CIEAEM - 42 - Polonia 1990
Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des math.

L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES : ce qui est invariant dans un monde qui change

(Emma Castelnuovo)

===

Le titre est assez sybillin. Je chercherai de l'éclairer en divisant mon exposé en deux parties: dans la première je vais donner un cadre de l'enseignement mathématique à partir de l'après-guerre jusqu'à aujourd'hui; dans la seconde je voudrais montrer, sur la base de quelques données statistiques, "ce qui est invariant", c'est-à-dire les ressemblances des intérêts et des réactions des élèves, "dans un monde qui change".

Partie I

La période de l'après-guerre voit, dans plusieurs pays, l'institution de l'école égale et obligatoire pour tout le monde jusqu'à un certain âge. Moi, je veux considérer surtout les élèves entre 11 et 16 ans.
On a toujours signalé les difficultés pour la compréhension des mathématiques. Ces difficultés se sont accentuées lorsque la plupart des élèves n'avait pas le soutien d'une famille cultivée.
Les raisons de ces difficultés sont bien connues; elles sont dûes à:

- contenus trop abstraits, comme, par exemple, l'étude de la géométrie euclidienne, qu'on traitait aussi dans les classes des enfants de 11-12 ans;
- méthodes non appropriées, loin des possibilités intellectuelles et psychologiques des enfants.

Ces deux points ont été dénoncés par des éducateurs, des grands mathématiciens, des pédagogues, des psychologues, mais on n'est jamais arrivés à des changements substantiels.
Voilà, à grandes lignes, ce qui est arrivé à partir de la fin des années '50.

1957- C'est en 1957 qu'un changement se prépare dans l'enseignement des mathématiques, un changement qui n'a pas été provoqué dans le but de faciliter la compréhension, mais qui a une origine de "caractère politique". Il était arrivé ceci:à la suite du lancement,réalisé par les Russes en 1957,du premier Sputnik,c'est-à-dire du premier satéllite artificiel,les Americains s'étaient rendus compte qu'on ne pouvait pas rejoindre des hautes technologies sans développer un enseignement des mathématiques plus poussé dans les écoles sé= condaires.Mais,quel genre de mathématiques était-il mieux traiter à l'école?

Dans le but de recueillir des informations et comparer les différents programmes en vigueur dans les différents pays,les Americains pous= sèrent l'OECE,c'est-à-dire l'Organisation Européenne de Coopération Economique,à organiser une Rencontre Internationale avec la partici= pation de mathématiciens et de professeurs d'écoles sécondaires.

59- Le Séminaire eut lieu à la fin de l'an '59 en France,à Royaumont, dans une abbaye di 13-ème siècle.J'ai eu la chance d'être un des enseignants invités à participer au Séminaire,et de passer ainsi,dans une ambiance unique,fervente de discussions,deux semaines de l'hiver '59. Vous connaissez sûrement les prises de position déclarées à Royaumont de la part de bien des mathématiciens,parmi lesquels Dieudonné,Choquet,Stone:les programmes qu'on développait dans les différents pays étaient fort éloignés des conceptions de la mathé= matique moderne,et pourtant il y avait un fossé entre Ecole sécon= daire et Université.Pourquoi-se demandait-on-on devait,au Sécondaire, perdre tellement du temps avec la géométrie d'Euclide? "A bas le triangle!" -cette déclaration prononcée avec force par Jean Dieudonné, marque la fin,dans bien des pays,du cours traditionnel de géomé= trie.

60- A la suite du Séminaire de Royaumont une Commission se réunit dans l'été de 1960 et on publie un livre pour les enseignants sur les sujets propres à sensibiliser les élèves à la théorie des ensembles et à l'étude des diverses structures.Ce volume,de grande ouverture, avait le but de donner des idées générales laissant les pays libres dans l'expérimentation et la réalisation d'un nouveau programme,en tenant compte de la tradition du pays.

1962-3- Mais,comme on le sait bien,la plupart des pays est tombée dans le tourbillon ensembliste.C'est ainsi que à un cours de mathématique abstraite on a substitué une mathématique différente ,mais encore plus abstraite,plus éloignée de la réalité. Et dire que c'était la technologie (le Sputnik) qui avait provoqué un changement de programmes!

