Estratto da ARCHIMEDE - Fasc. 2-3, 1958

BASI CONCRETE IN UN PRIMO INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA (*)

Metodo descrittivo e metodo costruttivo

Si parla oggi in Italia, come nelle altre nazioni, dell'uso di materiali e di basi concrete nell'insegnamento di molte discipline sia nella scuola primaria che in quella secondaria. Si parla di modelli fissi e mobili, di aiuti audio-visivi, di tecniche le più accurate e varie, al fine di facilitare la comprensione concettuale e l'apprendimento mnemonico da parte degli allievi. E, tanto in Italia che all'estero, si scrivono articoli al riguardo, si pubblicano libri, si tengono congressi, si fa della questione, insomma, serio oggetto di studio.

Ci vogliamo qui occupare di un settore molto ristretto di questo vastissimo campo: le pagine che seguono avrebbero per scopo di mostrare non tanto l'aiuto che può aversi dall'utilizzazione di questo o quel materiale nell'insegnamento della geometria intuitiva, quanto la necessità di un ricorso all'oggetto e all'azione se si vuole che lo studio della geometria nella scuola secondaria inferiore abbia un carattere costruttivo e non descrittivo. E avrebbero anche per scopo di illustrare quale sia – a nostro parere – la funzione e il significato di una base concreta.

Siccome molti risultati sono frutto di esperienze condotte da parecchi anni nella Scuola Media, noi ci permettiamo di spalancare le nostre classi, riferendovi gli errori più comuni e le incomprensioni più frequenti da parte dei nostri piccoli allievi, ci permettiamo di parlarvi dei loro interessi e di questioni didattiche che, talvolta, possono sembrare di poco rilievo.

D'altra parte ci sembra che non sia possibile mettere in luce quelle che noi riteniamo necessità odierne per un primo incontro con la geometria se non si chiarisce il nostro pensiero sia da un punto di vista storico-metodologico che da un punto di vista largamente didattico, cioè vedendo questo corso in rapporto con gli studi che lo comprendono e in particolare con quelli della scuola pre-elementare ed elementare.

Nelle pagine che seguono, perciò, si troveranno un po' frammischiati argomenti teorici e questioni di didattica viva.

Come prima cosa richiameremo la storia del corso di geometria intuitiva, dalla sua data di nascita, il lontano 1881. Questo corso fu introdotto, per iniziativa del Ministro Baccelli, proprio quando l'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie si ispirava alla più rigorosa veduta della critica dei principî, secondo i programmi redatti nel 1867 dal Cremona, dal Betti e dal

(*) In questo articolo la prof.ssa Emma Castelnuovo ha riassunto quanto formò oggetto della sua relazione sull'argomento in occasione del « Primo Convegno di orientamento sulla didattica della matematica » tenuto a Firenze dal 10 al 15 febbraio 1958 per iniziativa del Centro Nazionale didattico per l'istruzione tecnica e professionale.

Brioschi. A quanto mi risulta, l'Italia è stato il primo paese, o certamente uno dei primi, in cui si sentì il bisogno di anteporre un corso di geometria « sperimentale » o « costruttiva » o « intuitiva » (quest'ultima è la denominazione del 1881 ed è l'attuale) al corso di geometria razionale. Questo studio doveva avere il fine di immettere il fanciullo nel mondo geometrico attraverso una serie di osservazioni, di esperienze, di costruzioni suggerite dal mondo reale. Ma, l'influenza delle precedenti disposizioni del Cremona e il « clima » di critica dei principî in cui ci si trovava fece sì che anche il corso di geometria intuitiva seguisse, nella linea, quello di geometria razionale, e, nella sostanza, si differenziasse da questo solo nel senso di sostituire le dimostrazioni logico-deduttive con delle prove sperimentali da effettuarsi col disegno e anche con l'uso di un materiale. Così è arrivato a noi, con nessuna sostanziale modifica, attraverso la Riforma Gentile, il corso del 1881. Il corso era, ed è in generale, a carattere *descrittivo*, non *costruttivo*; è un corso statico: viene premessa un'assiomatica che, pur prendendo ispirazione dall'osservazione e da dati psicologici, è pur sempre astratta perchè non obbliga l'allievo a fare dei tentativi, e gli dà quindi l'impressione di qualcosa di dommatico, di non umano, di troppo perfetto.

