C.I.E.A.E.M

COMMISSION INTERNATIONALE POUR L'ETUDE ET L'AMELIORATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

INTERNATIONAL COMMISSION FOR THE STUDY AND IMPROVEMENT OF MATHEMATICS TEACHING

Representations graphique et symbolique de la Maternelle à l'Université

Graphical and symbolic representations from primary school to university

Tome 1

ACTES DE LA 46ème RENCONTRE DE LA CIEAEM
PROCEEDINGS OF THE 46th CIEAEM MEETING

CIEAEM 46

TOULOUSE (France) : 10 - 16 juillet 1994

Les représentations graphiques en mathématique : une esquisse historique

Emma Castelnuovo

The origin of graphic representations are studied from paleolithic art until some works of Nicole d'Oresme and Galileo, concerning problems of physics. Then, the first graphics concerning the everyday life are presented, pointing out the difficulties that this introduction encountered during the centuries. The whole paper is inspired by social motivations.

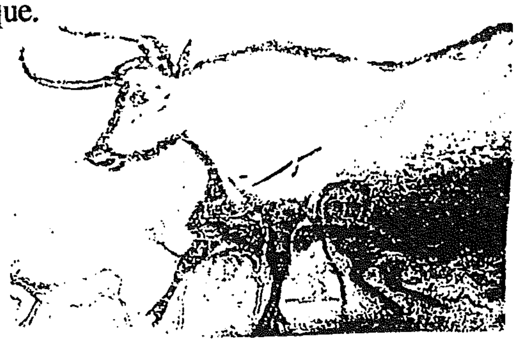
En partant de l'art du Paléolithique on arrive aux représentations graphiques de Nicole d'Oresme et de Galileo, concernant quelques problèmes de physique. On passe aux images graphiques de faits les plus variés, en soulignant les difficultés que ce moyen graphique a eu pour s'imposer au long des siècles. Tout l'article est inspiré par des motivations sociales.

L'histoire des représentations graphiques en mathématique est, en même temps, ancienne et récente. Ancienne car ces représentations commencent dans la préhistoire et se développent au long des siècles avec des hauts et des bas, jusqu'à revêtir aujourd'hui une importance qui va au-delà de la mathématique et de la science en général. En effet, aujourd'hui, l'image visuelle exerce sur nos actions et les décisions de notre société une influence bien plus importante que le texte écrit.

D'autre part, on peut dire que l'histoire des graphiques est relativement récente si au terme "représentation graphique" on donne le sens qui est aujourd'hui le plus courant: *un dessin qui reflète la variation des phénomènes et des faits concernant la réalité.* C'est à ce sens que je veux me rapporter indépendamment de la théorie de la géométrie analytique.

La représentation graphique dans le sens le plus large conduit au dessin, à l'art. C'est justement l'art dont je vais partir. Réfléchissons sur quelques images remontant à des époques très anciennes et qui révèlent une sensibilité mathématique.

fig.1

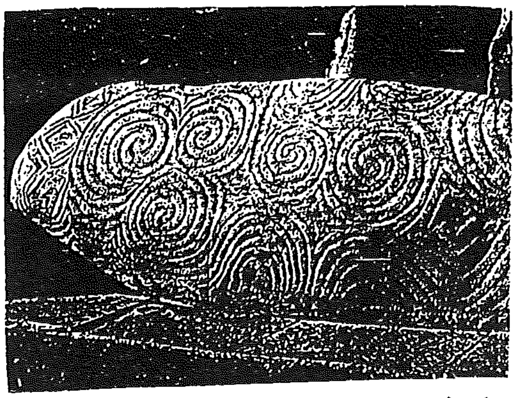


Voici (fig. 1) un taureau peint sur une paroi de la grotte de Lascaux. On est frappé par les proportions entre les différentes parties du corps. Il y a dans ces dessins du Paléolithique un sens instinctif de la mathématique. On reste encore plus impréssionné par la reproduction fort agrandie d'une girafe gravée sur le "toit" horizontal d'une colline rocheuse en plein désert du Niger (à 130 km au Nord d'Agadès). Etant donnée l'extension de la gravure je n'ai pas eu la possibilité de la photographier tout entière avec une caméra normale. On avait donc gravé l'animal en se basant sur ses proportions et sans pouvoir jouir d'une vue d'ensemble. Ces gravures remontent - paraît-il - au Néolithique africain.

