CAPITOLO 5

Dipendenza e indipendenza lineare (senza il concetto di rango)

Esercizio 5.1. *Scrivere un vettore* $w \in \mathbf{R}^3$ *linearmente dipendente dal vettore* $v \equiv (-1,\ 9,\ 0)$.

Esercizio 5.2. *Stabilire se i vettori* $v_1 \equiv (1,\ 5,\ 7)$ *e* $v_2 \equiv (1,\ 3,\ 4)$ *di* $\mathbf{R}^3$ *sono linearmente dipendenti.*

Esercizio 5.3. *Scrivere un vettore* $w \in \mathbf{R}^4$ *linearmente dipendente dal vettore* $v \equiv (1,\ 3,\ -4,\ 2)$.

Esercizio 5.4. *Stabilire se i vettori* $v_1 \equiv (1,\ -5,\ 700)$ *e* $v_2 \equiv (0,\ 0,\ 0)$ *di* $\mathbf{R}^3$ *sono linearmente dipendenti.*

Esercizio 5.5. *Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,\ -3,\ 7), \quad v_2 \equiv (2,\ -1,\ -1), \quad v_3 \equiv (0,\ 0,\ 0)$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile,

- v_1 *come combinazione lineare di* v_2 *e* v_3
- v_2 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_3
- v_3 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_2

Esercizio 5.6. *Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,\ -3,\ 7), \quad v_2 \equiv (2,\ -1,\ -1), \quad v_3 \equiv (-4,\ 2,\ 2)$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile,

- v_1 *come combinazione lineare di* v_2 *e* v_3
- v_2 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_3
- v_3 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_2

Esercizio 5.7. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1 \equiv (1,-1,2),\ v_2 \equiv (5,2,0),\ v_3 \equiv (3,4,-4)$$

Esercizio 5.8. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1 \equiv (1,2,-2),\ v_2 \equiv (1,1,-3),\ v_3 \equiv (3,7,k-6)$$

discutendo i valori del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Esercizio 5.9.

a) *Determinare per quali valori del parametro reale* k *i seguenti vettori di* $\mathbf{R}^5$ *sono linearmente dipendenti:*

$$v_1 = (0,1,-1,0,1), \qquad v_2 = (1,0,1,0,k), \qquad v_3 = (-1,2,-3,0,0).$$

b) *Per i valori di* k *determinati in* a)*, esprimere uno o più vettori come combinazione lineare dei rimanenti.*

Esercizio 5.10. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,2),\ v_2 \equiv (2,4,6),\ v_3 \equiv (-1,2,5),\ v_4 \equiv (1,1,10)$$

determinare se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *(determinare cioè se* v_4 *appartiene allo spazio vettoriale generato da* v_1*,* v_2 *e* v_3*). In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Esercizio 5.11. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,1),\ v_2 \equiv (-3,-2,-2),\ v_3 \equiv (2,2,k+4),\ v_4 \equiv (1,3,4)$$

determinare per quali valori del parametro reale k*,* v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *(determinare cioè se* v_4 *appartiene allo spazio vettoriale generato da* v_1*,* v_2 *e* v_3*). In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Esercizio 5.12. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1 \equiv (1,3,1),\ v_2 \equiv (2,k,-1),\ v_3 \equiv (-1,k-1,0),\ v_4 \equiv (1,15,7)$$

Esercizio 5.13. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,2,1),\ v_2 \equiv (k-2,k-4,-k-2),\ v_3 \equiv (5,9,3)$$

determinare, se possibile, i valori del parametro k *per cui il vettore* v_3 *è combinazione lineare di* v_1*, e* v_2*. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Esercizio 5.14. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^4$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,2,1), \qquad v_2 \equiv (2,5,7,5),$$
$$v_3 \equiv (-3,-2,k-5,k-2), \qquad v_4 \equiv (-1,-2k-1,-2k-2,-3)$$

determinare i valori del parametro reale k *per i quali* v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3*. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Esercizio 5.15. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si dica per quali valori del parametro reale k *le matrici* A, B, C *sono linearmente indipendenti nello spazio* $M_2(\mathbf{R})$*.*