E ciò, nonostante la grande influenza esercitata da Federigo Enriques che, sia in scritti di didattica, sia in pagine dedicate alla storia del pensiero scientifico o anche a teorie di geometria superiore, non mancò mai di sottolineare il carattere storicistico, dinamico, a cui ogni insegnamento della matematica doveva ispirarsi. Se le idee puriste volevano immergere il giovane, fin dall'inizio degli studi secondari, in un mondo dove tutto era prestabilito e ben ordinato, « in una teoria – così si esprime Enriques nel 1915 nella prefazione del volume I della *Teoria geometrica delle equazioni* [1] –, che deve apparire in ogni sua parte chiusa e perfetta, che, discendendo dai concetti più generali alle applicazioni particolari, respinga da sè le incerte e mutevoli suggestioni del concreto », « .... oggi – così conclude, sempre in quella prefazione – l'epoca in cui gli uomini di scienza nascondevano le tracce del proprio cammino è ormai sorpassata; la nostra generazione considera giustamente come un dovere di render chiaro in ogni opera scientifica il sistema delle idee costruttive ».

Facendo nostro il pensiero del Maestro, noi sentiamo come dovere, anche nella modesta opera scientifica che è l'insegnamento in una scuola secondaria, di render chiaro ai bimbi fin dal loro incontro con la geometria il sistema delle idee costruttive. In questo modo – pensiamo – essi non verranno respinti dai primi elementi di matematica perchè ogni passo sarà fatto da loro stessi, ogni passo sarà una loro costruzione.

Ma ci sembra che, più che le parole, qualche esempio possa chiarire la diversa impostazione dei due metodi d'insegnamento: il *descrittivo* e il *costruttivo*.

Prendiamo come argomento di studio il seguente: i criteri d'uguaglianza dei triangoli, e fissiamo l'attenzione sul modo con cui si insegna il 3° criterio. Qualunque definizione venga data di triangoli uguali (in generale si dà nel corso inferiore quella secondo cui due triangoli sono uguali se sono sovrapponibili col movimento), è l'insegnante che enuncia i criterî d'uguaglianza; in particolare, per il 3°, dirà: « due triangoli sono uguali se hanno i tre lati corrispondenti uguali ». Alcuni insegnanti, dopo aver disegnato su un foglio di carta due triangoli con i lati rispettivamente uguali, fanno constatare che si può portare

[1] F. Enriques e O. Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol I, ediz. Zanichelli, Bologna.

l'uno a combaciare con l'altro ritagliando le due figure; fanno dunque uso di un materiale.

Altri dànno la dimostrazione che si segue in generale nel corso superiore e che risale a Filone, cioè una dimostrazione logica che dipende dalle proprietà dei triangoli isosceli. Altri ancora si basano sulla costruzione dei triangoli con riga e compasso, data la lunghezza dei tre lati.

I primi due modi, pur facendo, il primo, uso di un materiale, hanno un carattere espositivo, descrittivo. Solamente la terza maniera seguirebbe lo spirito del corso attenendosi al titolo « geometria costruttiva ». Ma – e qui entro nel vivo del problema didattico – vediamo cosa ci dice l'esperienza diretta nei riguardi di questo modo di trattazione. Vi riferisco delle esperienze condotte per molti anni in classi di prima media.