Rentrons maintenant en Europe. Lorsque du Paléolithique on passe au Néolithique on remarque que l'homme, étant devenu paysan, n'a plus besoin du sens aigu qu'avait le chasseur.

Il est pourtant motivé à s'exprimer d'une façon abstraite : par un dessin il exprime une pensée, une idée. Les fameuses spirales, typiques de la période néolithique en Irlande (fig. 2), signifient peut-être un retour sur soi-même ou peut-être l'éternité. L'exactitude du dessin revèle sans doute des connaissances mathématiques.

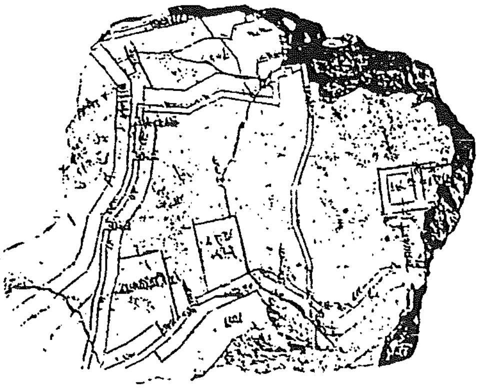
fig.2



Dès 3000 ans avant J.C., époque à laquelle remonte cette spirale, passons à des civilisations plus récentes.

Voici (fig. 3) le plan de la ville de Nippur, un fameux centre religieux et culturel en Babylone. Ce plan, gravé sur une tablette d'argille, remonte à 1500 avant J.C.. Des fouilles réalisées successivement sur le lieu ont montré que le plan dessiné correspond exactement à la ville. On a donc un dessin qui atteste de sûres connaissances mathématiques.

fig.3



J'ai montré des représentations qui sont sans doute liées à la mathématique mais on est encore loin du graphique reflétant un phénomène variable.

Voici (fig. 4) une peinture qui marque le début de la représentation graphique dans le sens qu'on lui donne aujourd'hui: un dessin réalisé sur un plan coordonné. Il s'agit du plafond de la tombe du pharaon Ramsès VII, époque 1100 avant J.C.. Sur un fond quadrillé on a représenté un ciel étoilé afin que le pharaon puisse admirer toujours ce spectacle merveilleux. Chaque étoile a sur ce plan sa position selon l'heure dans laquelle on l'a observée. On peut considérer cette peinture comme le début de représentation sur un plan coordonné. Mais il s'agit seulement de points lumineux. On n'a pas représenté les parcours des étoiles.

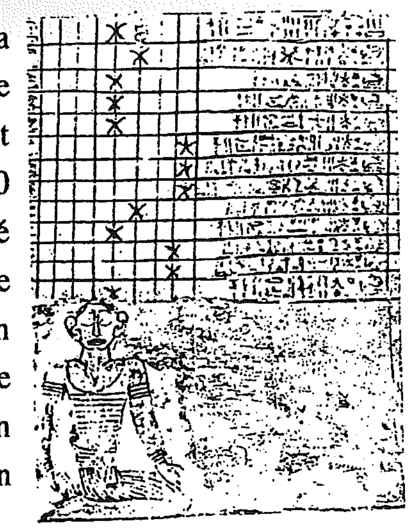
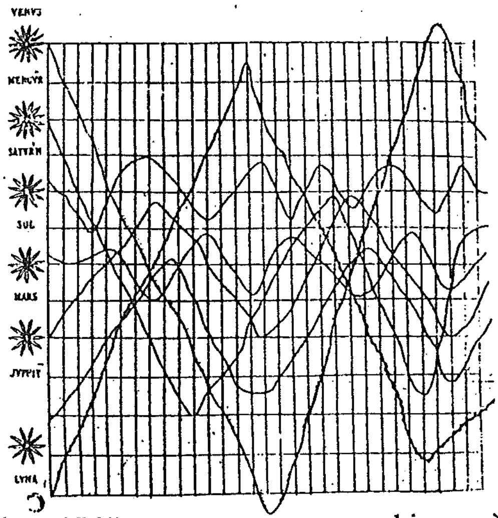