Esercizio 5.16. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & k+1 \\ 4 & k-3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2k-2 & 2k-1 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca per quale valore di* $k \in \mathbf{R}$ *le matrici* A*,* B *e* C *sono linearmente dipendenti.*
b) *Per il valore trovato in* a) *esprimere* B *come combinazione lineare di* A *e* C*.*

Esercizio 5.17. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D *è combinazione lineare di* A*,* B*,* C*.*

Esercizio 5.18. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k *per cui* C *è combinazione lineare di* A*,* B*. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.*

Esercizio 5.19. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1 + x, \qquad p_2(x) = 1 + 2x + x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

Esprimere, se è possibile, $f(x) = x^2 - x + 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x)$*,* $p_2(x)$*,* $p_3(x)$*.*

---

1. Suggerimenti

- n vettori $v_1,\ v_2,\ \dots, v_n$ sono detti **linearmente indipendenti** se
$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$
In caso contrario sono detti **linearmente dipendenti**.
- Un vettore w è combinazione di n vettori $v_1,\ v_2,\ \dots, v_n$ se esistono $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ tali che:
$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = w$$
- Se n vettori sono linearmente dipendenti, allora almeno uno è combinazione lineare degli altri.
- Se w è combinazione lineare di $v_1,\ v_2,\ \dots, v_n$, allora $v_1,\ v_2,\ \dots, v_n,\ w$ sono linearmente dipendenti.
- Alcuni degli esercizi svolti in questo capitolo possono essere svolti in maniera leggermente semplificata utilizzando la nozione di rango (v. capitoli successivi).

---

2. Soluzioni

Esercizio 5.1. *Scrivere un vettore $w \in \mathbf{R}^3$ linearmente dipendente dal vettore $v \equiv (-1,\ 9,\ 0)$.*

Soluzione:
Per esempio il vettore $w = 3v = (-3,\ 27,\ 0)$ è linearmente dipendente da v.

Potevamo anche considerare il vettore nullo $(0,\ 0,\ 0) = 0v$ che è sempre linearmente dipendente da qualsiasi altro vettore.

□

Esercizio 5.2. *Stabilire se i vettori $v_1 \equiv (1,\ 5,\ 7)$ e $v_2 \equiv (1,\ 3,\ 4)$ di $\mathbf{R}^3$ sono linearmente dipendenti.*

Soluzione:

Si tratta di verificare se l'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 = 0$ ammette soluzioni diverse dalla soluzione nulla $x = y = 0$. Nel caso particolare di due vettori (non nulli), notiamo che x e y o sono entrambi nulli o sono entrambi non nulli. Supponendo quindi che esistano soluzioni diverse dalla soluzione nulla $x = y = 0$ ne segue che possiamo supporre $y \neq 0$ e possiamo dividere per y ottenendo $v_2 = -\dfrac{x}{y}\, v_1$.

Ovvero due vettori non nulli sono linearmente dipendenti se sono uno multiplo dell'altro. E' evidente che in questo caso v_1 non è multiplo di v_2, quindi v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

Lo stesso risultato si poteva ottenere risolvendo il sistema associato all'equazione $xv_1 + yv_2 = 0$
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \\ 7x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ -5y + 3y = 0 \\ -7y + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$
Poichè l'unica soluzione è quella nulla, v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.

□

Esercizio 5.3. *Scrivere un vettore $w \in \mathbf{R}^4$ linearmente dipendente dal vettore $v \equiv (1,\ 3,\ -4,\ 2)$.*

Soluzione:
Per esempio il vettore $w = 2v = (2,\ 6,\ -8,\ 4)$ è linearmente dipendente da v.