Dite ai bambini di costruire con riga e compasso un triangolo di lati lunghi cm 6, cm 5, cm 4, e suggerite loro di partire successivamente da un lato lungo cm 6 e poi cm 5 e infine cm 4. Essi vi diranno sul principio che i tre triangoli che hanno disegnato sul proprio quaderno non sono uguali perchè sono disposti diversamente; il *postulato del movimento* non è poi tanto evidente! Dopo, disponendo diversamente il quaderno per osservare meglio queste figure, concluderanno che i triangoli aventi i lati rispettivamente uguali sono uguali. Allora, suggerite loro di prendere come lunghezze di lati cm 12, cm 5, cm 4. Tutti si metteranno alla costruzione, ma, dopo essersi accorti che se partono dal lato lungo cm 12 il triangolo « non si chiude », non esiteranno a iniziare la costruzione dal lato di cm 5, fiduciosi che il triangolo « debba » esistere. E, in effetti, sforzeranno in tal modo la costruzione che risulterà disegnato un triangolo, certo non di lati precisamente lunghi come i dati.

Quello che colpisce in questa esperienza didattica è che ai bambini sugli 11 anni non fa nessun effetto che partendo da un lato anzichè da un altro il triangolo si possa costruire, mentre prima non si poteva; cioè essi sono pronti a negare il 3º criterio che avevano scoperto da loro stessi un momento prima.

Gli errori così frequenti sono fonte di apprendimento per noi insegnanti; è questo uno dei vari punti di partenza per l'indagine didattica. Eppure – si dirà – abbiamo seguito lo spirito costruttivo; abbiamo fatto costruire, abbiamo fatto adoperare degli strumenti, eseguire un disegno! Ma, ragioniamo: il disegno non è costruzione nel senso primitivo della parola. Il disegno fissa il pensiero, non fa vedere i vari tentativi; il disegno è lo stadio *finale* della costruzione.

Si capirà meglio quanto voglio esprimere se riferisco su un altro modo di svolgere questo argomento. Si dia ad ogni bimbo un certo numero di strisce di cartone di varia lunghezza con fori agli estremi, in modo che egli abbia la possibilità, utilizzando dei ferma-campioni, di costruire diversi triangoli; e fra queste ci siano anche delle strisce di lunghezza tale che non sia possibile costruire un triangolo. Si dica loro di costruire dei triangoli e di scrivere le loro impressioni. Nei loro componimenti, che molte volte rivelano non solo un ordine mentale, delle facoltà ragionative legate ancora al gesto e alla manipolazione del materiale, ma anche una fantasia e un'apertura mentale e – oserei dire – sono fonte di indagine psicologica per noi insegnanti, leggeremo sempre cose interessantissime. A nessuno sfuggirà il caso in cui il triangolo non si può costruire e a nessuno sfuggirà il caso – chiamiamolo « limite » – in cui la somma di due lati è uguale al terzo, il caso dunque che opera la separazione fra la classe dei triangoli costruibili e quella dei triangoli che non si possono costruire.

E da questi casi d'impossibilità – e solo da questi – nascerà l'idea della costruzione col compasso. Ecco come: cercheranno di « chiudere » il triangolo, faranno perciò ruotare due lati, tenendo fisso il terzo; gli estremi dei lati girevoli descriveranno due cerchi. E questi cerchi si possono anche disegnare su un foglio di carta, fissando un lato con due puntine da disegno e passando la punta di una matita nell'uno e poi nell'altro foro. Siamo dunque arrivati alla costruzione con riga e compasso, ma solo *come risultato di tentativi fatti lavorando con un materiale.*

Ma c'è un'altra scoperta che il bimbo fa subito se il triangolo è realizzato con delle strisce collegate con dei ferma-campioni, o, meglio ancora, con le strisce di un meccano. Egli scopre che, anche esercitando una pressione sui vertici, il triangolo non si muove, non è articolabile. Si potrà allora interessarlo ai più semplici problemi della statica grafica: costruzione di ponti metallici, di piloni, ecc.

L'esperienza ora riferita ci ha mostrato l'insufficienza del disegno nei confronti di una questione molto particolare: il 3º criterio d'uguaglianza dei triangoli. Con gli esempi che seguono vorremmo non solo ribadire l'insufficienza del disegno ma anche far vedere quale uso riteniamo si debba fare del materiale.

