

J. PIAGET, E. W. BETH, J. DIEUDONNÉ, A. LICHTNEROWICZ, G. CHOQUET, C. GATTEGNO, *L'enseignement des mathématiques*. - Editions Delachaux et Niestlé, Neuchâtel (Svizzera). 1955

Il libro che presentiamo ai colleghi è la prima pubblicazione collettiva della « Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques ». La Commissione è formata di persone che in campi diversi, psicologico, metodologico, pratico, cercano di dare un contributo al miglioramento della didattica matematica; essa si compone, perciò, sia di noti matematici, logici, psicologici e pedagogisti che di modesti insegnanti i quali con attente e pazienti esperienze studiano la questione da un punto di vista pratico. I membri della Commissione si riuniscono periodicamente al fine di coordinare esperienze, studi, relazioni; dal 1950 sono stati tenuti ben nove incontri internazionali: in Inghilterra, Belgio, Svizzera, Francia, Lussemburgo, Germania, Olanda, Italia e Austria.

Fino ad ora la Commissione non aveva ritenuto opportuno di pubblicare dei rapporti e solo le relazioni orali riportate dai vari membri nei rispettivi Paesi davano un'idea del movimento così attivo e moderno che informava lo spirito degli organizzatori. Oggi, con questo libro che raccoglie vari articoli, essa si presenta in forma ufficiale; gli autori sono sei dei suoi membri fondatori: uno psicologo, Jean Piaget, professore alle Università di Ginevra e Parigi, un logico matematico, Ewart W. Beth, professore all'Università di Amsterdam, tre matematici, Jean Dieudonné, professore alla Northwestern University Evanston (Stati Uniti), André Lichtnerowicz, professore al Collège de France e Gustave Choquet, professore all'Università di Parigi, e infine il pedagogista Caleb Gattegno, professore all'Institut of Education dell'Università di Londra, il quale come segretario generale della Commissione organizza i vari congressi ed è veramente l'anima di questo movimento.

I sei articoli non sono stati coordinati fra loro, ma, pur essendo differenti le vedute e gli intendimenti di ciascuno, essi presentano una così spinta continuità che il

passaggio da un lavoro all'altro non costituisce per il lettore un brusco cambiamento di idee. Essi infatti, attraverso analisi psicologiche, studi logici, considerazioni storiche e prettamente matematiche, hanno per mira un solo fine: l'insegnamento della matematica alla luce delle moderne vedute scientifiche.

Il libro si apre con un raffronto di JEAN PIAGET fra *Le strutture matematiche e le strutture operatorie dell'intelligenza*. L'autore, dopo aver sottolineato che la differenza fra la matematica classica e quella moderna sta nel fatto che la prima pone a base della costruzione matematica gli elementi semplici (quali i numeri interi, il punto, la retta, ecc.) e la seconda un sistema operatorio, cioè una serie di strutture, riferisce le idee principali della Scuola di Bourbaki secondo cui le tre strutture fondamentali su cui riposa l'edificio matematico sono: le strutture algebriche (di cui il prototipo è il gruppo), le strutture d'ordine (di cui una varietà è il reticolato) e le strutture topologiche. Ora, Jean Piaget, attraverso una serie di attente e raffinate esperienze sulla nascita e sullo sviluppo delle operazioni aritmetiche e geometriche nella mente del fanciullo, è riuscito a dimostrare che le tappe fondamentali nell'apprendimento dei concetti matematici corrispondono proprio ai tre tipi di strutture matematiche. Si verifica che nel bambino nascono più o meno nello stesso periodo le strutture di tipo algebrico (per esempio la comprensione della reversibilità delle azioni, dell'inclusione di una classe parziale A in una totale B), le strutture d'ordine (la seriazione: sono ormai classiche le esperienze di Piaget sulla più o meno grande difficoltà che ha il bambino fino ai 6-7 anni di disporre in ordine d'altezza vari regoli), e le strutture topologiche (l'ordine di costruzione delle nozioni geometriche nello sviluppo spontaneo del fanciullo non è affatto conforme all'ordine storico delle tappe della geometria: le questioni topologiche vengono afferrate dal bimbo molto prima delle questioni euclidee).

Non c'è bisogno di commentare uno studio di questo genere: è chiaro quali enormi conseguenze possano avere tali problemi in un primo insegnamento della matematica.