Comme je viens de dire,ce changement de contenus n'avait pas comme but celui de développer une mathématique plus conforme à l'âge des pré-adolescents et des adolescents,mais voulait rendre moins profond le fossé entre l'école sécondaire et l'Université.Et donc,on pensait surtout aux jeunes gens qui pouvaient continuer leurs études.

à partir de 1962-3 "L'ensemblisme à tout prix" (selon la définition de Freudenthal) envahit bien des pays d'Europe et d'Amerique,pénétra avec encore plus de force dans les pays en voie de développement,en rendant les jeunes gens du troisième monde (je pense surtout à l'Amerique Latine et à beaucoup de pays d'Afrique) encore plus "différents", écrasés par une mathématique plus difficile car plus éloignée de la réalité et,en particulier,de leur tragique réalité.

Cet enseignement de la mathématique moderne,qui n'était pas un enseignement moderne de la mathématique,se poursuivit pendant plus de 15 ans.

1968 Le mouvement des étudiants Le mouvement des étudiants du 1968 n'a servi à rien:les jeunes se jetaient contre l'école,ils voulaient tout révolutionner car c'étaient eux,et seulement eux,qui étaient à même de comprendre "ce qui n'allait pas".Mais pendant ce mouvement historique contre tout et tous, l'enseignement de la mathématique n'est pas attaqué;pourquoi? Peut-être que,en jugeant le phénomène à distance,l'enseignement était tellement abstrait,tellement loin de la compréhension des jeunes, que les étudiants pensaient qu'il n'était pas possible de le développer d'une autre façon.Le '68 laisse donc en paix l'enseignement des mathématiques.

976 Ce ne sont pas les jeunes qui ont provoqué un changement,mais la
la rébellion est venue "d'en haut".Pendant le Congrès de l'ICMI du
géomé= 1976,à Karlsruhe,le géomètre anglais Michel Atyiah attaque avec
trie force les collègues mathématiciens dans une conférence plénière.
"Vous avez détronisé Euclide -dit-il- et nous sommes d'accord. Mais,comment avez-vous substitué l'enseignement de la géométrie? La mathématique qu'on enseigne dans la plupart des pays est encore plus éloignée de la réalité car elle n'a pas 'le soutien' géométrique. Rendez vous compte que l'intuition géométrique reste la source la plus puissante pour la compréhension de bien des sujets;et pourtant on devrait encourager le plus possible,et à tout niveau de l'école,la pensée géométrique".
La prise de position d'un grand mathématicien comme Atyiah venait à sécouer une situation qui,en réalité,était déjà sécouée pour les insuccès enrégistrés dans tout le monde.

'80.. C'est au debut des années '80 qu'on voit en bien des pays une vo=
comment lonté à opérer un changement.Plusieurs congrès internationaux ont
réintro= ~~pour~~ des thèmes tels que "comment enseigner la géométrie?","comment
duire la géo= réintroduire un enseignement géométrique?"
métrie

l'infor= C'est justement dans les années '80 qu'explose le boom de l'in=
matique formatique.On a l'impréssion d'avoir enfin trouvé "quelque chose" qui intéresse soit les élèves soit les professeurs,au moins les plus jeunes.Mais-on dit- ,à l'informatique,si on veut qu'elle faisse partie du cours de mathématique,on doit lui donner un rôle élevé:celui de développer la pensée logique.

la logi= On organise des congrès et des discussions sur les arguments de
que logique qu'on pourrait introduire,on rédige des programmes dans bien des pays en baissant toujours plus l'âge à laquelle "administrer" des éléments de logique.Mais,réfléchissons:déjà à partir de la moitié des années '80 "la logique en classe" contraste fortement avec "la classe";car la drogue,aussi la plus légère,qui a une diffusion toujours plus grande,amortit justement les facultés logiques.Celui qui vit dans la classe ne peut pas ignorer et n'ignore pas ces faits.

En même temps, peut-être pour la présence d'une logique non appropriée, ou peut-être car "les gouts" des jeunes changent très rapidement, l'enthousiasme des élèves pour l'informatique est en train de diminuer en bien des pays.

es ro= ammes

Il arrive aussi un autre phénomène: dans plusieurs pays les programmes de mathématique sont toujours plus surchargés. On exige que les élèves connaissent un nombre de plus en plus grand de sujets, car -on dit- ils en auront besoin soit s'ils continuent leurs études soit s'ils entrent dans le monde du travail. Le résultat est que les élèves, submergés par les connaissances à apprendre, deviennent passifs et ils se réfugient dans les "recettes".