□

Esercizio 5.4. *Stabilire se i vettori $v_1 \equiv (1,\ -5,\ 700)$ e $v_2 \equiv (0,\ 0,\ 0)$ di $\mathbf{R}^3$ sono linearmente dipendenti.*

Soluzione:

Il vettore nullo è sempre linarmente dipendente da ogni altro insieme di vettori. Infatti l'equazione vettoriale:

$$xv_1 + yv_2 = 0$$

ammette (per esempio) la soluzione non nulla

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

□

Esercizio 5.5. *Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,\ -3,\ 7), \quad v_2 \equiv (2,\ -1,\ -1), \quad v_3 \equiv (0,\ 0,\ 0)$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile,

- v_1 *come combinazione lineare di* v_2 *e* v_3
- v_2 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_3
- v_3 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_2

Soluzione:

Per quanto osservato nell'esercizio precedente possiamo giá affermare che i tre vettori sono linearmente dipendenti in quanto tra di essi vi é il vettore nullo.

Risolviamo comunque l'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ che, in generale, ci permette di rispondere a tutte le domande dell'esercizio. Consideriamo il sistema in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x + 2y + 0z = 0 \\ -3x - y + 0z = 0 \\ 7x - y + 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 6y - y = 0 \\ -14y - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Di conseguenza $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono linearmente dipendenti e:

$$0v_1 + 0v_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Dall'equazione precedente notiamo che

- v_1 non si può esprimere come combinazione lineare di v_2 e v_3.
- v_2 non si può esprimere come combinazione lineare di v_1 e v_3.
- Ponendo per esempio $t = 1$, otteniamo che

$$v_3 = 0v_1 + 0v_2$$

□

Esercizio 5.6. *Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,\ -3,\ 7), \quad v_2 \equiv (2,\ -1,\ -1), \quad v_3 \equiv (-4,\ 2,\ 2)$$

Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando è possibile,

- v_1 *come combinazione lineare di* v_2 *e* v_3
- v_2 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_3
- v_3 *come combinazione lineare di* v_1 *e* v_2

Soluzione:

La risoluzione dell'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ permette di rispondere a tutte le domande dell'esercizio.

Sappiamo infatti che data l'equazione $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$

- v_1, v_2 e v_3 sono **linearmente indipendenti** se l'equazione ammette solo la soluzione nulla: $x = y = z = 0$.
- v_1, v_2 e v_3 sono **linearmente dipendenti** se l'equazione ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla $x = y = z = 0$.

Consideriamo il sistema in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x+2y-4z=0 \\ -3x-y+2z=0 \\ 7x-y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y+4z \\ 6y-12z-y+2z=0 \\ -14y+28z-y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2y+4z \\ 5y-10z=0 \\ -15y+30z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2y+4z \\ y=2z \\ -30z+30z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2t \qquad \forall t\in \mathbf{R} \\ z=t \end{cases}$$

Di conseguenza $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono linearmente dipendenti e:

$$0v_1+2tv_2+tv_3=0 \qquad \forall t\in \mathbf{R}$$

Dall'equazione precedente notiamo che

- v_1 non si può esprimere come combinazione lineare di v_2 e v_3.
- Ponendo per esempio $t=1$, otteniamo $2v_2+v_3=0$ ovvero
$$v_2=-\frac{1}{2}v_3$$
- Analogamente al punto precedente otteniamo
$$v_3=-2v_2$$

□

Esercizio 5.7. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1\equiv(1,-1,2),\ v_2\equiv(5,2,0),\ v_3\equiv(3,4,-4)$$

Soluzione:

La risoluzione dell'equazione vettoriale $xv_1+yv_2+zv_3=0$ permette di rispondere a tutte le domande dell'esercizio. Consideriamo il sistema in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x+5y+3z=0 \\ -x+2y+4z=0 \\ 2x+0y-4z=0 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II+I \\ III-2I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ (1/7)II \\ (-1/10)III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tornando al sistema

$$\begin{cases} x+5y+3z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5z+3z=0 \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2t \\ y=-t \qquad \forall t\in \mathbf{R} \\ z=t \end{cases}$$

Di conseguenza $v_1,\ v_2,\ v_3$ sono linearmente dipendenti e:

$$2tv_1-tv_2+tv_3=0 \qquad \forall t\in \mathbf{R}$$

Ponendo per esempio $t=1$ otteniamo $2v_1-v_2+v_3=0$ da cui segue

- $v_1=\frac{1}{2}v_2-\frac{1}{2}v_3$
- $v_2=2v_1+v_3$
- $v_3=-2v_1+v_2$

□

Esercizio 5.8. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1 \equiv (1, 2, -2), \; v_2 \equiv (1, 1, -3), \; v_3 \equiv (3, 7, k-6)$$

discutendo i valori del parametro k.

