

UN METODO ATTIVO NELL'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA INTUITIVA (1)

In un nuovo ordinamento delle scuole secondarie sarà opportuno riesaminare, oltre alla scelta delle materie nei vari anni, anche i metodi d'insegnamento delle singole discipline, allo scopo di suscitare veramente l'interesse per lo studio e di adeguare la didattica a quella che sarà la nuova scolaresca. Una revisione di metodi si presenta particolarmente necessaria — mi sembra — per i primi anni della scuola media, per quel triennio successivo alle scuole elementari, che molti si augurano unico e obbligatorio per tutti. Bisogna per questo triennio tener conto di vari fattori: allievi di diverse classi sociali, scuole di città e scuole di campagna, esigenze di coloro che proseguono negli studi e di coloro che terminano.

Una delle materie che occupa nella scuola di oggi e che occuperà certamente nella scuola di domani un posto preponderante dal punto di vista formativo è la matematica. Tutti sono d'accordo su questo, ma molti, moltissimi si lamentano giustamente del metodo d'insegnamento di questa materia nelle nostre scuole. Nel primo triennio medio s'insegna l'aritmetica, oggi anche qualche elemento di algebra, e la geometria intuitiva; e, mentre dell'aritmetica e dell'algebra, anche se male insegnate, rimane sempre qualche cosa, per lo meno il ricordo di averle studiate, nulla rimane in generale del corso di geometria intuitiva. Questa materia è purtroppo ritenuta da molti insegnanti di minima importanza rispetto alle altre, e viene spesso lasciata in seconda linea, anche in considerazione del successivo corso di geometria razionale: altri invece si sforzano d'insegnarla come una geometria razionale, resa semplice.

Ora, tutti i vari stadi dei corsi ciclici hanno importanza purchè si dia loro un ben preciso significato e purchè si adeguino allo stato psicologico che il ragazzo attraversa in quel momento. A mio parere è fattore fondamentale per lo sviluppo della mente e della personalità di allievi dai 10 ai 14 anni un insegnamento delle proprietà geometriche delle figure condotto in modo da saper suscitare l'entusiasmo del ragazzo, un insegnamento che — secondo le parole di Enriques (1) — si proponga di « svegliare l'intelligenza dell'allievo, facendolo partecipare al lavoro creativo per cui le regole e i concetti hanno una loro ragion d'essere, e si scoprono, quasi naturalmente, al pensiero di coloro che vi riflettono ».

Desidero pertanto esporre qui in breve un metodo d'insegnamento della geometria intuitiva, che si distacca notevolmente da quello tradizionale e che ritengo potrebbe essere indotto con giovamento nella scuola media per tutti.

Oggi l'insegnamento della geometria intuitiva è organizzato così: un corso di tre anni sugli argomenti fondamentali della geometria piana e solida,

(1) Questo articolo riproduce una conferenza tenuta dall' A. il 30 marzo '46 presso l'Istituto Romano di Cultura Matematica. Già pubblicato nel *Periodico di Matematiche*, Zanichelli, Bologna, 1946, n. 3.

(2) F. ENRIQUES: *Sull' insegnamento dell' aritmetica*, in "Scuola e cultura", "Annali dell'istruzione media", 1933.

argomenti che verranno poi ripresi da un punto di vista razionale con lo stesso ordine negli anni successivi. Apre il corso un capitolo sull'idea di retta, definizione di segmento e di angolo, operazione sui segmenti e sugli angoli, e uso della riga, del compasso e del rapportatore. Si passa poi alla definizione di triangolo e di poligono, criteri d'uguaglianza dei triangoli, somma degli angoli di un triangolo; studio di poligoni particolari e del cerchio; chiude il corso di geometria piana, che si svolge nei primi due anni, un capitolo sulle aree. Il terzo anno è poi dedicato allo studio della geometria solida.

Qui intendo riferirmi solo alla geometria piana.

Quello che meno mi persuade in questo programma e che mi ha condotto a pensare e ad attuare (1) un indirizzo diverso, è che in esso si trascura:

1) quanto i ragazzi hanno fatto bene o male alle scuole elementari;

2) il punto di vista psicologico del ragazzo sia nel metodo che si segue, sia nel programma che si svolge.