Partie II

Dans ce cadre désolant et quelques fois contradictoire, quoi faire? Comment s'insérer parmi les jeunes? comment sécouer leur passivité?

Quoi faire dans un monde scolaire qui change alors que change aussi le monde géographique-politique dans lequel il est intégré?

Que faire en face du phénomène toujours plus massif des émigrés et des immigrés?

Comment "mener" tout le monde dans une recherche commune? Y-a-t'il des sujets de mathématique qui intéressent également les jeunes de tout le monde? Y-a-t'il <u>quelque chose qui ne change pas dans un monde qui change</u>?

Ce sont ces considérations sur lesquelles je voudrais attirer votre attention.

Réflechissons:

a) les jeunes sont angoissés car ils voient leur pays, et toute la terre, changer d'aspect;

b) ils sont angoissés pour leur propre physique, et les maladies nouvelles qui naissent et se répandent;

c) ils sont angoissés pour se trouver dans une ambiance toujours plus hétérogène,avec des camarades qui,peut-être,ont des intélligences plus aigues.

On comprend,alors,qu'il faut les conduire à l'étude de ces trois points.

a) <u>notre monde</u>

Il suffit d'observer les conditions climatiques du propre pays ou de pays voisins pour se rendre compte que dans ces dernières années sont en cours des changements tels à altérer le genre de cultures agricoles.On est souvent obligés à abbandonner les champs et,par conséquence,à développer une activité différente dans le monde du travail.Ou plutôt,c'est justement d'ici qu'on doit partir, c'est-à-dire du développement des industries,et donc de la nécéssité et de l'utilisation souvent aveugle de tout genre d'energie, pour se rendre compte de la dévastation des forêts,de l'abandon forcé des cultures,des changements du climat.Des données sur la distruction des forêts,sur les conditions toujours plus pénibles du 3-ème monde,c'est-à-dire du 3/4 de la population mondiale, et sur le climat et l'étât de notre terre,sont faciles à trouver et intéressent énormement tous les élèves:on est conduit à des études de <u>statistique</u>,liées avec de <u>graphiques</u> explicatifs.
Le monde qui change,dans son aspect géographique-social,donne pourtant lieu à une activité mathématique,et cette étude touche les élèves de tous les pays,comme si le monde se faisait plus petit.Et,en effet,la terre devient plus petite car en peu d'heures on se déplace d'un continent à l'autre.Et voilà:ce sont justement les vols intercontinentaux qui nous conduisent à introduire,aussi dans les classes des adolescents,un sujet qui,jusqu'il y a quelques années,était reservé aux cours supérieurs.Il suffit,en effet, de consulter les cartes géographiques des sociétés aériennes pour se rendre compte que les routes des avions suivent des arcs de grands cercles:ces arcs représentent les chemins les plus brefs

sur la terre, tout à fait comme les segments de droite sur le plan. La géométrie de la sphère, c'est-à-dire la géométrie non euclidienne devient, pour les garçons d'aujourd'hui, "à portée de main".

En plus que la statistique, la considération de notre monde nous conduit à introduire, dans l'école de tous, l'étude de la géométrie non euclidienne, en posant ainsi les prémisses pour la compréhension de l'axiomatique.

Et maintenant, du monde dans lequel on vit passons à considérer nous mêmes.

Dans les points b) et c) nous allons voir qu'on peut introduire bien des concepts mathématiques soit à partir de l'étude de notre physique soit en proposant des questions qui "excitent" l'imagination de tous les jeunes.

b) notre corps

Dans les années '80 (du 1977 au 1982) l'ingénieur et économiste français Jean Sauvy a organisé dans d'écoles d'enfants et de garçons de bien des pays, de l'Europe aux Etats Unis à l'Afrique, une enquête antropométrique qui avait pour titre "mesures du corps humain".

Il s'agissait de mesurer:

hauteur (h), longueur de la tête (t), distance du nombril du sol (n), ouverture des bras (b), largeur de la main ouverte (m), longueur du pied (p).

Ces mesures ont été prises sur un nombre si élévé d'élèves de différents âges qu'on peut compter sur des sérieux résultats statistiques. On a trouvé que, dans des races diverses, à un âge donné, les rapports entre ces mesures, par exemple t/h, m/h, h/b, .. ne changent pas d'une façon sensible.