Soluzione:
Procediamo come nell'esercizio precedente risolvendo l'equazione vettoriale $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$. Consideriamo il sistema in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + y + 7z = 0 \\ -2x - 3y + (k-6)z = 0 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 2 & 1 & 7 & | & 0 \\ -2 & -3 & k-6 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III + II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & k+1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Notiamo che un sistema omogeneo ha sempre soluzione, infatti ha sempre almeno la soluzione nulla. Discutiamo i valori del parametro:

- Se $k = 1$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

  Di conseguenza $v_1, \; v_2, \; v_3$ sono linearmente dipendenti e:

$$-4tv_1 + tv_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

  Ponendo per esempio $t = 1$ otteniamo $-4v_1 + v_2 + v_3 = 0$ da cui segue
  - $v_1 = \frac{1}{4} v_2 + \frac{1}{4} v_3$
  - $v_2 = 4v_1 - v_3$
  - $v_3 = 4v_1 - v_2$
- Se $k \neq 1$ il sistema ammette la sola soluzione $x = y = z = 0$ e $v_1, \; v_2, \; v_3$ sono linearmente indipendenti. In particolare nessuno di loro può essere espresso come combinazione lineare degli altri.

□

Esercizio 5.9.

a) *Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori di $\mathbf{R}^5$ sono linearmente dipendenti:*

$$v_1 = (0, 1, -1, 0, 1), \qquad v_2 = (1, 0, 1, 0, k), \qquad v_3 = (-1, 2, -3, 0, 0).$$

b) *Per i valori di k determinati in* a), *esprimere uno o più vettori come combinazione lineare dei rimanenti.*

Soluzione:
Cerchiamo le soluzioni dell'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$$

riducendo a gradini la matrice associata al sistema in cui si esplicita tale equazione.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ -1 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & k & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} II \\ I \\ III+II \\ V-II \\ IV \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & k & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ III-II \\ IV-kII \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2+k & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=0 \\ y-z=0 \\ (k-2)z=0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi:

- Se $k \neq 2$ otteniamo la soluzione $x = y = z = 0$ e i tre vettori sono linearmente indipendenti.
- Se $k = 2$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Quindi per $k = 2$ i tre vettori sono linearmente dipendenti.

b) Al punto precedente abbiamo trovato che se $k = 2$ allora

$$-2tv_1 + tv_2 + tv_3 = 0 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

In particolare ponendo per esempio $t = 1$ oteniamo

$$v_1 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$$
$$v_2 = 2v_1 - v_3$$
$$v_3 = 2v_1 - v_2$$

□

Esercizio 5.10. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,2),\ v_2 \equiv (2,4,6),\ v_3 \equiv (-1,2,5),\ v_4 \equiv (1,1,10)$$

determinare se v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *(determinare cioè se* v_4 *appartiene allo spazio vettoriale generato da* v_1*,* v_2 *e* v_3*). In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Soluzione:

Si tratta di risolvere l'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Consideriamo il sistema (non omogeneo) in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+4y+2z=1 \\ 2x+6y+5z=10 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 4 & 2 & | & 1 \\ 2 & 6 & 5 & | & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-2I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 7 & | & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2y+3z=0 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=-3 \\ z=2 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$v_4 = 9v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

Notiamo che anzicchè fermarci alla matrice ridotta a gradini potevamo arrivare alla scrittura della matrice in forma normale, ovvero alla matrice che ha solo elementi sulla diagonale e questi sono tutti 1 o 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 1/4III \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I+III \\ II-3III \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 2 & 0 & | & -6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow 1/2II \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} I-2II \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Ritornando al sistema in questo caso otteniamo direttamente

