EMMA CASTELNUOVO

UN INSEGNAMENTO MODERNO DELLA MATEMATICA NELLA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

Estratto da ARCHIMEDE - Fasc. 4, 1964

FIRENZE
CASA EDITRICE FELICE LE MONNIER
1964

UN INSEGNAMENTO MODERNO DELLA MATEMATICA NELLA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO [1]

In questa relazione mi limiterò a parlare della scuola secondaria di primo grado; mi sento di parlare solo di quella scuola dove insegno da molti anni.

Quanto vado a riferire sono dunque delle esperienze condotte in classi di bambini dagli 11 ai 14 anni. Ma non si tratta solo di esperienze fatte da me; esse vengono da un gruppo di colleghi con cui lavoro da molto tempo e che insegnano nei più disparati angoli d'Italia, da grandi centri a piccolissimi paesi. Nell'ascoltare me ascolterete dunque la voce di tutti questi colleghi, o forse, più precisamente, il continuo intervento dei bambini delle nostre classi.

Dico subito che quanto riferirò non è che qualche esemplificazione, dalla quale non so, in verità, se possa risultare l'inquadratura di un contesto generale: queste esperienze vanno infatti pensate in un contesto generale e non debbono apparire come degli espedienti isolati atti solamente a rendere la lezione più brillante.

Ho detto che voglio parlare di bambini; comincerò dunque col presentarveli, questi bambini, dal punto di vista matematico.

Sono bambini che, quando entrano alla «media», molto spesso non collegano l'operazione diretta con quella inversa anche nei casi più semplici; per esempio, se anche sanno che il prodotto di 6 per 7 è 42, il più delle volte rimangono incerti sul valore del quoziente ottenuto dividendo 42 per 6. Sono bambini che riconoscono la figura quadrato quando sia disegnata sulla lavagna con i lati paralleli ai bordi della lavagna stessa, mentre il quadrato non è più per loro un quadrato se appare in un'altra posizione. Sono bambini che, dopo aver trovato che la somma dei primi 10 numeri naturali è uguale a 55, sostengono che la somma dei primi 20 risulterà uguale al doppio di 55.

Noi abbiamo classi di 30-35 allievi, le nostre esperienze riguardano quindi migliaia di bambini; orbene, un 25 su 30 all'inizio della scuola media ci dà queste risposte.

So bene quali reazioni possono suscitare questi dati di fatto: sono i maestri elementari – dirette – che preparano male i nostri bambini, che insegnano male, che indirizzano male. A chi formula questa accusa mi permetto rispondere in modo molto chiaro: è facile accusare chi è al di sotto di noi, al di sotto perchè insegna ad allievi di età inferiore, ma rendiamoci conto che questi insegnanti di scuola elementare siamo noi, professori di scuola secondaria, che li abbiamo preparati, rendiamoci conto che, una volta terminato l'Istituto magistrale, essi vengono lasciati a loro stessi, e che la vita di grande sacrificio che essi conducono, spesso con classi di 50 allievi, o con le pluriclassi, o con doppi o tripli turni, o dislocati nei centri più sperduti con disagi di ogni genere, questa vita – dico – non è riconosciuta da nessuno di noi professori. Se anche faranno errori nell'insegnare la matematica, essi si prodigano il più delle volte nel cercar di educare più che di istruire, nel cercar di amare e di farsi amare, nel creare insomma quell'ambiente di reciproca comprensione e stima che

[1] Relazione letta nel terzo «Colloquio» di Villa Falconieri (Frascati) il 19 marzo 1964 (vedi fasc. 1-2, anno 1964, pag. 24).

deve esserci sempre fra maestro ed allievo a qualunque grado d'insegnamento se si vuole che la scuola sia veramente scuola.

Ma torniamo al nostro insegnamento; accettiamoli così, questi bambini, e non facciamo critiche ai loro maestri prima di aver fatto qualcosa per questi insegnanti elementari.