Il primo punto si chiarisce con poche parole: i ragazzi che vengono dalle elementari hanno risolto negli ultimi due anni una quantità di problemi sulle aree e sui volumi, applicando ad essi tutti i calcoli sulle unità di misura; sanno cosa è un quadrato, un rettangolo, un triangolo, ecc., e conoscono anche le regole di misura di queste superficie, regole che sono state loro giustificate alla stessa maniera con cui noi le giustifichiamo nel ginnasio inferiore.

Ricominciando da capo, noi diamo loro la sensazione che tutto ciò che hanno studiato nel corso primario sia inutile e non diamo nemmeno al corso l'impronta di secondo stadio di corso ciclico perchè usiamo un metodo non molto diverso da quello seguito alle elementari.

In breve: *il corso tradizionale di geometria intuitiva non è la continuazione del corso di geometria delle scuole elementari, e manca d'altra parte di un carattere proprio e quindi di un fine ben preciso.*

Lasciamo adesso il primo punto per venire al secondo: questo, come dicevo, riguarda il lato psicologico del ragazzo; esso porta a un problema profondo ed esteso nello stesso tempo.

La geometria è nata come scienza sperimentale, da un punto di vista pratico: dalla misura dei terreni; noi lo sappiamo, lo diciamo anche ai ragazzi al principio del corso, ma poi presentiamo la materia alla rovescia, relegando l'argomento dell'equivalenza, che è il primo capitolo, come ultimo capitolo dell'ultimo anno di geometria piana. Dedichiamo invece il primo capitolo, quale introduzione del corso, allo studio dei segmenti e degli angoli, dandone subito la definizione; nei migliori testi di geometria intuitiva non manca una bella raccolta di esercizi anche su queste prime nozioni; ma, se questi esercizi servono a mostrare l'utilità pratica dei concetti che abbiamo definito, essi non valgono d'altro lato a facilitare l'apprendimento di queste nozioni. Insomma, dato che le definizioni precedono la pratica il ragazzo deve prima fare lo sforzo di concepire le idee astratte, e, dopo che non le ha capite, farne le applicazioni.

Si può portare come tipico esempio di errore didattico la definizione di angolo, che viene data all'inizio del corso. Comunque si presenti il concetto di angolo (ad es. come «parte di piano compresa fra due semirette che hanno l'origine comune», attenendosi alla definizione che compare per la prima volta verso il 1660-70 nei trattati di *Arnaud* e di *Bertrand*, ovvero assumendo la definizione euclidea, come «inclinazione di una retta sull'altra»), esso non viene compreso dalla grandissima maggioranza della scolaresca, o per la difficoltà del concetto di area infinita che entra nella prima definizione, o per l'uso di una parola un po' troppo vaga per un ragazzo come è quella di inclinazione. Il ragazzo tipo si limita a imparare la definizione a memoria, non so con quale vantaggio.

(1) Sto seguendo il metodo di cui tratto nella scuola media del Liceo Tasso in Roma.

Si dice: ma sono concetti semplici quelli che noi mettiamo all'inizio, il concetto di angolo, per esempio. Proprio perchè sono concetti semplici, idee astratte, essi riescono particolarmente difficili. «Al maestro — dice *Tolstoi* nella sua Cronaca della Scuola di Isnaja Poliana — sembra facile soltanto ciò che è complesso e vivo. Tutti i testi di scienze naturali cominciano dalle leggi generali, di lingua dalle definizioni, quelli di storia dalla divisione di periodi e persino quelli di geometria dal concetto di spazio e dal punto matematico».

Fatta la critica del metodo tradizionale d'insegnamento, per vedere come potrebbe svolgersi il corso con più profitto, fissiamo gli scopi che si vogliono ottenere dal corso stesso. Oltre a ricordarsi con lo studio elementare, io penso che scopo essenziale del corso di geometria intuitiva sia quello di richiamare l'interesse e l'attenzione dei ragazzi su fatti che poi costituiranno, per chi prosegue, il materiale del corso sistematico. Ma l'interesse per una disciplina qualunque nasce solo se si ha la sensazione di potere con la propria capacità e con la propria osservazione portare un contributo anche minimo a questa disciplina. Ora, se una materia mi viene somministrata dal generale al particolare, a partire da leggi evidenti, da definizioni e da concetti semplici, non ho la sensazione di poter dare io un contributo a questo studio. Il mio maestro potrà suggerirmi problemi e applicazioni di quanto ha spiegato, e io potrò con entusiasmo cercare di risolverli, ma, badiamo bene, è un ardore che finisce subito dopo risolto quel problema e rimane legato a quel determinato capitolo; non ho l'impressione di essere io a creare tutta la geometria e il susseguirsi dei problemi e dei capitoli. E', diciamo così, un metodo attivo a isole, le isole essendo i vari capitoli.