fig.4

On se demande: comment pouvait-on penser à dessiner un parcours qu'on ne voit pas ? Et pourtant quelquefois on le voit: on voit en effet une étoile filante. Ces étoiles ont exercé depuis toujours un attrait particulier sur l'humanité, mais aucun dessin sur une étoile filante ne nous est arrivé. Nous avons, au contraire, plusieurs écrits de la part de poètes, d'écrivains, d'astronomes. Voici la description d'une étoile filante faite par Marco Manilio, un astronome romain du Ier siècle après J.C.; il écrit: «La nuit, lorsque les étoiles scintillent partout dans le ciel, on voit des lumières se précipiter ou errer dans l'espace. Elles laissent une longue trace qui devient de plus en plus mince comme si c'était un fil». La description pouvait suggérer une image, mais, comme j'ai dit, rien ne nous est arrivé.

Au contraire, il y a des parcours bien plus abstraits que nous trouvons dans un parchemin du X^{e} ou XI^{e} siècle après J.C., et qui se trouve à la Bibliothèque Royale de Münich (fig. 5). On a indiqué sur ce parchemin les trajectoires des planètes dans un système de référence espace-temps. C'est le premier graphique dans lequel sont décrites des trajectoires. Il s'agit d'un phénomène du ciel en dehors de nous, indépendant de notre action.

fig.5



Faut-il attendre encore deux siècles et arriver à l'an 1360 pour trouver un graphique où l'on voit l'action de l'homme. On doit à un religieux, l'évêque français Nicole d'Oresme, l'idée de concentrer l'attention non pas sur un phénomène du ciel, mais sur un phénomène de la terre. Un travail d'Oresme sur un problème de physique montre la nouvelle fonction des graphiques dans ce champ. Oresme étudie soit le mouvement uniforme soit le mouvement uniformément accéléré. Il visualise le mouvement comme ceci (fig. 6): les points d'un segment AB représentent les temps successifs; la valeur de chaque instant est donnée par la distance du point de l'origine B: c'est sa *longitudo*.

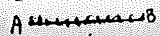


fig.6

Sur chaque point de AB il construit, perpendiculairement à AB, un segment de longueur égale à la vitesse du corps dans cet instant. La longueur - dit-il - on doit la voir (*imaginanda est*) comme intensité de la vitesse; et donc à chaque vitesse il attribue une *latitudo*. Dans les dessins d'Oresme (fig. 7) on peut voir les cas suivants:

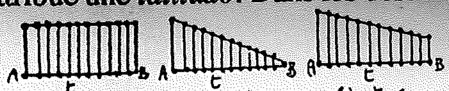


fig.7,a fig.7,b fig.7,c

a) la vitesse est toujours la même et on a un *rectangle;*

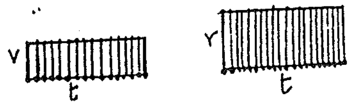
b) la vitesse augmente de façon constante à partir de zéro et on a un *triangle rectangle;*

c) la vitesse augmente de façon constante, mais ne part pas de zéro et on a un trapèze rectangle.

Si on joint les points extrêmes des vitesses on a une ligne (dans ces cas une droite) à laquelle Oresme donne le nom de *linea summitatis*. Dans le langage de la géométrie analytique la *linea summitatis* correspond au graphique de la fonction.

Après avoir expliqué, en se rapportant au mouvement uniforme, qu'une vitesse est plus grande qu'une autre si dans le même temps le corps parcourt un espace plus grand, Oresme dit que cela correspond au fait que l'aire du rectangle des vitesses est plus grande (fig. 8). Il est ainsi conduit à

fig.8



l'affirmation que l'espace s parcouru est lié au temps t et à la vitesse v par la formule

$$s = vt$$

En conclusion, pour Oresme le mouvement trouve son interprétation dans la géométrie des figures.