Et si, avec le changement d'âge, quelqu'un de ces rapports change, la variation chez des enfants de pays différents est la même.

Il s'agit d'une enquête qui enthousiasme les élèves, qui les fait exercer sur mesures,rapports,grandeurs directement proportionnelles, graphiques,moyennes statistiques. L'enquête a conduit à comparer les enfants d'une classe avec ceux d'une autre classe de la même école,avec des enfants d'autres écoles,d'autres pays,d'autres continents,d'autres races,et à se rendre compte que..."nous sommes tous égaux". C'est une enquête que,dans les petites classes,fait sentir à l'enfant que l'enseignant est plus près de lui car "il s'occupe justement de lui".

Dans les classes d'élèves plus âgés on est conduit à l'étude de la croissance ,et,donc,à l'augmentation du nombre de cellules.

Le phénomène de la segmentation cellulaire ne pourra pas être oublié si on procède à l'observation directe:il suffit d'observer avec une loupe le développement des oeufs de crapaud,qui se trouvent facilement dans les étangs,au printemps.On remarque que,en quelques heures,d'une cellule on passe à deux,de deux à quatre,à huit,... jusqu'on arrive à une petite sphère formée de centaines et centaines de cellules.

Du point de vue mathématique,si on indique par x le nombre de divisions et par y le nombre de cellules,on a $y=2^x$;c'est"la loi de la vie".

Cette loi exponentielle ,relative à la segmentation cellulaire est,évidemment,une loi discontinue.Il est spontanné,pour avoir le graphique d'une courbe,de se détacher du phénomène biologique; on est ainsi conduit à l'étude de la courbe dans tout le champ réel.

En révenant à la biologie,on peut dire que la loi,qu'on a appelée "de la vie",est,aussi,la loi"de la mort":en effet l'augmentation des cellules malades suit la même loi.

Et encore des maladies:les maladies héréditaires.En être atteint ou être porteur;s'impose l'étude de la probabilité.

Mais aujourd'hui intéresse et angoisse "la maladie d'aujourd'hui": le SIDA.Une étude de caractère statistique avec de prévisions sur la diffusion de ce virus dans les années à venir intéresse tout le monde.Il s'agit d'une maladie qui-comme on le sait-est liée à la drogue.On est alors conduits au problème de la diffusion de la drogue dans le monde:des cultures au commerce,aux manipulations, aux effets des stupéfiants.

L'étude de notre corps nous a donc conduit à une gamme étendue de sujets de mathématique:

mesures,rapports,simples lois de proportionnalité directe,statistique, graphiques,lois exponentielles,courbes,notion de function,probabilité.

c) nos structures mentales

Tandis qu'il est facile de conduire une enquête sur des données phy=siques de notre corps,il est beaucoup plus difficile de comparer les structures mentales d'élèves qui appartiennent à pays différents. Par quelles notions et sujets de mathématique peut-on mettre en re=lief égalités ou différences dans le comportement intellectuel? Comment surmonter la diversité de programmes et de méthodes qui se réalisent dans les différentes écoles?

Dans ce cas je dois me référer à des expériences réalisées par moi-même et par un group d'amis,pendant une trentaine d'années,dans des différents pays,avec des élèves âgés de 11 à 16 ans.Il s'agit de pays européens et de pays d'autres continents (Amerique Latine et Afrique).Les expériences ont été conduites à une si large échelle qu'on peut assurer des résultats statistiquement valables.

Les sujets proposés aux élèves étaient au de là du petit "chapitre" du programme;se rapportaient toujours à des"questions dynamiques", c'est-à-dire à variations et à transformations:par exemple, à variations d'aires,périmètres,volumes,surfaces.Toutes les questions étaient proposées aux élèves de façon à obtenir des réactions de caractère intuitif ou basées sur des simples raisonnements géomé=triques,avant de passer à de vérifications numériques ou algébri=ques.

On a enregistré observations,erreurs,commentaires,en trouvant une impréssionante égalité de réponses.