Il lavoro di sintesi e di analisi

Vogliamo ora studiare l'atteggiamento sintetico e analitico che ha il bambino di fronte ai primi problemi geometrici. E, perchè il senso dei termini sintesi e analisi sia il più largo e il più comprensivo, diamo a queste parole il significato etimologico: *sintetizzare* significa mettere insieme, costruire, passare dunque dall'elemento al globale; *analizzare* significa invece sciogliere, particolarizzare, passare dunque dal globale all'elemento.

Questa duplice, opposta attività che si richiede alla mente infantile nel primo incontro con la matematica è stata messa in luce in modo sistematico e incoraggiata in maniera precisa per l'insegnamento elementare dai grandi pedagogisti Maria Montessori e Ovide Decroly.

La Montessori ritiene che il materiale didattico debba avere come scopo di far costruire e di ottenere che, attraverso la costruzione, il bambino si renda conto dei vari concetti. Essa crea perciò un materiale didattico assai complesso allo scopo di favorire determinati passaggi ai fini dell'apprendimento concettuale. Per esempio, per quanto riguarda l'acquisizione del concetto di numero, la Montessori dà al bambino delle aste di lunghezza differente, da 10 cm a 1 metro; queste materializzano i primi dieci numeri. Ogni asta è divisa in colori alterni, rosso e blu, di lunghezza costante (10 cm) corrispondente all'asta più piccola. Ogni asta rappresenta quindi un numero; il numero è la misura dell'asta. Si passa dunque dall'elemento al complesso: si costruisce, si fa la sintesi. Manipolando queste aste il bambino constata, per esempio, che $9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = \ldots$, cioè egli *opera* attraverso il senso della vista e del tatto.

Il metodo Montessori è *attivo-sintetico*: dall'elemento al globale.

Nello stesso periodo in cui la Montessori ideava il suo materiale e apriva la strada, in modo sistematico, per una didattica attiva della matematica nella scuola elementare, il belga Decroly tracciava una via che, se per il raggiungimento degli scopi fondamentali – la lotta a oltranza contro il formalismo – aveva delle analogie con il movimento montessoriano, se ne distaccava però notevolmente per gli ideali e i mezzi d'attuazione.

Il Decroly parte dal presupposto che la mente del bambino è attratta non dal dettaglio, dall'elemento, ma dal globale, da una veduta d'insieme; egli offre quindi al bimbo degli spunti, dei dati, suggeriti da fenomeni naturali, in modo che egli sia condotto ad osservare, e, quindi, ad analizzare. Per esempio, si attirerà l'attenzione del fanciullo sulla crescita di una pianta, fenomeno che si metterà in evidenza facendo germogliare dei fagioli nell'acqua. Da questa esperienza si trarrà lo spunto per misurare la crescita della radice, per contare, in gocce, la quantità d'acqua bevuta dalla pianta e che è segnata dall'abbassamento del livello, per fermarsi, insomma, su dei concetti di matematica.

È l'analisi che fa un naturalista che Decroly suggerisce al fanciullo. « Osservare è più che percepire » .... « Osservare significa fare dei confronti, notare delle differenze o delle somiglianze globali o particolari; osservare significa gettare un ponte fra il mondo e il pensiero ». Ecco come lo stesso Decroly precisa il suo pensiero pedagogico insistendo sul passaggio fra il concreto e l'astratto attraverso l'analisi. Dal complesso si passa al semplice; il metodo di Decroly è *attivo-analitico.*

Verso una nuova concezione del materiale

A questi metodi sono state mosse delle critiche, in particolare dallo psicologo ginevrino Jean Piaget. Queste critiche ci porteranno a esprimere dei giudizi e ad affinare le nostre idee sulla funzione del materiale.

Riprendendo nell'uno e nell'altro metodo l'introduzione del concetto di numero, Piaget dice che il numero, sia per la Montessori che per Decroly, sorge dal materiale, è « attaccato » al concreto, e che questi metodi mirano dunque ai fini del passaggio dal concreto all'astratto, a preparare degli esercizi che obblighino a misurare e a contare. I materiali e gli espedienti che si offrono al bambino sono dunque tutti ispirati a quest'idea. Il bimbo è quindi obbligato a seguire certi passaggi che gli vengono suggeriti, se non dal maestro, dal materiale stesso con cui lavora.