È questo l'unico articolo che riguarda l'in-

segnamento elementare; i capitoli successivi si riferiscono all'insegnamento secondario.

Segue allo studio del Piaget l'articolo di EWART W. BETH, *Riflessioni sull'organizzazione e sul metodo dell'insegnamento matematico*. L'autore osserva che il distacco fra l'insegnamento della matematica nella Scuola secondaria e nell'Università si va facendo sempre più sensibile: nella prima la matematica elementare non arriva a suscitare un interesse scientifico, nella seconda le teorie sempre più complesse cui è arrivata la ricerca moderna si rivelano difficilmente incorporabili nell'insegnamento secondario. Felix Klein aveva cercato di gettare un ponte fra matematica elementare e matematica superiore ma si trattava più di un rinnovamento di metodi che di un cambiamento di programmi. Oggi — afferma Beth — le ricerche moderne sui fondamenti della matematica ci fanno comprendere come alcune volte (per esempio per chiarire la differenza fra la struttura dei numeri razionali e quella dei reali) sia impossibile arrivare ad una spiegazione esauriente e criticamente perfetta se si vuole rimanere nel dominio della logica elementare ed evitare ogni riferimento a delle nozioni che sono di competenza della teoria degli insiemi. È per questo che l'autore sarebbe favorevole ad adottare nell'insegnamento secondario il metodo assiomatico abbandonando quello genetico.

Termina l'articolo un'approfondita analisi sui rapporti fra logica e psicologia ai fini dell'insegnamento; Beth si dichiara nettamente contrario alla tendenza di esagerare l'importanza della psicologia nei problemi di didattica matematica e sottolinea il valore e la portata di un insegnamento rigidamente logico.

I tre articoli che seguono, quelli di Dieudonné, Lichnerowicz e Choquet, vertono su questioni riguardanti strettamente la matematica e il programma e i metodi d'insegnamento di questa disciplina nelle Scuole secondarie.

JEAN DIEUDONNÉ nel suo lavoro *L'astrazione in matematica e l'evoluzione dell'algebra* comincia col rispondere alla domanda classica « quale è lo scopo dell'insegnamento della matematica? ». Non sono — egli dice — le singole questioni, troppo spesso particolarizzate e pedantizzate, che devono formare l'oggetto del nostro insegnamento, ma il metodo matematico, l'essenza della matematica stessa, deve influenzare l'intelligenza del ragazzo portandolo a ragionare sempre di più su delle nozioni astratte. A sostegno di questa tesi egli traccia in poche pagine una storia dei concetti fondamentali dell'algebra facendo vedere come tutto lo sviluppo di questa disciplina rappresenti una

continua ascesa verso l'astrazione, ascesa di cui l'introduzione dei numeri immaginari costituì una tappa decisiva. Fu allora che il matematico prese coscienza del suo potere creatore di calcolare su nuovi oggetti — che non sono numeri — invece di accettare passivamente di limitarsi a quelli che gli venivano imposti dalle origini concrete della matematica. Un secondo atto di liberazione è rappresentato dal calcolo degli operatori: furono modificate così anche le regole di calcolo algebrico fino allora ritenute intangibili e ci si rese conto sempre di più che dei due costituenti fondamentali di ogni « calcolo », gli oggetti su cui si opera e le regole operatorie, solo queste sono veramente essenziali. Secondo tale concezione lo studio di un calcolo, o — come si dice — di una struttura algebrica, prende come dati di base un insieme di oggetti e un certo numero di operazioni. Dieudonné conclude il suo esposto, mirabile per chiarezza e vigore, dichiarando che il metodo assiomatico solo, estrema tappa verso l'astrazione, permette di canalizzare le nuove scoperte matematiche, di classificarle e collegarle ai risultati precedenti, di semplificare l'esposizione delle varie teorie, aumentandone qualche volta la portata con un'analisi più approfondita.