Vorrei fermare l'attenzione sui quattro punti sottolineati dal prof. Campedelli nella sua relazione [1], punti che possono forse ancora sintetizzarsi in due temi centrali:

a) significato del riferimento al concreto in una visione gruppale della matematica;

b) valore formativo dello studio di uguali schemi logici in capitoli diversi.

Ci renderemo conto, via via, che il linguaggio dell'insiemistica sorgerà in modo spontaneo dal contesto stesso degli argomenti.

Cominciamo dal primo tema: *significato del riferimento al concreto.* Ci si chiede subito quale senso si possa dare a questo appoggiarsi al concreto, a questo «ricorso all'oggetto e all'azione» che servirà, in un secondo tempo, come trampolino per l'astrazione. Ora, è proprio la frase «ricorso all'oggetto e all'azione» che ci indica, sempre partendo dal concreto, due strade distinte: ricorrere all'oggetto significa osservare l'oggetto in quanto tale, con atteggiamento passivo, significa, in breve, «intuire» l'oggetto nel senso etimologico della parola; ricorrere all'azione, invece, significa esperimentare, operare sull'oggetto, significa insomma intuire nel senso attivo, pestalozziano della parola. Per chiarire queste interpretazioni diverse mi permetto di portare un esempio riferendomi ad un concreto molto particolare. Immaginiamo di voler parlare del quadrato a dei bambini di 11 anni. Per arrivare ad una definizione di questo quadrilatero a partire dal concreto si potrà far ritagliare dei quadrati di carta, far osservare lati e diagonali, far citare dagli allievi stessi degli oggetti che hanno forma di quadrati, far guardare le facce di un cubo...; si potrà, anche, far disegnare un quadrato con riga e compasso. Si potrà poi far confrontare il quadrato con altri quadrilateri, come il rettangolo e il rombo, insistendo sui caratteri distinti e su quelli che sono comuni a queste figure. Da tutte queste osservazioni l'allievo dovrebbe essere condotto a dare da solo una definizione; ma una definizione a partire da queste esperienze esigerebbe una facoltà di astrazione capace di cogliere la proprietà caratteristica dal confronto di un numero ben limitato di figure. Ora, un tal processo verso l'astrazione a partire da un certo numero di osservazioni, un bambino di 11 anni non è in generale capace di farlo da solo; si rende allora necessaria la parola dell'insegnante e quindi l'imposizione di una definizione.

Vorrei invece far vedere, sempre a proposito della figura quadrato, come il passaggio dal concreto all'astratto sia reso più naturale non attraverso osservazioni sull'oggetto ma attraverso operazioni sull'oggetto. Ecco come si può condurre lo studio del quadrato: si danno al bambino delle strisce uguali (tipo meccano) collegabili agli estremi, e gli si dice di costruire il quadrato. Appena avrà fatto questa costruzione si accorgerà da solo che la figura che ha nelle mani può articolarsi, può trasformarsi in rombo. Il quadrato è dunque un rombo particolare, fa parte della famiglia dei rombi, dell'insieme dei

[1] Vedi «Archimede», fasc. 1-2, gennaio-aprile 1964.

rombi. Nell'osservare gli elementi che non cambiano (gli invarianti) e quelli che cambiano nel passaggio da una figura all'altra, egli arriverà da solo all'intuizione, con un ragionamento « al limite », della costanza della somma degli angoli, e, sempre appoggiandosi sul caso limite, si renderà conto che la funzione « somma delle diagonali » non è costante, come può sembrare alla prima intuizione. Scoprirà anche un altro fatto che contraddice la sua prima intuizione, e cioè che l'area varia, ed arriverà facilmente alla conclusione che la funzione area raggiunge il massimo nel caso del quadrato.

In modo analogo si può condurre lo studio dell'insieme dei parallelogrammi di cui fa parte il rettangolo.

Nell'esaminare queste figure il bambino ha osservato che sia nel quadrato che nel rettangolo le diagonali sono uguali; dovrebbe essere allora possibile creare un dispositivo per passare dall'una all'altra basandosi appunto sul carattere invariante: le diagonali sono uguali e si dimezzano (si mostra il dispositivo).