E' possibile, si domanda, creare per la geometria intuitiva un metodo attivo continuo? La risposta si dà subito: lo sviluppo storico è, evidentemente, un lavoro attivo di secoli. Sorge quindi spontanea l'idea di seguire un metodo storico, ripassando, naturalmente senza esagerare, per lo stesso traguardo di ricerche e di errori.

Io intendo insomma *sostituire a un metodo descrittivo un metodo costruttivo*.

Dopo aver fatto esercitare i ragazzi con il disegno geometrico, che li mette a contatto con le figure più semplici della geometria e che dà loro modo di accorgersi della differenza fra una figura e un'altra (per es. fra quadrato e rombo, fra rettangolo e parallelogramma, misurandone le diagonali), inizio il corso riprendendo le origini della geometria e facendo capire come sia necessario il calcolo delle aree, fermandomi, per ora, alle figure poligonali. Del resto il problema delle aree è «sentito» dai ragazzi fin dalla più tenera età.

Comincio col calcolare l'area del rettangolo al solito modo, considerando naturalmente le dimensioni commensurabili fra loro; dall'area del rettangolo seguono subito le regole per determinare l'area del quadrato, del triangolo, del parallelogramma, del trapezio, del poligono regolare, del poligono qualunque dividendolo in triangoli. Mille esempi ed applicazioni si presentano all'allievo di città, e più ancora a quello di campagna, sull'utilità pratica di queste regole di misura.

Va notato come io non introduca affatto le definizioni di rette parallele e di rette perpendicolari, ma mi valga sempre di questi concetti; con l'uso continuo e con la pratica del disegno i concetti stessi si chiariscono e si consolidano.

Ma insieme alla determinazione dell'area di una camera, di un campicello, ecc., è utile che il fanciullo si eserciti con qualche cosa di più piccolo, di più tangibile direi. I modelli in cartoncino, la scomposizione e la ricomposizione delle figure piane, gli offrono insieme la possibilità di analizzare e di sintetizzare, sviluppando le sue facoltà di osservazione.

Ecco qualche esempio:

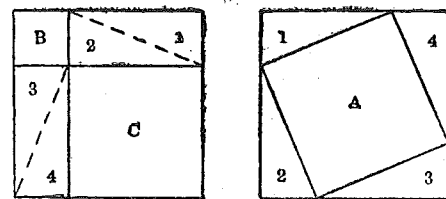
1) scomporre un esagono regolare in un triangolo equilatero e in tre triangoli isosceli uguali; come è l'area del triangolo equilatero rispetto alla somma delle aree dei tre triangoli isosceli?

2) scomporre un esagono regolare in due trapezi uguali e formare con questi un parallelogramma. Che relazione passa fra la base del parallelogramma e il perimetro dell'esagono?

E, finalmente questo, che è, in fondo, la meta cui si voleva arrivare:

Dato un quadrato scomporlo in due rettangoli uguali e in due quadrati disuguali; oppure scomporlo in quattro triangoli rettangolari uguali e in un quadrato (vedi figure).