Je veux vous donner,par un exemple,une idée des problématiques proposées.
Avec deux feuilles égales on construit deux cylindres en roulant la feuille sur l'un ou l'autre côté.On imagine de construire une base à ces cylindres de façon qu'on a deux récipients.On demande: "ces deux récipients contiennent ou non la même quantité de matériel,par exemple de farine? c'est-à-dire,ont-ils le même volume?" La question semble,toujours,sans signification,et les réponses sont, toujours,celles-ci:"c'est sûr qu'ils ont le même volume étant donné qu'on les a construits avec des feuilles égales";"c'est sûr,car ce que l'on perd en hauteur on le gagne en base,et comme le volume se trouve en multipliant l'aire de la base pour la hauteur...".
J'ai relevé une réaction tout à fait différente chez des ouvriers qui ont l'habitude de transporter des poids.Ils disent tout de suite:"on comprend que le cylindre plus bas est plus lourd".

Les réactions obtenues chez les élèves de bien des pays font comprendre que les structures mentales en face de gros problèmes dans lesquels,comme dans celui-ci,entre le concept de function , ne tiennent pas à cultures,traditions,races.Mes élèves du Niger étaient très hereux lorsque j'ai dit que leur camarades de Rome donnaient les mêmes,identiques réponses,et qu'ils faisaient les mêmes observations.Quelqu'un a dit:"ceci veut dire qu'aussi un noir peut avoir la même intélligence d'un blanc!"
Réfléchissons sur cette observation,naïve et tragique en même temps: la mathématique confirme que les structures mentales ne changent pas en passant d'un continent à l'autre.

Et l'histoire nous dit qu'elles ne changent non plus tandis que le temps passe:dans une page de Galileo du dialogue "Sur deux sciences nouvelles",il pose ce problème des cylindres à ses amis, et il reçoit la réponse "c'est sûr,les deux cylindres ont le même volume car il sont construits par la même feuille de papier".Galileo observe que "nos paysants" ne tombent pas dans cette erreur:pour eux il est évident que pour transporter le blé dans des sacs faits par la même toile il vaut mieux construire des sacs plus bas car ce sont ceux-ci qui contiennent une plus grande quantité de blé.

Je voudrais maintenant arriver à une conclusion.
Je retourne en pensée à des considérations faites,il y a bien des années,par trois amis de la Commission,et qui m'ont toujours servi de guide:les amis sont Ana Zofia Krygowska,Willy Servais,Hans Freudenthal.

Pendant les longues conversations avec Ana Zofia,j'étais toujours frappée du rôle,scientifique et social,qu'elle voyait dans le métier de l'enseignant;un rôle qu'elle a synthétisé dans ces quelques li= gnes écrites en 1966:"Le professeur de mathématique doit avoir l'esprit ouvert aux problèmes qui se posent aujourd'hui et qui se poseront demain dans l'enseignement.Il doit être conscient que son métier lui donne la possibilité d'une création dans le champ didac= tique aussi excitante que la création du mathématicien dans la science pure".
Et je vais encore plus loin dans le temps.Je pense à un Congrès qui avait comme titre "la responsabilité humaine du professeur de ma= thématique" et qui eu lieu à Bruxelles en 1958 à l'occasion de l'Expo= sition Universelle.J'ai les notes de deux conférences qui m'avaient particulièrement frappée:il s'agit d'une conférence de Servais et d'une conférence de Freudenthal.
Willy Servais mettait en relief la différence entre "le travail des nos maîtres qui -disait-il- étaient,dans leur métier d'ensei= gnants,responsables seulement en face des mathématiques,et le tra= vail d'aujourd'hui dans lequel l'enseignant,devant à des élèves qui viennent de plus en plus de milieux différents,doit se prodi= guer pour faire aimer la mathématique à tout le monde,encourageant les plus faibles".

Hans Freudenthal, dans sa conférence, soutenait que c'est justement le professeur de mathématique qui peut avoir une grande influence sur les rélations humaines, poussant ses élèves à la collaboration, et tout ça -disait-il- car "son enseignement se tient sur la raison".

Aujourd'hui, en 1990, les déclarations de ces amis sont encore tout à fait valables pour diriger le travail du professeur de mathématiques. Car aujourd'hui, avec de classes toujours plus hétérogènes, le travail créatif du professeur de mathématique est celui de mettre en relief que les différences parmi des élèves de races et cultures différentes sont tout à fait superficielles si on les compare avec les ressemblances profondes qui rapprochent toute l'humanité.

Emma Castelnuovo

Juillet 1990