Il quadrato appartiene dunque all'insieme dei rombi, ma appartiene anche all'insieme dei rettangoli; i quadrati costituiscono l'intersezione dei due insiemi.

Il linguaggio dell'insiemistica, con l'appoggio dei diagrammi di Eulero-Venn, viene così a far parte, in modo naturale, del vocabolario del bambino, così come i termini di funzione, di passaggio al limite, di invariante erano entrati a scuola fin dal primo giorno.

Linguaggio dell'insiemistica e diagrammi di Venn varranno anche ad unificare nozioni diverse di geometria, di aritmetica, di scienze naturali, della struttura grammaticale di una lingua, di tutto quanto oggi può dirsi scienza.

Siamo stati trascinati dalla matematica, e più precisamente dall'operatività sul concreto. Ma vorrei, tornando un momento indietro, fissare l'attenzione sul fatto che non è solo una moderna visione della matematica che ci ha condotto a questa metodologia, ma sono le moderne concezioni pedagogiche – la intuizione con il significato di costruzione come le fu dato da Pestalozzi –, e le recenti ricerche di psicologia sulla nascita e sullo sviluppo delle strutture mentali del fanciullo (ricerche dovute in gran parte a Jean Piaget e alla scuola di Ginevra) che indirizzano a dare al concreto una funzione essenzialmente operativa: non è il materiale – ci dicono i risultati delle scuole psicologiche – che deve essere oggetto di attenzione ma è l'operazione sul materiale, operazione che, una volta interiorizzata, diviene astratta e assurge a concetto matematico. Matematica, pedagogia, psicologia conducono dunque, per vie diverse, a seguire una stessa linea: quella linea in cui all'oggetto si sostituirà l'azione sull'oggetto, e, quindi, all'ente matematico verranno sostituite le relazioni fra enti, delle leggi di composizione, dunque.

Ma facciamo un passo avanti sempre nell'analisi del quadrato; ci troveremo spontaneamente nel mondo delle trasformazioni geometriche.

Si può domandare al bambino che cosa accada dei punti del quadrato quando da quadrato si passa a rombo; egli vi dirà che ai punti del quadrato corrisponderanno punti del rombo, ma, così dicendo, egli intende riferirsi ai punti del contorno del quadrato. Si porterà allora la sua attenzione sui punti interni. Ma, immediatamente, sorgerà nella classe una discussione lunga e molto interessante; vi diranno: come è possibile che ai punti del quadrato corrispondano punti del rombo se abbiamo visto che l'area cambia? e penseranno ai punti, sempre più fitti, più ravvicinati, a mano a mano che il rombo « si schiaccia ». È impressionante vedere come un bambino di 12 anni arriva

da sè a cogliere il passaggio fra concreto ed astratto, e a concludere quindi che il punto matematico non ha dimensioni. E ci arriva non senza un fremito, cogliendo in pieno la grandiosità del concetto.

Ma torniamo ora alla corrispondenza: ad un punto del quadrato deve corrispondere un punto del rombo; si capisce subito che al centro del quadrato, punto d'incontro delle diagonali, corrisponderà il punto d'incontro delle diagonali del rombo. Ma, per gli altri punti? come si potrà trovare il corrispondente di un punto qualunque? C'è sempre più d'uno in una classe che suggerisce di individuare un punto nel quadrato con due fili tesi fra i lati e paralleli ai lati stessi. Un punto rimane dunque individuato da due coordinate; nasce così l'idea del quadrato « quadrettato ». Quando da quadrato si passa a rombo, le coordinate ortogonali si trasformano in coordinate oblique. (Si mostra la realizzazione materiale).

Il bambino stesso vi dirà quello che lo colpisce di più in questa trasformazione: a quadrati corrispondono rombi, a rettangoli (somme di quadrati) corrispondono parallelogrammi, a rette parallele corrispondono rette parallele; ed è questo che più lo impressiona: è costante il rapporto fra aree corrispondenti. Questa trasformazione è un'affinità.