Questa pedagogia non è dunque libera. È appunto la libertà nella costruzione matematica che vuol raggiungere la pedagogia di Jean Piaget.

Il Piaget ritiene che la presa di possesso del quantitativo non si ottenga facendo misurare o contare il qualitativo ma avvenga solo quando il bimbo si sia liberato dalla configurazione fisica: il materiale, insomma, dovrebbe servire solo a fissare delle relazioni, delle corrispondenze.

Una delle tante esperienze suggerite dal Piaget (1) per la costruzione del concetto di numero può servire ad illustrare le sue idee. Mostrate al bambino – dice Piaget – un gruppo di 6 gettoni azzurri, tutti allineati, e, mettendogli a disposizione dei gettoni rossi, ditegli di disporne tanti quanti sono gli azzurri. Già un bambino sui 4 anni e mezzo-5 metterà un gettone rosso sotto ogni azzurro; noi avremo allora l'impressione che il bimbo, padrone della corrrispondenza biunivoca, abbia chiaro il concetto di numero almeno allo stadio di manipolazione operatoria. Ma se voi distanziate un po' una delle serie di gettoni, insistendo però sul fatto che non si toglie nulla, il bimbo vi dirà che ora i gettoni rossi non sono più tanti come gli azzurri; si trattava, evidentemente, di una sola forma percettiva: quando non c'è più corrispondenza visiva, non vi è più per

(1) Vedi, ad esempio, il volumetto: Piaget, Boscher, Chatelet, *Avviamento al calcolo*, Ediz. « La Nuova Italia », Firenze, 1957.

il bambino equivalenza. In questa esperienza, come in tutte quelle suggerite da Piaget, il materiale gioca solo nel senso di condurre ad afferrare delle corrispondenze, delle equivalenze, delle trasformazioni, delle operazioni insomma.

C'è ancora un'altra critica che vogliamo muovere a entrambi i metodi; una critica che tiene forse al fatto che i loro ideatori non erano dei matematici ma dei naturalisti.

Si tratta di questo: nel metodo Decroly l'esperienza viene fatta su fenomeni naturali, la crescita di una pianta, per esempio. Dunque, le variazioni avvengono con continuità; ma si tratta di funzioni continue limitate dato che, essendo un fenomeno naturale, c'è sempre un inizio e una fine, una nascita e una morte.

Nel metodo Montessori invece l'esperienza matematica non si esercita su fenomeni che variano con continuità, ma si procede a sbalzi; siccome però si lavora su un materiale artificiale, si può estrapolare, cioè si può a un certo punto distaccarsi dal materiale idealizzandolo; così, per esempio, lavorando con le aste rosse e blu, si può pensare di aggiungere sempre un'asta in più e arrivare così all'infinito.

In questo senso il metodo Montessori è più matematico di quello Decroly: qui c'è la continuità ma la funzione è limitata, in Montessori invece si può arrivare all'infinito ma si procede a sbalzi, manca la continuità.

Da quanto abbiamo detto mi sembra che si possa concludere che in entrambi i metodi manca un « qualche cosa » per poterli considerare come metodi che possano essere proseguiti con l'intento di immettere in pieno l'allievo nel mondo matematico. *E mi sembra che si sia condotti a concludere che il materiale deve essere artificiale e variabile con continuità se vogliamo che esso conduca sia a un lavoro di sintesi sia a una coscienza analitica atta a indagare e a scoprire.*

Qualche esperienza didattica potrà chiarire meglio il nostro pensiero.

I esperienza.