Mais revenons à ce qui nous intéresse le plus, c'est-à-dire aux premières idées sur le plan coordonné. Oresme dit qu'à chaque point de la *linea summitatis* correspondent deux nombres, la longitude et la latitude, attachés au temps et à la vitesse. Mais son tableau graphique semble être limité car il ne fait pas référence à des axes: il construit seulement des "petites barres" sur la base AB.

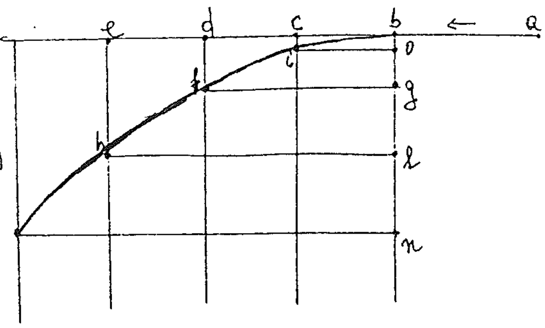


fig. 9

C'est Galileo qui, au bout de presque trois siècles, va reprendre l'ésprit d'Oresme avec une claire reférence à deux axes. Je vais me rapporter au dessin fait par Galileo (fig. 9) pour décrire la chute des corps, en citant aussi ces paroles (1638).

Un corps est animé de mouvement uniforme le long du plan *ab*; si en *b* le plan se termine, le corps devrait tomber le long de la verticale *bn*. Mais comme le corps garde son mouvement horizontal uniforme qui est «indestructible» on doit faire la composition de deux déplacements: un en direction de l'horizontale et l'autre en direction de la verticale. Pour dessiner la trajectoire Galileo marque sur la droite *be*, prolongement de *ab*, des intervalles égaux *bc*, *cd*, *de*, ..., et pour chacun des points *c*, *d*, *e*, ... il conduit la parallèle à la verticale *bn*. Sur ces verticales il opère comme ceci: fixe un segment quelconque *ci* et prend

$$df = 4\,ci \qquad eh = 9\,ci \qquad \ldots$$

c'est à dire «spatia *eh*, *df*, *ci*, ... inter se ut quadrato linearum *eb*, *db*, *cb*, ...»

Donc il prend les segments selon la loi des carrés qui lie espaces à temps dans le mouvement naturellement accéléré. De cette façon il construit point après point la trajectoire du mobile; trajectoire qui en résulte est une parabole à cause d'une propriété de cette courbe. On peut dire qu'on est conduit, pas à pas, à la construction de la courbe ; de plus, la disposition des axes de référence rend la compréhension plus facile car le graphique correspond exactement à la trajectoire qu'on voit "par les yeux".

Avant de continuer réfléchissons sur le chemin suivi : à partir d'un graphique représentant des parcours qu'on ne voit pas,les parcours des planètes, nous sommes passés à un graphique, celui d'Oresme, dans lequel on sent l'expérimentation. Mais la représentation, bornée à une zone du plan, est encore abstraite car il est difficile de saisir la vitesse comme un segment. On arrive ensuite au graphique de Galileo sur la chute des corps. Il s'agit d'un graphique qui correspond au fait concret : c'est un concret. Mais - on se demande - s'agit-il d'un concret qui intéresse tout le monde? C'est sûr que la chute des corps est un phénomène que tout le monde a sous les yeux. Mais quelle importance peut avoir pour l'homme de la rue d'établir une loi de physique et dessiner son graphique? Les gens ne se font pas un problème de ce... problème.

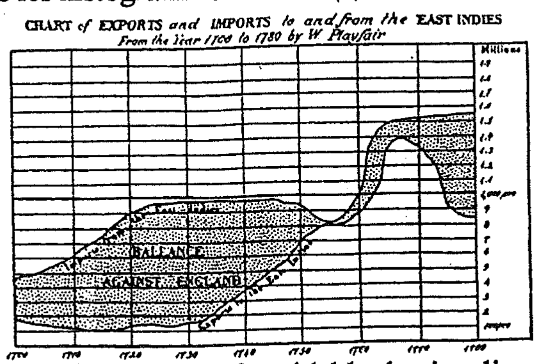
Réfléchissons que les gens se sont toujours préoccupés, à partir du Paléolithique, de leur vie jour après jour: les animaux qu'on représentait voulaient signifier un danger et, en même temps, une source de subsistance.