È interessante trovare le figure trasformate di triangoli, di poligoni di un certo numero di lati, ecc. Ma vi chiederanno subito come si possano trovare le figure trasformate di figure a lati non rettilinei. È allora che ci è venuto in mente di « rinfittire » le maglie e di utilizzare una tela in cui le fibre siano ben visibili. (Si mostra il dispositivo: un telaio). Interessanti problemi possono venir suggeriti dall'articolazione di questo telaio. In modo molto elementare può calcolarsi l'area dell'ellisse trasformata di un cerchio, considerando il quadrato inscritto nel cerchio e il rombo, trasformato di questo, e quindi inscritto nell'ellisse.

Questi esercizi, di carattere teorico, valgono però a ravvicinare il mondo della matematica pura a quello reale: ed è proprio l'osservazione che un cerchio viene trasformato per affinità in ellisse che ricorda al bambino di avere visto tante volte questa trasformazione; ha spesso la forma di ellisse – vi dirà – l'ombra di un disco circolare, data dai raggi del sole.

Saremo allora condotti a parlare delle ombre date da una sorgente puntiforme; ed altre trasformazioni, come la prospettività, entreranno, nel modo più naturale, a far parte delle conoscenze del ragazzo.

Perchè, in effetti, il mondo delle matematiche moderne è molto più vicino a quello reale di quello della geometria euclidea dove le figure sono incatenate nei loro elementi rigidi.

Lo studio geometrico dell'affinità, che, come avete visto, nasce spontaneamente a partire dalla considerazione di figure articolate, ci fa riflettere se e come potrebbero introdursi anche nella scuola media delle relazioni atte a fissare analiticamente la corrispondenza. Ci proponiamo nei prossimi anni di studiare la questione.

Intanto, quale introduzione alla geometria analitica, sempre a partire dal concreto, abbiamo, fin da questo anno, fatto costruire rette e curve soddisfacenti a determinate condizioni. Ci siamo proposti, per esempio, di studiare perimetri ed aree di rettangoli tenendo fisso uno dei due elementi, e studiando, volta a volta, il cambiamento dell'altro. (Viene mostrato un tabellone, realizzato da bambini di una prima, dove sono attaccati dei rettangoli realizzati in cartoncino e disposti in modo da avere un vertice comune O e due lati lungo due rette perpendicolari, x ed y, uscenti da O; se il perimetro di questi rettangoli è ad esempio di cm 48, ed essi hanno dimensioni diverse, i vertici liberi si disporranno sulla retta di equazione $x + y = 24$. In un altro tabellone sono attaccati dei rettangoli aventi l'area di cm² 36 e dimensioni diverse, e in tal caso i vertici liberi vengono a disporsi sull'iperbole di equazione $xy = 36$).

Passiamo ora al secondo punto: *schemi logici che consentono una medesima inquadratura per argomenti diversi.*

Partiamo da cose ben note al bambino di 11 anni: numeri pari e numeri dispari. Sono cose note ma su cui non ha mai fermato la sua attenzione, e su cui lavora, d'altra parte, volentieri, perchè riesce da solo a fare delle scoperte. Invitiamolo a scrivere le leggi di composizione additiva e moltiplicativa di questi numeri. Mi limito qua a scrivere, simbolicamente, la legge additiva, indicando con p e d i numeri pari e i dispari:

$+$	p	d
p	p	d
d	d	p

Il bambino è colpito subito dal risultato della somma di due dispari; ed è proprio questo risultato che gli fa venire in mente come una regola analoga valga per la composizione di frasi affermative e negative: ad esempio, componendo i verbi «potere» e «trovare», si possono formulare queste frasi: «posso trovare», «posso non trovare», «non posso trovare», «non posso non trovare», e l'ultima frase ha valore affermativo. Questa legge di composizione grammaticale si può simbolicamente scrivere così:

$\cdot$	sì	no
sì	sì	no
no	no	sì

Passiamo ora ad un altro argomento, ben lontano dai precedenti: la composizione di rotazioni e di simmetrie in un caso molto semplice.