L'eseguire queste scomposizioni è semplice; ci vuole invece una particolare intuizione per trarne, dal confronto, una proprietà; ma vi è sempre in una classe qualcuno che propone la via giusta: i rettangoli si possono scomporre in triangoli. E allora? L'idea di quel compagno ha gettato la scintilla



nella classe: il quadrato A deve avere la stessa area della somma dei quadrati B e C; e cioè:

il quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

L'effetto di questo Teorema di Pitagora, riscoperto dai ragazzi nelle prime lezioni del corso di geometria, è psicologicamente interessante; accade all'allievo davanti alla «rivelazione» del teorema di Pitagora quello che avviene a uno di noi che si trovi davanti a un meraviglioso quadro o a uno spettacolo della natura insolito e suggestivo; è «troppo grandioso». Sul principio questa strana proprietà del triangolo rettangolo dà un solo gusto estetico; per apprezzarla bisogna farne moltissime applicazioni: ecco che il ragazzo determina la lunghezza della diagonale del suo tavolo da studio, la lunghezza di una corda tesa fra la sua finestra e la finestra del piano inferiore del palazzo davanti, la distanza, dopo un certo tempo, di due treni partiti contemporaneamente da Orte con date velocità costanti e diretti uno verso Arezzo e l'altro verso Terni, l'intensità della forza con cui viene trascinata una barca dalle due rive di un fiume con corde in direzioni perpendicolari e di date intensità, e così vede come la geometria sia di aiuto ovunque, nella geografia, nella fisica, nella pratica in generale (va notato che gli allievi non conoscono ancora l'operazione di estrazione di radice quadrata, ma fanno uso della tavola dei quadrati).

Ma lo stesso ragazzo che si interessa per le applicazioni pratiche di una verità geometrica, si entusiasma d'altra parte alle applicazioni e alle estensioni più astratte del Teorema stesso, come per esempio: il triangolo equilatero costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei triangoli equilateri costruiti sui cateti.

Questo lento e progressivo passaggio dal concreto all'astratto, dal particolare al generale fa sì che la materia venga creata e studiata secondo le leggi naturali dello sviluppo psicologico; io penso che il teorema di Pitagora, con il suo duplice aspetto pratico ed astratto, sia particolarmente indicato ad indirizzare la mente dell'allievo al ragionamento matematico. Del resto anche Platone nel suo dialogo il «Menone» mette in evidenza il valore del metodo euristico suggerito da tale verità geometrica, col far sì che lo schiavo, benevolmente guidato da Socrate, riesca a costruire un quadrato doppio di uno dato.

Ma riprendiamo il problema che ci siamo proposti all'inizio: la determinazione delle aree nei terreni; sì, è facile misurare l'area di un campo poligonale se non vi sono ostacoli, come laghi, boschi, ecc.

In tal caso bisognerebbe disegnare nelle vicinanze, in una spianata, un campo uguale a quello dato. Sorge così, in modo naturale, il problema dell'uguaglianza: come si costruisce un poligono uguale a un poligono dato, in particolare un triangolo uguale a uno dato?

E' necessario per questo venire al concetto di angolo; esso scaturisce così, a metà del primo anno di studio, come una necessità.

Ecco come dal complesso (poligono) si arriva a poco a poco agli elementi (angolo, segmento) che formano il complesso.

Non si dà la definizione di angolo; molte misure di angoli col rapportatore.

Come i problemi pratici sulle aree ci hanno condotto al fatto non evidente del teorema Pitagora, così le misure sugli angoli conducono ad una proprietà che è come la prima non evidente, e quindi dà veramente la sensazione di scoperta: *la somma degli angoli di un triangolo ha sempre lo stesso valore, qualunque sia la forma del triangolo.*

Moltissimi esercizi su questo argomento, come per esempio:

1) In un triangolo isoscele ABC si prolunghi il lato BA di un segmento AD uguale ad AC e si congiunga D con C. Se $\hat{B} = 40^\circ$, che valore ha l'angolo \hat{BCD} ? Risulta sempre: $\hat{BCD} = \hat{B} + \hat{D}$?

2) In un triangolo rettangolo un angolo è di 50° . Determinare l'ampiezza dell'angolo compreso dall'altezza e dalla mediana relative all'ipotenusa. Si osserva che l'ampiezza di questo angolo è uguale alla differenza delle ampiezze degli angoli acuti. Sarà sempre vera questa proprietà?

Questo genere di esercizi fa sentire sin da ora la necessità del calcolo letterale.

Adesso si può venire alla costruzione di un triangolo uguale a uno dato per mezzo dei tre criteri d'uguaglianza (costruzioni con riga, compasso e rapportatore); anche qui i criteri d'uguaglianza dei triangoli s'impongono come una necessità di costruzione.

Ma il più delle volte non è facile trovare una spianata in cui si possa disegnare un campo eguale a quello dato. E allora?