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

ovvero

$$v_4 = 9v_1 - 3v_2 + 2v_3$$

□

Esercizio 5.11. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$v_1 \equiv (1,1,1), \ v_2 \equiv (-3,-2,-2), \ v_3 \equiv (2,2,k+4), \ v_4 \equiv (1,3,4)$$

determinare per quali valori del parametro reale k*,* v_4 *è combinazione lineare di* v_1*,* v_2 *e* v_3 *(determinare cioè se* v_4 *appartiene allo spazio vettoriale generato da* v_1*,* v_2 *e* v_3*). In caso positivo esprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).*

Soluzione:

Si tratta di risolvere l'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Consideriamo il sistema (non omogeneo) in tre incognite associato a tale equazione

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ x - 2y + (k+4)z = 4 \end{cases}$$

Riduciamo quindi a gradini la matrice associata a tale sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 \\ 1 & -2 & 2 & | & 3 \\ 1 & -2 & k+4 & | & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II-I \\ III-II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & k+2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y = 2 \\ (k+2)z = 1 \end{cases}$$

Dobbiamo ora di distinguere due casi

- Se $k = -2$:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ y = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Quindi il sistema non ammette soluzioni, e v_4 non si può esprimere come combinazione lineare di $v_1, \ v_2, \ v_3$.

- Se $k \neq -2$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{7k+12}{k+2} \\ y = 2 \\ z = \dfrac{1}{k+2} \end{cases}$$

e

$$v_4 = \left(\frac{7k+12}{k+2}\right) \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + \left(\frac{1}{k+2}\right) \cdot v_3$$

□

Esercizio 5.12. *Ripetere l'esercizio precedente con i vettori*

$$v_1 \equiv (1,3,1), \ v_2 \equiv (2,k,-1), \ v_3 \equiv (-1,k-1,0), \ v_4 \equiv (1,15,7)$$

Soluzione:
Cerchiamo le soluzioni dell'equazione vettoriale

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$

Riduciamo a gradini la matrice associata al sistema in cui si esplicita tale equazione:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 3 & k & k-1 & | & 15 \\ 1 & -1 & 0 & | & 7 \end{bmatrix}$$

Procedendo con il metodo di Gauss otteniamo la matrice equivalente

$$\begin{array}{r} \\ II-3I \\ III-I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & k-6 & k+2 & | & 12 \\ 0 & -3 & 1 & | & 6 \end{bmatrix}$$

Facciamo a questo punto una importante osservazione. Se procediamo ancora con la riduzione a gradini, per ottenere uno zero nel secondo posto della terza riga siamo costretti a fare la seguente operazione

$$\begin{array}{r} \\ \\ (k-6)III+3II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & k-6 & k+2 & | & 12 \\ 0 & 0 & 4k & | & 6k \end{bmatrix}$$

Notiamo però che procedendo così abbiamo sostituito la terza riga con un suo multiplo *dipendente dal parametro*, sommato ad un multiplo non nullo della seconda. Dalla teoria sappiamo però che tale operazione è lecita solamente se il valore per cui moltiplichiamo la terza riga è diverso da zero, nel nostro caso cioè se $k \neq 6$. In caso contrario avremmo infatti sostituito la terza riga con un multiplo della seconda ottenendo perciò un sistema non più equivalente. Potremmo quindi procedere per poi controllare separatamente il caso $k = 6$, ritornando al sistema che avevamo prima della operazione non lecita. Questo modo di procedere, benchè corretto, risulta piuttosto lungo e macchinoso. E' invece decisamente più conveniente procedere nel seguente modo.

Ritorniamo alla matrice ottenuta al primo passaggio della riduzione a gradini e effettuiamo uno scambio di righe

$$\begin{array}{r} \\ III \\ II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 6 \\ 0 & k-6 & k+2 & | & 12 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \\ \\ 3III+(k-6)II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 4k & | & 6k \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi sostituito la terza riga con un suo multiplo *non nullo* sommato ad un multiplo della seconda dipendente dal parametro. Questa operazione è sempre lecita. Infatti anche per il valore critico $k = 6$ otteniamo un sistema ancora equivalente in cui la terza riga è stata sostituita con un suo multiplo non nullo. Possiamo perciò procedere senza dovere distinguere alcun caso.

