1$ è

$$\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Confrontando le equazioni cartesiane delle due rette si vede che il piano $y + z - 3 = 0$ le contiene entrambe.

In alternativa si poteva ricavare l'equazione parametrica di $r_2$:

$$r_2 \ : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Il piano cercato passa per $A = r_1 \cap r_2$ e ha direzioni parallele ai vettori giacitura delle due rette:

$$\begin{cases} x = 3t - s \\ y = 2 - t + s \\ z = 1 + t - s \end{cases} \Rightarrow y + z - 3 = 0$$

c) Una retta ortogonale a $r_1$ e $r_2$ è ortogonale al piano trovato al punto precedente che le contiene entrambe, quindi ha direzione $(0, 1, 1)$:

$$r : \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

□

**Esercizio 2.29.** *Nello spazio, si considerino i piani $\pi_1, \pi_2$ di equazioni*

$$\pi_1 \ : \ 3x - y + z = 0, \qquad \pi_2 \ : 2x + y = 0.$$

a) *Scrivere equazioni parametriche della retta $r$ intersezione di $\pi_1$ e $\pi_2$.*
b) *Determinare un'equazione cartesiana del piano ortogonale ai due piani assegnati e passante per il punto $P = (2, 1, 0)$.*
c) *Trovare la proiezione ortogonale del punto $P$ sulla retta $r$.*

Soluzione:

a) Mettiamo a sistema $\pi_1$ e $\pi_2$ per calcolarne l'intersezione:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x + y = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad r : \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = -5t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

b) Un piano ortogonale ai due piani assegnati è anche ortogonale alla retta $r$ intersezione di $\pi_1$ e $\pi_2$, quindi ha equazione cartesiana del tipo

$$x - 2y - 5z = d$$

Imponendo il passaggio per $P$ otteniamo $d = 0$, quindi il piano cercato è

$$x - 2y - 5z = 0$$

c) La proiezione ortogonale di un punto $P$ su una retta $r$ è data dall'intersezione tra $r$ e il piano per $P$ ortogonale a $r$. In questo caso sappiamo già che il piano per $P$ ortogonale a $r$ è il piano $x - 2y - 5z = 0$, quindi si tratta di trovare l'intersezione tra tale piano e $r$:

$$\begin{cases} x - 2y - 5z = 0 \\ x = t \\ y = -2t \\ z = -5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + 4t + 25t = 0 \\ x = t \\ y = -2t \\ z = -5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Infine la proiezione cercata è l'origina $O = (0, 0, 0)$.

□

**Esercizio 2.30.** *Siano $r$ la retta passante per i punti $A = (1, 0, 2)$ e $B = (-1, 1, 1)$ e $s$ la retta di equazioni parametriche*

$$s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

a) *Si determini un'equazione cartesiana del piano perpendicolare a $r$ e passante per il punto $Q$ di intersezione tra l'asse delle $y$ e il piano contenente $r$ e $s$.*
b) *Si trovino equazioni cartesiane e parametriche della retta perpendicolare ad $r$ e $s$ e passante per il punto $P = (1, 3, 1)$.*

Soluzione:

Notiamo che la retta $r$ ha equazione parametrica

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

e si tratta di una retta parallela ad $s$.

a) Si tratta di
   – Trovare il piano $\pi$ passante per $r$ e $s$,
   – determinare il punto $Q$ intersecando l'asse delle $y$ con il piano $\pi$ trovato,
   – determinare un'equazione del piano ortogonale a $r$ e passante per $Q$.

   Poiché $r$ e $s$ sono parallele sono complanari, ma per trovare il piano che le contiene dobbiamo procurarci un'altra direzione. Sia per esempio $C = (1, 1, 1)$ un punto di $s$, allora $\overrightarrow{CB} = (2, 0, 0)$ e il piano $\pi$ contenente $r$ e $s$ ha equazioni parametrica e cartesiana date da

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + 2t + 2s \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \forall t, s \in \mathbf{R} \qquad\qquad \pi: \quad y + z = 2$$

   L'asse delle $y$ ha equazione $x = z = 0$, quindi il punto $Q$ è dato da

$$Q: \begin{cases} y + z = 2 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q = (0, 2, 0)$$

   Infine il piano cercato ha direzione ortogonale a $r$, quindi al vettore $(2, -1, 1)$ e passa per $Q = (0, 2, 0)$, quindi

$$\pi': \quad 2x - y + z = -2$$

b) Una retta perpendicolare ad $r$ e $s$ è perpendicolare al piano $\pi$ trovato al punto precedente che le contiene. Di conseguenza la retta cercata può essere parallela al vettore $(0, 1, 1)$. Equazioni di tale retta sono quindi:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad\qquad \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