Voglio solo accennare a tutto un gruppo di problemi che sorgono, quasi da sè, dando in mano a un bambino 4 strisce di cartone collegabili agli estremi con dei ferma-campioni (costruzione analoga a quella di cui abbiamo parlato per i triangoli), o, meglio ancora, 4 strisce di un meccano. Se le 4 strisce sono uguali, il bimbo costruirà il quadrato, ma immediatamente si accorgerà che la figura che ha in mano è articolabile, e questo fatto gli sembrerà estremamente suggestivo: il quadrato si può muovere, si può trasformare in un rombo. Nascono allora una quantità di problemi che non potrebbero nascere dal confronto di due figure disegnate. Si osserverà che, nella trasformazione, alcuni elementi variano ed altri non variano. Gli elementi invarianti, quali ad esempio la posizione reciproca delle diagonali e la somma degli angoli, condurranno a caratterizzare più o meno strettamente questa famiglia di quadrilateri; gli elementi variabili invece, quali l'altezza e quindi l'area, e la somma delle lunghezze delle diagonali, apriranno l'intelligenza a nuove ricerche.

Fermiamoci su quest'ultimo argomento: la somma delle lunghezze delle diagonali. I bambini vi diranno che, nella trasformazione da quadrato a rombo, una diagonale si accorcia e una si allunga, e che – tutti sono pronti a giurare su questo punto – « quello che perde una delle diagonali lo guadagna l'altra »; è dunque costante la loro somma. Senza esprimere dei giudizi sulla loro asserzione, inclinate sempre più un lato sull'altro, fino a tendere al caso limite:

allora, una delle diagonali tende a zero e l'altra tende al doppio del lato del quadrato. C'è sempre più d'uno che afferra la questione: nel caso del quadrato ogni diagonale è maggiore di un lato, cioè la loro somma è maggiore del doppio di un lato; qui, nel caso limite, la somma delle diagonali uguaglia il doppio di un lato. Dunque la somma delle diagonali varia – così concludono – e raggiunge un massimo. Il concetto di funzione, sia pure in una forma primitiva, comincia a farsi strada nella mente del bambino; a farsi strada faticosamente perchè la natura umana vorrebbe che tutto si mantenesse costante e che quello che si perde da una parte si guadagnasse dall'altra.

Fin da questo incontro col materiale, è bene rilevare come ad afferrare la verità si arrivi considerando i casi limiti, cioè proprio nell'attimo in cui il materiale si « smaterializza ».

II esperienza.

Un teorema fondamentale di geometria piana alla cui intuizione si può arrivare seguendo l'indagine analitica di Decroly è quello della *costanza della somma degli angoli di un triangolo.*

La dimostrazione che se ne dà in generale, pur facendosi qualche volta uso di un materiale (un triangolo in cartone), è piatta perchè il metodo da seguire è tutto indicato, e, come prima cosa, l'insegnante dà l'enunciato del Teorema. Mi è sembrato che, volendo attirare l'attenzione degli allievi sugli angoli di un triangolo, non ci si possa limitare a presentare uno o più triangoli al bambino, ma sia opportuno far variare gli angoli con continuità. Ho realizzato la cosa in maniera estremamente semplice: ho presentato loro una tavoletta rettangolare con due chiodi piantati a una certa distanza uno dall'altro, in modo che la loro congiungente sia parallela alla dimensione minore della tavoletta e che i chiodi siano vicini a questo lato. Attorno ai chiodi passa un elastichino, di cui un ramo viene tirato, da uno spago legato nel punto di mezzo, in direzione perpendicolare alla congiungente i chiodi in modo da formare tanti triangoli isosceli (ritengo opportuno fissare l'attenzione su dei triangoli isosceli anzichè generici affinchè, sul principio, l'attenzione non venga dispersa). Ho detto agli allievi di osservare questi triangoli e di scrivere le loro impressioni. Mi sia permesso di trascrivere qualche frase dei loro componimenti, perchè qualunque mia relazione sarebbe fredda rispetto alle loro parole. Dopo avere osservato tutti che solo la base resta sempre la stessa, ma che il perimetro varia, l'area varia, noteranno che l'ampiezza degli angoli cambia e che « se si immagina di partire dal triangolo più grande che si può realizzare sulla tavoletta e di allentare a poco a poco lo spago, l'angolo al vertice diventa sempre più grande e gli angoli alla base sempre più piccoli. A un dato istante si ha un triangolo equilatero, e, dopo, l'angolo al vertice diventa retto: per questo triangolo vale il Teorema di Pitagora, per gli altri no ».