L'articolo di ANDRÉ LICHTNEROWICZ, *L'introduzione dello spirito dell'algebra moderna nell'algebra e nella geometria elementare*, viene a completare quello del Dieudonné, dando idee e suggerimenti per un effettivo insegnamento secondario come iniziazione allo spirito della scienza contemporanea. Egli sottolinea il fatto che se solo una piccolissima percentuale di allievi si dedicherà poi alla scienza pura, anche coloro che saranno portati alle applicazioni tecniche si troveranno davanti una matematica che oggi non è meno astratta a dei conformisti di quanto non sia la matematica detta pura. Non si tratta — dice l'autore — di distribuire dommaticamente delle teorie astratte dell'algebra moderna ma bisognerebbe cercare fin dall'inizio di familiarizzare l'allievo con le principali strutture algebriche, portandolo a riconoscere proprietà comuni in enti diversi (per esempio le proprietà comuni fra i numeri interi e i polinomi, le leggi di composizione di certi insiemi di numeri), questioni che si possono trattare anche nei primi anni di una Scuola secondaria. Nell'ultima classe del liceo, poi, bisognerebbe confrontare le varie teorie aritmetiche, geometriche, ecc., sempre dal punto di vista strutturale, mettendo a raffronto proprietà uguali e proprietà distinte di enti completamente diversi (per esempio gli assiomi dei gruppi e le proprietà comuni degli spostamenti e delle similitudini nello spazio). Lichnerowicz insiste sul fatto che facendo fermare l'attenzione

dell'allievo su qualche caso elementare di isomorfismo si potrà da una parte mettere in evidenza come la « natura » matematica sia qualche cosa che non ha un senso preciso e d'altra parte cercare di distruggere i compartimenti-stagno fra i diversi rami della matematica elementare.

Di carattere più particolare è l'articolo di GUSTAVE CHOQUET, *L'insegnamento della geometria elementare*. Egli dichiara esplicitamente che intende scrivere queste pagine per il professore, non per l'allievo, ma pensa che possano essere materia di riflessione da parte degli insegnanti per un eventuale adattamento all'età del ragazzo. « La geometria elementare — dice l'autore — è un bel viaggio, ma il suo punto di partenza ha spesso luogo in un'ombra piena di dubbi e il cammino seguito traversa dei profondi pantani, come quello degli spostamenti e quello dell'orientazione, da cui non si esce se non sottoponendosi al supplizio cinese del palo ». Dopo aver fatto una critica minuziosa e brillante degli usuali libri di testo, G. Choquet pone le basi di uno svolgimento del corso di geometria elementare a partire dalla geometria della retta, passando poi a quella del piano e allo studio delle isometrie e dell'orientazione, e dà con questo lavoro un contributo nuovo e originale allo studio dei fondamenti della geometria. Non è possibile riassumere brevemente l'articolo e rimandiamo i colleghi alla lettura diretta, sicuri che essi troveranno nella efficace esposizione materia di godimento intellettuale.

Da tutti questi articoli, densi di idee e di suggerimenti, ma che, pur tenendo in considerazione l'allievo, studiano la questione della didattica matematica da un punto di vista teorico, si arriva all'ultimo capitolo *La pedagogia della matematica*, dove l'autore CALEB GATTEGNO ci conduce fra la scolarisca; questo capitolo interessa quindi particolarmente l'insegnante di Scuola secondaria. Gli intendimenti del Gattegno vengono così riassunti nelle sue parole: « Il lettore avrà già trovato nei capitoli precedenti dei dati relativi ai fattori psicologici e matematici. Qui tratteremo dell'insegnamento propriamente detto e faremo vedere come il programma può essere reso funzionale, cioè può essere inteso come una sintesi dei diversi fattori ». Egli vuole valersi appunto delle strutture mentali già esistenti nella mente del bambino e concepire un programma che, basandosi su queste, tenga particolarmente conto delle difficoltà che incontra l'allievo nel passaggio da una struttura mentale all'altra. Secondo Gattegno non è il particolare ma il generale che interessa il bambino; è l'azione del programma e quella del maestro che costringe la sua intelligenza entro certi limiti ed è per questa ragione

che spesso l'insegnamento della matematica riesce difficile e poco attraente. Nell'insegnamento dell'aritmetica, per esempio, si può ottenere in breve tempo che i ragazzi si liberino dal numerico per prendere coscienza, sia pure in modo intuitivo e quasi per gioco, di proprietà generali delle varie operazioni e passare quindi al campo dell'algebra. Dove, sempre per tenersi a concezioni generali, s'insisterà molto di più sulla reversibilità delle operazioni e sul dinamismo delle formole (cioè sui vari aspetti sotto cui una stessa formola può presentarsi) che sul risultato. Si rifletta inoltre che il concetto di funzione che ha il ragazzo è molto più largo e più generale di quello che noi vogliamo imporgli quando gli offriamo degli esempi semplici e costruiti appositamente. Sulla base di queste idee Gattegno schematizza un programma di algebra per i ragazzi dagli 11 ai 16 anni, programma che ai nostri occhi può apparire eccessivamente astratto ma che è fuori dubbio interessante.