□

**Esercizio 2.31.** *Dati i punti i $O(0,0)$, $A(2,1)$, $B(1,3)$, determinare l'isometria $f(x,y) = (x', y')$ tale che $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ nei seguenti casi. Stabilire in particolare se si tratta di una traslazione, rotazione, riflessione e glissoriflessione trovando gli eventuali punti fissi.*

a) $O' = \left(-3,\ \frac{1}{2}\right)$, $A' = \left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$, $B' = \left(-2,\ \frac{7}{2}\right)$.
b) $O' = (1,\ 0)$, $A' = \left(\frac{5 - 2\sqrt{2}}{3},\ \frac{1 + 4\sqrt{2}}{3}\right)$, $B' = \left(\frac{4 - 6\sqrt{2}}{3},\ \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}\right)$.
c) $O' = (0,\ 0)$, $A' = \left(-\frac{2}{5},\ \frac{11}{5}\right)$, $B' = \left(\frac{9}{5},\ \frac{13}{5}\right)$.
d) $O' = (-2,\ 1)$, $A' = \left(\frac{1}{5},\ \frac{7}{5}\right)$, $B' = \left(\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$.

Soluzione:

a) Dal testo sappiamo già che si tratta di un'isometria. Rappresentando i punti si vede che sia l'angolo $0\widehat{A}B$ che l'angolo $0'\widehat{A'}B'$ sono antiorari, quindi si tratta di una trasformazione diretta: una rotazione o una traslazione. Dobbiamo cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases}$$

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -3 = a \\ \frac{1}{2} = b \\ -1 = 2c - s + a \\ \frac{3}{2} = 2s + c + b \\ -2 = c - 3s + a \\ \frac{7}{2} = s + 3c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{1}{2} \\ s = 2c - 2 \\ \frac{3}{2} = 4c - 4 + c + \frac{1}{2} \\ -2 = c - 3s + -3 \\ \frac{7}{2} = s + 3c + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = \frac{1}{2} \\ s = 0 \\ c = 1 \\ -2 = -2 \\ \frac{7}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Notiamo che per risolvere il sistema abbiamo usato solamente le prime quattro equazioni, mentre abbiamo usato le ultime due per verificare la soluzione. Si tratta della trasformazione

$$f(x,y) = \left(x-3,\ y+\frac{1}{2}\right)$$

che è una traslazione e non ha punti fissi. La mancanza di punti fissi si può anche verificare direttamente impostando il sistema

$$f(x,y) = (x,y) \ \Rightarrow \begin{cases} x = x-3 \\ y = y+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

che non ha soluzione.

b) Dal testo sappiamo già che si tratta di un'isometria. Rappresentando i punti si vede che sia l'angolo $0\widehat{A}B$ che l'angolo $0'\widehat{A'}B'$ sono antiorari, quindi si tratta di una trasformazione diretta: una rotazione o una traslazione. Dobbiamo cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases}$$

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O',\ f(A) = A',\ f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 1 = a \\ 0 = b \\ \frac{5-2\sqrt{2}}{3} = 2c - s + a \\ \frac{1+4\sqrt{2}}{3} = 2s + c + b \\ \frac{4-6\sqrt{2}}{3} = c - 3s + a \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3} = s + 3c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ \frac{5-2\sqrt{2}}{3} = -4s + \frac{2+8\sqrt{2}}{3} - s + 1 \\ c = -2s + \frac{1+4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{4-6\sqrt{2}}{3} = c - 3s + 1 \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3} = s + 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ s = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ c = \frac{1}{3} \\ \frac{4-6\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3} - 2\sqrt{2} + 1 \\ \frac{3+2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 \end{cases}$$

Notiamo che per risolvere il sistema abbiamo usato solamente le prime quattro equazioni, mentre abbiamo usato le ultime due per verificare la soluzione. Si tratta della trasformazione

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2\sqrt{2}}{3}y + 1,\ \frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{3}y\right)$$

che è una rotazione. Possiamo quindi trovare il punto fisso (centro di rotazione) impostando il sistema

$$f(x,y) = (x,y) \ \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}y + 1 \\ y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x + \dfrac{1}{3}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2\sqrt{2}y = 3 \\ y = \sqrt{2}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Quindi il centro di rotazione è il punto fisso $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

c) Dal testo sappiamo già che si tratta di un'isometria. Rappresentando i punti si vede che l'angolo $0\widehat{A}B$ è antiorario mentre l'angolo $0'\widehat{A'}B'$ è orario, quindi si tratta di una trasformazione inversa: una riflessione o una glissoriflessione. Dobbiamo cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases}$$

Notiamo che poiché $O = O'$, il punto $O$ è fisso, quindi si tratta di una riflessione in quanto le glissoriflessioni non hanno punti fissi.