Io non credo che, scrivendo questa frase, come un'osservazione del tutto naturale, quel bambino abbia realizzato il valore della sua scoperta; sta a noi di far fissare l'attenzione su questa proprietà che occupa così il suo vero posto e che viene ad essere legata all'altro « fuoco » della geometria piana, il Teorema di Pitagora.

« Alla fine – continuano così quasi tutte le relazioni – gli angoli alla base diventano piccolissimi mentre quello al vertice sempre più ottuso, e poi.... il triangolo sparisce, diventa un segmento, la base. Allora gli angoli alla base non esistono più, ma quello al vertice è diventato piatto ». Questo caso limite non

sfugge a nessuno; vi è qualcuno, poi, che pensa di tirare sempre più l'elastichino, pensa a una tavoletta molto più grande, tanto grande che non si può nemmeno realizzare, e scrive: « gli angoli alla base diventeranno sempre più grandi, quasi retti, e quello al vertice sempre più piccolo ». Tutti noteranno che quando l'angolo al vertice diminuisce gli altri aumentano e che ci deve essere una relazione fra gli angoli di un triangolo, e tutti, « leggendo » il risultato sui casi limiti, diranno che la somma deve essere sempre di un angolo piatto.

Nel riferirvi tutto ciò, vogliamo insistere sul fatto che non intendiamo aver suggerito in tal modo una dimostrazione del Teorema sulla somma degli angoli di un triangolo, e che il lasciarsi condurre ad esprimere una legge confrontando qualche caso particolare con i casi limiti può – come ben sappiamo – portare ad errore. Ma è proprio così, attraverso ad esempi che conducono ad errori, che l'allievo sentirà il bisogno di una dimostrazione logica.

Conclusione

Vorremmo ora cercare di riassumere idee espresse e osservazioni fatte nei riguardi delle poche esperienze didattiche che abbiamo riferito. E ci sembra che, a sostegno e ad incoraggiamento del nostro modo di vedere, valgano queste righe scritte da Maurice Fréchet in un libro uscito recentemente [1], righe che sottolineano le successive fasi del pensiero matematico, riferendosi in particolare alla geometria e alla meccanica: « La teoria deduttiva – dice Fréchet – è preceduta da una *sintesi induttiva*, e poi da uno stadio assiomatico in cui, dai risultati di questa sintesi induttiva, viene sviluppato l'insieme delle definizioni e degli assiomi che serviranno da punto di partenza alla teoria deduttiva ».

Questa « sintesi induttiva », ci sembra che, portata sul piano didattico, rispecchi esattamente il metodo che seguiamo. Risalendo al significato etimologico dei termini, « sintetizzare induttivamente » vuol dire *mettere insieme* (un certo numero di osservazioni, di esperienze) per *cogliere* una o alcune proprietà comuni. Ma occorre precisare che cosa significa mettere insieme delle osservazioni o delle esperienze nel campo della geometria per poi cogliere delle proprietà. Bisognerà, perchè la matematica non si riduca a una scienza sperimentale, che le esperienze siano infinite; e questo si ottiene o con l'osservazione di un materiale mobile con continuità o avendo la possibilità, a partire da una sola esperienza, di immaginarne infinite altre non uguali ma dello stesso tipo. Saremo poi condotti a indurre, cioè a cogliere delle proprietà generali, considerando qualche caso particolare e i casi limiti, cioè esaminando non il materiale, ma *la trasformazione del materiale*: è l'attimo in cui il materiale si « smaterializza » che potrà condurre alla verità, l'attimo dunque in cui si passa dal concreto all'astratto.

Emma Castelnuovo.

---

(1) M. Fréchet, *Les mathématiques et le concret*, Presses Universitaires de France, Paris, 1955.