Au temps de Galileo, un tas de problèmes de caractère économique, technologique, médical, ... se présentaient à une société en plein développement. Pourquoi jusqu'à la fin du XVIII^{e} siècle, c'est à dire un siècle et demi après Galileo, ne trouve-t-on aucune représentation graphique concernant ces nombreux problèmes ? On trouve seulement, dans plusieurs pays, des tables numériques qui montrent des investigations genre statistique, mais toujours sans images. On se demande: le purisme de la géométrie cartésienne n'aurait-il pas "retenu" de représenter sur les axes des grandeurs de type différent ?

Pour le moment laissons la question de côté, et allons nous occuper des documents et des recherches historiques récentes qui ont mis en lumière ce qui s'est passé dans l'histoire des graphiques ces derniers siècles.

Il paraît que c'est un anglais non mathématicien, un certain William Playfair, auquel revient le mérite, à la fin du XVIII^{e} siècle, d'avoir "secoué" les gens par ses graphiques de genre économique et financier. W. Playfair (1759-1823), dont le nom ne se trouve même pas dans les grandes encyclopédies, a été décrit par ses contemporains comme un type original, jamais stable dans son travail et son activité : de dessinateur à commerçant, à inventeur des plus divers outillages, à agitateur politique aussi en France. Encouragé par son frère John, un naturaliste assez connu, il a eu l'idée d'exprimer par des figures géométriques les variations de l'argent des entreprises auxquelles il s'intéressait. Libre de tout scrupule académique, il écrit: «Il n'est pas illogique de mettre en relation deux grandeurs de genre différent comme le temps et l'argent. Le soir, lorsque je rentre chez moi, avec l'argent que j'ai gagné, j'empile une guinée sur l'autre en formant ainsi des petits cylindres. A la fin de la semaine je comprends alors, d'un seul coup, quel jour j'ai gagné davantage».

Playfair, avec ses piles de guinées, avait inventé les histogrammes ! fig.10



C'est toujours à Playfair qu'on doit l'introduction des diagrammes d'aire, des diagrammes à secteurs circulaires, et l'usage fréquent des courbes pour visualiser les activités les plus variées. Voici (fig. 10) un graphique qui montre les exports et imports entre l'Angleterre et les Indes Orientales pendant la longue période 1700-1780.

Par ses représentations graphiques Playfair a introduit un moyen formidable de visualisation surtout sur des problèmes économiques et financiers. On est à la fin du XVIIIè siècle.

On n'a pas encore des graphiques sur l'homme, sur sa propre vie. Mais c'est justement sur l'homme, sur sa vie et sa mort qu'avaient commencé, toujours en Angleterre et déjà à la moitié du XVII^{e} siècle, des études de statistique. En 1662, en effet, vient de paraître un petit livre intitulé «Observations naturelles et politiques faites sur les bulletins de mortalité de la ville de Londres». L'auteur est John Graunt, un commerçant de draperies. Dans ce petit volume on trouve tables et tables de nombres concernant les différentes causes de mort : peste, scorbut, suicide, gale, ...; en bref, cent causes de mort. Le livre est fort amusant bien que le sujet ne soit pas des plus gais. Mais ce livre ne contient pas de graphiques ; on a seulement des tables numériques.

Il faut attendre encore pour trouver des données sur la mort rendues "vivantes" par un dessin. Voici (fig. 11) un graphique du 1827 ; il est de Adolphe Quételet, astronome et anthropologue belge. Le dessin décrit le rapport entre la population et le nombre de morts selon les différentes provinces des Pays-Bas.