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O',\ f(A) = A',\ f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 0 = a \\ 0 = b \\ \frac{9}{5} = c + 3s + a \\ \frac{13}{5} = s - 3c + b \\ -\frac{2}{5} = 2c + s + a \\ \frac{11}{5} = 2s - c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = \frac{9}{5} - 3s \\ \frac{13}{5} = s - \frac{27}{5} - 9s \\ -\frac{2}{5} = 2c + s \\ \frac{11}{5} = 2s - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = -\frac{3}{5} \\ s = \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} = -\frac{6}{5} + \frac{4}{5} \\ \frac{11}{5} = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} \end{cases}$$

Notiamo che per risolvere il sistema abbiamo usato solamente le prime quattro equazioni, mentre abbiamo usato le ultime due per verificare la soluzione. Si tratta della trasformazione

$$f(x,y) = \left(-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y,\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)$$

che è una riflessione. Possiamo quindi trovare la retta di punti fissi (asse di simmetria) impostando il sistema

$$f(x,y) = (x,y) \;\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 4y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$$

Quindi tutti i punti della retta $y = 2x$ sono punti fissi e $y = 2x$ è l'asse di simmetria.

d) Dal testo sappiamo già che si tratta di un'isometria. Rappresentando i punti si vede che l'angolo $0\widehat{A}B$ è antiorario mentre l'angolo $0'\widehat{A'}B'$ è orario, quindi si tratta di una trasformazione inversa: una riflessione o una glissoriflessione. Si tratta quindi di cercare una trasformazione del tipo

$$\begin{cases} x' = cx + sy + a \\ y' = sx - cy + b \end{cases}$$

Imponendo le sei condizioni $f(O) = O',\ f(A) = A',\ f(B) = B'$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -2 = a \\ 1 = b \\ \frac{3}{5} = c + 3s + a \\ -\frac{4}{5} = s - 3c + b \\ \frac{1}{5} = 2c + s + a \\ \frac{7}{5} = 2s - c + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = \frac{13}{5} - 3s \\ -\frac{4}{5} = s - \frac{39}{5} + 9s + 1 \\ \frac{1}{5} = 2c + s - 2 \\ \frac{7}{5} = 2s - c + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = \frac{4}{5} \\ s = \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} = \frac{8}{5} + \frac{3}{5} - 2 \\ \frac{7}{5} = \frac{6}{5} - \frac{4}{5} + 1 \end{cases}$$

Notiamo che per risolvere il sistema abbiamo usato solamente le prime quattro equazioni, mentre abbiamo usato le ultime due per verificare la soluzione. Si tratta della trasformazione

$$f(x,y) = \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2,\ \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1\right)$$

che è una glissoriflessione. Infatti impostando il sistema

$$f(x,y) = (x,y) \;\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \\ y = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 10 \\ 9y = 9y - 25 \end{cases}$$

non otteniamo soluzioni.

□

**Esercizio 2.32.** *Si considerino i punti del piano* $A = (0,0),\ B = (2t,0),\ C = (0,1)$ *e* $A' = (2,2),\ B' = \left(2+\sqrt{3},3\right),\ C' = \left(\frac{3}{2}, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

a) *Per quali valori di* $t$ *esiste un'isometria diretta che trasforma i punti* $A,\ B,\ C$ *nei punti* $A',\ B',\ C'$ *rispettivamente?*
b) *Per i valori di* $t$ *determinati al punto precedente, trovare le equazioni dell'isometria.*
c) *Stabilire se l'isometria* $f$ *in* b) *ha dei punti fissi, cioè tali che* $f(P) = P$.

Soluzione:

a) Un'isometria conserva le distanze, quindi:

$$|AB| = |A'B'| \;\Rightarrow\; |2t| = 2 \;\Rightarrow\; t = \pm 1$$
$$|AC| = |A'C'| \;\Rightarrow\; 1 = 1$$
$$|BC| = |B'C'| \;\Rightarrow\; \sqrt{4t^2+1} = \sqrt{5} \;\Rightarrow\; t = \pm 1$$

Di conseguenza perché esista un'isometria deve essere $t = \pm 1$. Inoltre rappresentando i punti si vede che l'isometria è diretta per $t > 0$, quindi esiste un'isometria diretta che trasforma i punti $A,\ B,\ C$ nei punti $A',\ B',\ C'$ rispettivamente, per $t = 1$.

In alternativa per rispondere alla domanda a) si poteva impostare il sistema relativo alla generica isometria diretta:

$$\begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = B \\ f(C) = C \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases}$$

b) Sia

$$\begin{cases} x' = cx - sy + a \\ y' = sx + cy + b \end{cases}$$

la generica isometria diretta. Imponendo le condizioni $f(A) = A'$ e $f(C) = C'$ (con $t = 1$) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2 = a \\ 2 = b \\ \frac{3}{2} = -s + a \\ 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} = c + b \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ s = \frac{1}{2} \\ c = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Quindi l'isometria $f$ cercata è

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + 2 \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \end{cases}$$

Notiamo che si tratta di una rotazione antioraria pari ad un angolo di 30°.

c) Imponendo al generico punto $P(x, y)$ la condizione $P' = f(P) = P$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} (2 - \sqrt{3})x + y = 4 \\ -x + (2 - \sqrt{3})y = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - (2 - \sqrt{3})x \\ -x + 4(2 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})^2 x = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{3} \\ y = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Infine il punto fisso dell'isometria (centro di rotazione) è $P(-1 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$.

$\square$