Torniamo ora al sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad - 3y + z = 6 \\ \quad\quad 4kz = 6k. \end{cases}$$

Per trovare le soluzioni siamo costretti a distinguere due casi.

- Se $4k \neq 0$, ovvero se $k \neq 0$, l'ultima equazione si può dividere per $4k$ per cui otteniamo la seguente soluzione
$$\begin{cases} x = \frac{11}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2}. \end{cases}$$
Di conseguenza se $k \neq 0$ abbiamo ottenuto la seguente (unica) combinazione lineare:
$$v_4 = \frac{11}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2 + \frac{3}{2}v_3.$$
- Se $k = 0$ otteniamo il seguente sistema
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad - 3y + z = 6 \\ \quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$
Ponendo $y = t$ otteniamo le soluzioni
$$\begin{cases} x = t + 7 \\ y = t \\ z = 3t + 6. \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$
Quindi anche se $k = 0$ il vettore v_4 si può esprimere come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3:
$$v_4 = (t + 7) \cdot v_1 + t \cdot v_2 + (3t + 6) \cdot v_3 \qquad \forall t \in \mathbf{R}.$$
In questo caso le possibili combinazioni lineari sono infinite.

□

Osservazione importante. Abbiamo incontrato in questo esercizio una prima difficoltà nel ridurre a gradini un sistema parametrico. Abbiamo visto che è stato decisamente utile spostare in basso la riga contenente il parametro. Possiamo quindi dare una prima *regola* utile per ridurre a gradini i sistemi parametrici: è tendenzialmente conveniente spostare verso il basso le righe contenenti il parametro.

Esercizio 5.13. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^3$*:*
$$v_1 \equiv (1, 2, 1), \; v_2 \equiv (k - 2, k - 4, -k - 2), \; v_3 \equiv (5, 9, 3)$$
determinare, se possibile, i valori del parametro k per cui il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1, e v_2. In caso positivo sprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).

Soluzione:

Si tratta di cercare (se esistono) le soluzioni dell'equazione vettoriale
$$xv_1 + yv_2 = v_3.$$
Consideriamo il sistema (non omogeneo) associato
$$\begin{cases} x + (k - 2)y = 5 \\ 2x + (k - 4)y = 9 \\ x + (-k - 2)y = 3 \end{cases}$$
Riduciamo a gradini la matrice associata
$$\begin{bmatrix} 1 & k-2 & | & 5 \\ 2 & k-4 & | & 9 \\ 1 & -k-2 & | & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ II - 2I \\ III - I \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k-2 & | & 5 \\ 0 & -k & | & -1 \\ 0 & -2k & | & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \\ -II \\ III - 2II \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & k-2 & | & 5 \\ 0 & k & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
Otteniamo quindi il sistema
$$\begin{cases} x + (k - 2)y = 5 \\ ky = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi

- Se $k \neq 0$ otteniamo
$$\begin{cases} x = \dfrac{4k+2}{k} \\ y = \dfrac{1}{k} \end{cases}$$
per cui
$$v_3 = \left(\frac{4k+2}{k}\right) \cdot v_1 + \frac{1}{k} \cdot v_2 \qquad \text{se } k \neq 0.$$
- Se $k = 0$:
$$\begin{cases} y - 2x = 5 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
Quindi il sistema è impossibile e in questo caso il vettore v_3 non è combinazione lineare di v_1 e v_2.

□

Esercizio 5.14. *Dati i vettori di* $\mathbf{R}^4$:
$$v_1 \equiv (1,1,2,1), \qquad v_2 \equiv (2,5,7,5),$$
$$v_3 \equiv (-3,-2,k-5,k-2), \qquad v_4 \equiv (-1,-2k-1,-2k-2,-3)$$
determinare i valori del parametro reale k per i quali v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3. In caso positivo sprimere tale combinazione lineare (nella forma più generale possibile).