Per l'insegnamento della geometria non viene proposto un programma come per l'algebra, ma gli esempi e i suggerimenti che si danno, veramente degni di essere presi in considerazione, dettano essi stessi un programma. Gattegno si dichiara assolutamente contrario a un insegnamento deduttivo che partendo da certe premesse obbliga ad arrivare a certe ben determinate conseguenze, facendo percorrere al ragazzo una via che è già segnata. Egli propone quindi uno studio che non imponga una « camicia di forza » all'allievo, uno studio basato su prese di coscienza di determinate « situazioni ». Ad esempio — dice Gattegno — nelle prime lezioni di geometria (età 11 anni) si darà al ragazzo un compasso e lo si lascerà libero di disegnare quello che vuole utilizzando questo strumento. Da una serie di disegni ordinati e disordinati, indice essi stessi di interessi estetici e di momenti psicologici, l'allievo sarà condotto in un secondo tempo all'osservazione di due famiglie di cerchi concentrici e potrà, aiutato da rari interventi del maestro, arrivare a una presa di coscienza matematica: la semplice osservazione e percezione lo conduce dunque a poco a poco a organizzare il suo pensiero e da quelle premesse strumentali egli potrà far scaturire delle relazioni e delle conseguenze anche inaspettate. Proprietà e questioni che siamo abituati a trattare in un certo ordine e che sono spesso « atomizzate » si fonderanno in un tutto unico. E, a poco a poco, la struttura di ogni singola situazione porterà a concepire il metodo assiomatico; ma è un metodo assiomatico riguardante quella determinata situazione perchè — dice giustamente l'autore — « domandarsi quello che

basterebbe postulare per ottenere tutto per via deduttiva è un lusso che la scienza si permette solo quando ha accumulato un certo numero di fatti». Egli ritiene pertanto che una revisione del programma dal un punto di vista deduttivo possa farsi solo alla fine della carriera scolastica. Come si vede si tratta di un insegnamento della geometria in cui manca una linea continua nel senso che siamo abituati a concepire; è una serie di argomenti organizzati sul piano delle strutture, ma liberi; è un insegnamento a centri d'interesse, dove ogni centro viene suscitato da un particolare impulso.

Benchè ci sia senza dubbio un parallelismo fra l'insegnamento dell'algebra e quello della geometria suggeriti dall'autore, parallelismo dovuto al senso di larghezza e di liberazione che si vuole sia alla base dei due, si nota una notevole differenza fra le due didattiche, quella geometrica essendo molto più percettiva e quindi visibile e cioè meno astratta di quella algebrica attuata alla stessa età.

Ognuno di noi è portato dalla lettura di questo articolo, che dapprima può sembrare eccessivamente originale e troppo lon-

tano dalle nostre idee in genere più moderate, a un ripensamento del programma e del proprio modo d'insegnare; anche per questa ragione il lavoro di Gattegno, offrendo continui spunti di revisioni, di critica, di discussione, porta un contributo notevole al problema in questione.

* * *

Dopo aver riferito su ogni capitolo di questo libro, veramente originale e affascinante, poco rimane da concludere, perchè il libro non vuole concludere, vuole lasciare aperto il problema. Un problema discusso da matematici di professione e da pedagogisti, da logici e da psicologi; ognuno di loro ha esposto in modo magistrale le sue idee sul medesimo argomento «l'insegnamento della matematica». Tocca adesso a ciascuno di noi di trovare in queste pagine materia di riflessione e di lavoro e di dare un contributo al movimento che si sta diffondendo in tutto il mondo per ispirare la didattica matematica a criteri più moderni.

EMMA CASTELNUOVO.

LE TEORIE FISICHE E I FATTI.

« La fisica non progredisce come la geometria, che aggiunge sempre nuove proposizioni definitive e indiscutibili alle proposizioni definitive e indiscutibili che possedeva già; essa progredisce perchè, di continuo, l'esperienza fa scoppiare nuovi disaccordi fra le teorie e i fatti e perchè, di continuo, i fisici ritoccano e modificano le teorie affinché rappresentino più efficacemente i fatti ».

PIERRE DUHEM