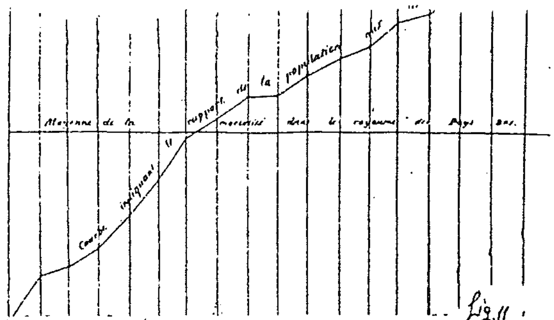
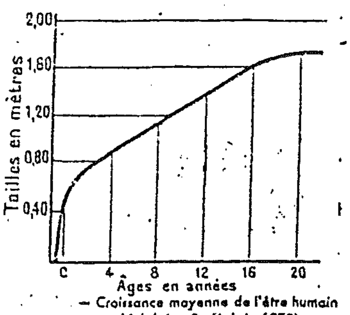


fig. 11

A. Quételet - 1827

C'est toujours Quételet qui, par un graphique, attire l'attention sur quelque chose qui est encore plus près de l'homme de la rue : l'augmentation de la taille à partir de l'enfance jusqu'à 20 ans (fig. 12). Ce graphique est de 1870.

fig. 12



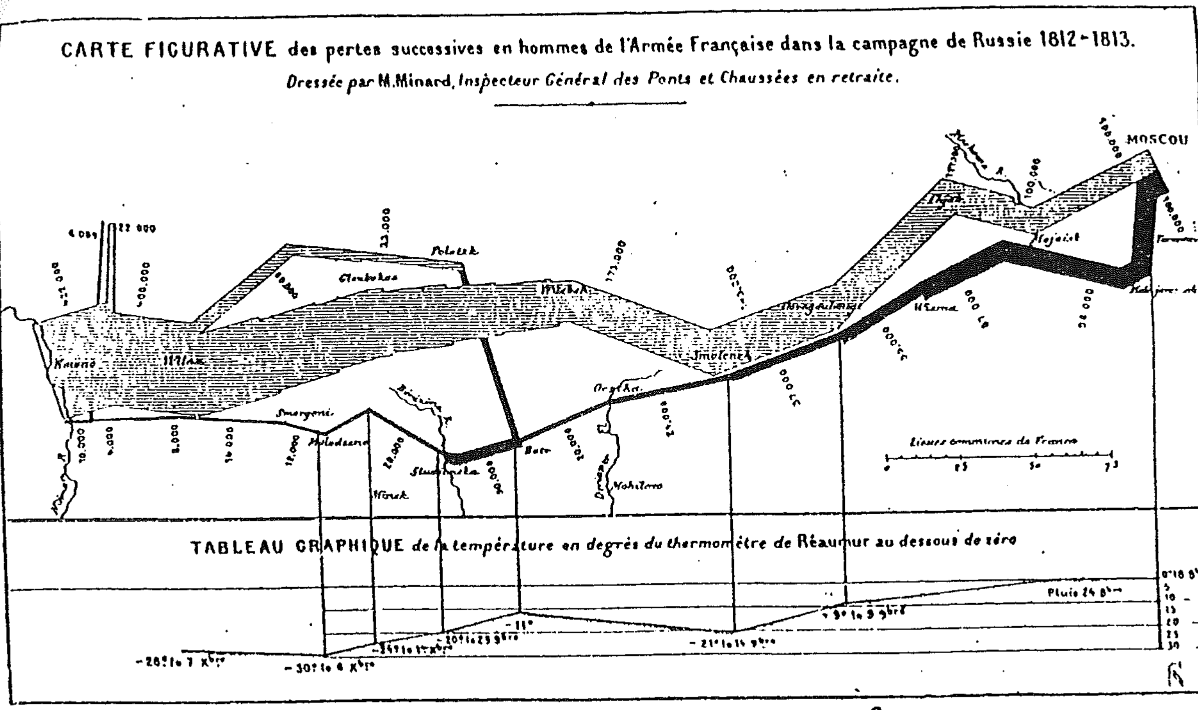
— Croissance moyenne de l'être humain (Adolphe Quételet, 1870).

Mais quel homme Quételet prend-il en considération? Car il y en a qui grandissent vite et d'autres plus doucement ; il y en a qui parviennent à une taille au-delà de la norme et qui, par contre, restent très petits. Quételet se réfère justement à la *norme* : son graphique réfléchit les caractères normaux. On sent l'influence du mathématicien Gauss sur l'antropologue Quételet.