Soluzione:

Studiamo la seguente equazione vettoriale
$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4$$
riducendo a gradini la matrice associata al sistema in cui si esplicita tale equazione:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 1 & 5 & -2 & | & -2k-1 \\ 2 & 7 & k-5 & | & -2k-2 \\ 1 & 5 & k-2 & | & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II-I \\ III-2I \\ IV-I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -2k \\ 0 & 3 & k+1 & | & -2k \\ 0 & 3 & k+1 & | & -2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III-II \\ IV-III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -2k \\ 0 & 0 & k & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2k-2 \end{bmatrix}$$
Ritornando al sistema abbiamo ottenuto
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3y + z = -2k \\ kz = 0 \\ 0 = 2k-2 \end{cases}$$
Notiamo subito che l'ultima equazione impone $2k = 2$, ovvero $k = 1$. Sostituendo quindi tale valore nel sistema oteniamo
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3y + z = -2 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3} \\ z = 0. \end{cases}$$
Quindi

- Per $k = 1$ abbiamo ottenuto la seguente combinazione lineare
$$v_4 = \frac{1}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_2$$

- Se $k \neq 1$ il sistema non ammette soluzioni per cui il vettore v_4 non si può esprimere come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.

$\square$

Esercizio 5.15. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} k & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si dica per quali valori del parametro reale k le matrici A, B, C sono linearmente indipendenti nello spazio $M_2(\mathbf{R})$.

Soluzione:

Per stabilire quando le tre matrici sono linearmente indipendenti risolviamo l'equazione $xA+yB+zC = 0$:

$$\begin{bmatrix} y+kz & ky+z \\ kx-2y-1z & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y+kz = 0 \\ ky+z = 0 \\ kx-2y-1z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \\ kx = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

- Se $k \neq 0$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti.
- Se $k = 0$ otteniamo la sola soluzione $x = t$, $y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente dipendenti.

$\square$

Esercizio 5.16. *Si considerino le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & k+1 \\ 4 & k-3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2k-2 & 2k-1 \end{bmatrix}$$

a) *Si stabilisca per quale valore di $k \in \mathbf{R}$ le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti.*
b) *Per il valore trovato in* a) *esprimere B come combinazione lineare di A e C.*

Soluzione:

a) Per stabilire quando le tre matrici sono linearmente dipendenti risolviamo l'equazione $xA+yB+zC = 0$:

$$\begin{bmatrix} x+2y & x+(k+1)y+z \\ 2x+4y+(2k-2)z & -x+(k-3)y+(2k-1)z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x+2y = 0 \\ x+(k+1)y+z = 0 \\ 2x+4y+(2k-2)z = 0 \\ -x+(k-3)y+(2k-1)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & k+1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2k-2 & 0 \\ -1 & k-3 & 2k-1 & 0 \end{array}\right]$$

Notiamo che le matrici A, B e C sono linearmente dipendenti se il sistema ammette altre (infinite) soluzioni oltre a quella nulla $x = y = z = 0$. Riduciamo quindi a gradini la matrice associata al sistema:

$$\begin{array}{c} \\ II-I \\ III-2I \\ IV+I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & 0 \\ 0 & k-1 & 2k-1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ IV-III \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dobbiamo ora distinguere due casi.

– Se $k \neq 1$ otteniamo la sola soluzione $x = y = z = 0$ per cui le tre matrici sono linearmente indipendenti.
– Se $k = 1$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \; -2t \cdot A + t \cdot B + 0 \cdot C = 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Il sistema ha infinite soluzioni e quindi le tre matrici sono linearmente dipendenti.

b) Per $k = 1$ abbiamo ottenuto al punto precedente $-2t \cdot A + t \cdot B + 0 \cdot C = 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$. Ponendo per esempio $t = 1$ otteniamo $-2A + B = 0$, ovvero $B = 2A$.

□

Esercizio 5.17. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

stabilire se D è combinazione lineare di A, B, C.