Consideriamo un quadrato e i suoi assi mediani. Realizzando materialmente il quadrato (in cartone) ed effettuando le piegature lungo le mediane, il bambino si renderà conto da solo della legge di composizione di rotazioni di 180° e simmetrie ad assi ortogonali. Indicando con R e con S l'operazione di rotazione e quella di simmetria, si avrà, simbolicamente, la legge:

$\cdot$	R	S
R	R	S
S	S	R

E, ancora una volta, passiamo ad un altro argomento: il prodotto di due numeri relativi, cioè la cosiddetta regola dei segni. Indicando simbolicamente con P e con N un numero positivo ed uno negativo, si potrà scrivere:

$\cdot$	P	N
P	P	N
N	N	P

Cambiano gli elementi su cui si opera, cambiano le leggi di composizione, ma gli stessi «motivi» si riaffacciano qua e là in questioni del tutto diverse che si incontrano nel corso triennale.

E vien da chiedersi se sia un fatto puramente estetico, il ripetersi di un motivo, o sia l'intuizione di una delle più grandi scoperte matematiche che tanto affascina i nostri ragazzetti. Forse è l'uno e l'altro.

Quello che maggiormente colpisce noi insegnanti è il fatto che questioni fuori dubbio astratte sono vissute dal bambino molto più intensamente di altre che sembrerebbero dovergli essere più vicine perchè più concrete.

Ma forse siamo noi che ci sbagliamo: noi le vediamo come astratte, tanto da indicarle sotto il nome di algebra astratta, perchè sono molto generali, perchè abbracciano gli argomenti più disparati, mentre, proprio per questo fatto, esse possono adattarsi anche a fenomeni concreti, possono rivestire apparecchiature tecniche, e regolare, ad esempio, il passaggio o meno di una corrente elettrica. Anche qui, come abbiamo osservato a proposito delle trasformazioni geometriche, potremo dire che le matematiche moderne sono molto più vicine al mondo reale, e quindi agli interessi del ragazzo, di quanto non sia un'algebra classica, spesso irrigidita in stretti schemi.

Vorrei che da questa relazione risultassero chiare le idee che il nostro gruppo è andato formandosi sulla base di considerazioni pedagogico-psicologiche, sulla conoscenza delle esperienze che si fanno all'estero, soprattutto nel Belgio, con cui siamo in continuo contatto, e sulla base del lavoro che svolgiamo nel nostro «laboratorio» che è la scuola di tutti i giorni: noi riteniamo essenziale introdurre le matematiche moderne nella scuola secondaria inferiore, ma non nel senso di presentare ai bambini una trattazione sistematica dei vari argomenti, dove ogni concetto, ogni nozione, ogni relazione abbia il suo posto definitivo. Vogliamo invece far vivere al ragazzo quel periodo di ansia e di irrequietezza, di lavoro di scoperta e di gioia, che dà la fase di studio precedente; vogliamo fargli provare, attraverso quella operatività sul concreto che egli è in grado di analizzare, l'intimo travaglio del matematico, non tenendogli mai nascosti i nostri dubbi e le nostre incertezze perchè sono soprattutto questi più che la limpida esposizione di una teoria che incitano al lavoro scientifico e che, pertanto, sono altamente formativi.

È evidente quindi che molti e molti argomenti rimarranno imprecisati, tutt'altro che rigorosi, talvolta appena abbozzati, ma sappiamo che quei cenni faranno nascere nei ragazzi il desiderio di indagare ancora.

D'altra parte, come ho detto all'inizio, nostra costante preoccupazione è quella di mettere un ordine fra i tanti argomenti, di raggrupparli, di darne una linea, e noi pensiamo che un vero aiuto nel senso didattico ci venga offerto dalla matematica moderna con la sua potenza unificatrice. È proprio lo spirito delle matematiche moderne, e non una esposizione sistematica, che da parecchi anni cerchiamo di introdurre nella scuola media, quello spirito che predisporrà l'allievo che continua gli studi alla successiva comprensione di un'assiomatica, e che darà all'allievo che termina la scuola dopo il triennio una larga visione dell'unità della scienza.

EMMA CASTELNUOVO.