Voilà, on est arrivé à une représentation graphique qui dit quelque chose aux gens : mon fils a-t-il une taille au-dessus, au-dessous de la moyenne? La taille : à quoi tient-elle? Bien des questions qui font penser : elles sont suggérées par un dessin.

Désormais, à la fin du dernier siècle, on était arrivé aux plus différentes utilisations des graphiques: des activités commerciales aux problèmes démographiques, à la santé de l'homme,...

D'autres graphiques, en regardant le passé, conduisaient la société à refléchir sur la politique. Voici (fig. 13) une représentation graphique, dirais-je un tableau, dressé par l'ingénieur français Charles Minard en 1861: il représente l'avance et la retraite de l'armée française dans la campagne de Russie 1812-1813. Dans ce tableau le nombre de facteurs et de causes est si grand qu'il faudrait une description comportant des pages et des pages pour tout raconter. Par contre, un dessin, détaillé jusqu'à l'indication des températures dans cet hiver terrible, rend toute cette campagne vraiment inoubliable.



X^bre = December 9^bre = November *fig.13* 8^bre = October

On est arrivé à notre époque.

Aujourd'hui on est "bombardé" de graphiques de tout genre : de courbes à histogrammes, à diagrammes à secteurs, à...

On voit des représentations graphiques non seulement sur l'écran télévisé mais sur les journaux et les revues de tout genre. On se propose, par ces moyens en forme d'images, de donner des informations à tout le monde.

Et encore une fois on se demande pourquoi ces moyens illustratifs si visibles, si immédiats et qui répandent l'information dans la société ont eu tellement de la peine à pénétrer.

Nous sommes conduits à réfléchir : s'agit-il seulement de l'influence puriste des mathématiciens, ou y-a-t-il d'autres raisons?

Ne craignait-on pas, peut-être, qu'en mettant à la portée de tout le monde, à travers un moyen visuel, les faits sociaux les plus variés, les gens n' acquièrent la possibilité d'intervenir sur la science, l'économie, la politique, ..., sujets qui, exprimés en nombres, symboles, formules, étaient réservés à peu de personnes?

Bibliographie

Azcarate Gimenez, Carmen: *Las matematicas de Galileo,* Universidad autonoma de Barcelona, 1984

Beniger J.R. and Robyn, D. L.: 'Quantitative graphics: a brief history', *The American statistician,* 1978, vol.32, n°1

Boll, Marcel: *Le mystère des nombres et des formes,* Librairie Larousse, 1941

Boyer, Carl B.: *A history of mathematics,* John Wiley, New York,1968

British Museum: *Introductory guide to Egyptian collections*

Chiéra, Edward: *Les tablettes babiloniennes,* Editions Payot, Paris

Clagett, Marshall: 'The science of mecanics in the Middle Age',*Critical problems in the history of science,* University Wisconsin Press, Madison,1959

Di Bacco, M. e Lombardo, E.: *Fatti e congetture,* La Nuova Italia Editrice, Firenze,1990

Fienberg, Stephen E.: 'Graphical methods in statistics',*The American statistician*, 1979, vol.33, n°4

Funkhouser, H. G.: *A note on a tenth century graph*, Osiris 1936

Graunt, John :*Natural and political observations upon the bills of mortality*, London 1662

Kline, Morris: *Mathematical thought from ancient to modern times,* Oxford University Press, 1972

Neugebauer, Otto: *The exact science in antiquity,* Harper, New York, 1962

Quételet, Adolphe: *Antropologie,* Bruxelles, 1827

Royston, Erika: 'A note on the history of graphical presentation of data' *Studies in the history of statistics and probability,* Edited by E.S. Pearson and M.G. Kendall, 1970

Smith, David Eugene: *History of mathematics,* Ginn and Co., Boston,1923

Struik, Dirk J.: *A source book in mathematics, 1200-1800,* Harvard University Press, 1969

Tufte, Edward: *The visual display of quantitative information*, Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1983