Soluzione:

Si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By + Cz = D$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By + Cz = \begin{bmatrix} x & 2x \\ -x & 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & y \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z & z \\ 2z & 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y - z & 2x + y + z \\ -x + y + 2z & 3x + y + 3z \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x + 2y - z & 2x + y + z \\ -x + y + 2z & 3x + y + 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = -1 \\ 3x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

Dobbiamo quindi risolvere il sistema lineare non omogeneo di quattro equazioni i tre incognite:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ -1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 3 & 1 & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ II - 2I \\ III + I \\ IV - 3I \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & -5 & 6 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ III + II \\ 3IV - 5II \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ \\ 4IV - 3III \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Tornando al sistema notiamo che l'ultima equazione è $0 = 4$, quindi il sistema non ammette soluzione e D non è combinazione lineare di A, B e C.

□

Esercizio 5.18. *Date le matrici*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

stabilire se esistono valori di k per cui C è combinazione lineare di A, B. In caso positivo esprimere tale combinazione lineare.

Soluzione:

Analogamente all'esercizio precedente si tratta di determinare se esiste soluzione dell'equazione

$$Ax + By = C$$

Esplicitando tale equazione otteniamo:

$$Ax + By = \begin{bmatrix} x & kx \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & 3y \\ y & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y & kx + 3y \\ y & x + 2y \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} x+2y & kx+3y \\ y & x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=3 \\ kx+3y=6 \\ y=1 \\ x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ kx+3=6 \\ y=1 \\ x+2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ kx=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ k=3 \\ y=1 \\ x=1 \end{cases}$$

Quindi

- Se $k=3$ il sistema ammette la sola soluzione $x=y=1$ e $A+B=C$.
- Se $k \neq 3$ il sistema non ammette soluzione e C non è combinazione di A e B.

$\square$

Esercizio 5.19. *Siano dati i polinomi*

$$p_1(x) = 1+x, \qquad p_2(x) = 1+2x+x^2, \qquad p_3(x) = x - x^2.$$

Esprimere, se è possibile, $f(x) = x^2 - x + 2$ *come combinazione lineare di* $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$.

Soluzione:

Si tratta di stabilire se l'equazione

$$ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = f(x)$$

ammette soluzioni. Esplicitando l'equazione otteniamo:

$$\begin{aligned} ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) &= a(1+x) + b(1+2x+x^2) + c(x-x^2) \\ &= (b-c)x^2 + (a+2b+c)x + (a+b) \end{aligned}$$

Quindi

$$(b-c)x^2 + (a+2b+c)x + (a+b) = x^2 - x + 2 \ \Rightarrow \begin{cases} b-c=1 \\ a+2b+c=-1 \\ a+b=2 \end{cases}$$

Risolviamo ora il sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} III \\ \\ I \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} \\ II-I \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_2+x_3=-3 \\ -2x_3=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-1 \\ x_3=-2 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 3 \cdot p_1(x) - 1 \cdot p_2(x) - 2 \cdot p_3(x)$$

L'esercizio poteva essere svolto in maniera leggermente semplificata osservando che a ogni polinomio possiamo associare il vettore formato dai suoi coefficienti dopo avere scelto un ordine per l'insieme $\mathcal{B} = \{x^2, \quad x, \quad 1\}$. La giustificazione precisa di questo fatto verrà data dopo avere introdotto il concetto di base, ma possiamo intanto osservare che ogni vettore è univocamente determinato dai suoi coefficienti e che la somma e il prodotto per scalari sono definiti in maniera analoga tra vettori e tra polinomi. Di conseguenza ai polinomi $p_1(x), p_2(x)$ e $p_3(x)$ possiamo associamo i tre vettori

$$\begin{aligned} p_1 &= (0,1,1) \\ p_2 &= (1,2,1) \\ p_3 &= (-1,1,0) \\ f &= (1,-1,2) \end{aligned}$$

Il polinomio $f(x)$ è combinazione lineare di $p_1(x),\ p_2(x),\ p_3(x)$ se il vettore f è combinazione lineare dei vettori $p_1,\ p_2,\ p_3$. Risolvendo l'equazione $ap_1 + bp_2 + cp_3$ otteniamo il sistema a cui è associata la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

che è infatti la stessa che abbiamo ottenuto con il precedente metodo.

□