Sorge spontanea un'idea suggerita dalla vita stessa che circonda il ragazzo, dalla sua quotidiana osservazione. Tutti i ragazzi sanno che vi possono essere oggetti della stessa forma e di diversa estensione: chi non ha giocato da bimbo con quelle scatole cubiche rientranti una dentro l'altra, o con quelle uova apribili di cui una è la forma rimpicciolita dell'altra? O, per venire a un'epoca più recente, quale ragazzo non ha visto la pianta di un appartamento, o l'ingrandimento di una fotografia, o una carta geografica della stessa regione in scale diverse?

Il concetto della similitudine è — mi sembra — il concetto geometrico più naturale, più spontaneo, più attraente, non so se più facile di quello dell'uguaglianza, ma certamente più suggestivo. E' un concetto che nasce prestissimo, non esagero se dico sui due o tre anni. Ce lo dice il fatto stesso che il bambino gode nel veder rappresentato in piccolo il mondo che lo circonda: la sua casa, la casa di fronte, la chiesa del villaggio. Del resto il fatto che queste idee nascano così presto nella mente del bambino viene confermato dallo studio dello sviluppo storico di questo concetto geometrico, che si fa risalire a Talete di Mileto.

Ritengo pertanto che uno studio intuitivo-sperimentale del concetto di similitudine sarebbe opportuno e desiderabile.

Senza continuare a descrivere il susseguirsi dei capitoli secondo questo indirizzo, mi basterà riassumere in breve i principi che lo informano:

passaggio dal concreto all'astratto, dal complesso al semplice, e quindi ordinamento del corso secondo lo sviluppo storico; principi che mi sembra di ritrovare nelle belle parole di Giuseppe Lombardo-Radice (1): «Dobbiamo lasciare che il piccolo matematico, che c'è in ogni spirito infantile, si

(1) G. LOMBARDO-RADICE: *Lezioni di didattica*. Parte III: il primo insegnamento scientifico.

svolga quanto più liberamente sia possibile con sforzi e ricerche personali. Ha valore per il bambino solo quel tanto che raggiunge colla propria esperienza, o che, colla guida d'un maestro (il quale sappia da dove si muova e dove voglia arrivare), può diventare propria esperienza, colla completa illusione d'aver raggiunto il risultato da sé».

C'è un libro del 1741 che mi ha suggerito l'idea di questo indirizzo: gli «*Eléments de géométrie*» di *Alexis-Claude Clairaut*.

Nella prefazione il *Clairaut* sottolinea questo metodo, la sua originalità e la sua naturalezza insieme, e ringrazia la Marchesa di *Châtelet* che gli ha suscitato l'idea di una tale trattazione, desiderando essa una via «regale» per apprendere le matematiche.

È un vero gioiello di esposizione: è una continua naturale scoperta delle proprietà delle figure a partire dall'osservazione e dalla misura; è — possiamo dire — una veduta del mondo che ci circonda con le lenti da geometra. Ed è particolarmente interessante che un matematico come *Clairaut*, prodigiosamente dotato ed estremamente precoce (come è noto a 10 anni leggeva il Trattato delle sezioni coniche del *De L'Hôpital* e a 13 presentava la sua prima memoria originale) abbia dedicato parte del suo tempo a questa opera di natura didattica, con tanto gusto e con tanto amore.

Gli elementi di geometria del *Clairaut* furono tradotti in italiano nel 1751. La parte di tale traduzione riguardante la misura dei terreni poligonali e corrispondente a circa un quarto dell'opera, entrò nelle nostre scuole nel primo quarantennio del secolo scorso in maniera abbastanza strana. Il Padre *Francesco Soave*, noto per aver organizzato le prime scuole elementari governative in Lombardia nel 1787 e per essere il primo iniziatore della letteratura scolastica italiana, aveva negli ultimi anni del 1700 pubblicato un volumetto dal titolo: «Elementi di geometria teorico-pratica ad uso delle scuole». In una nuova edizione di questo libro, in data 1803, il *Soave* vi allegava come ultimo capitolo la parte della geometria piana del *Clairaut* riguardante la misura dei terreni, sicché la nuova edizione porta il titolo: «Elementi di geometria teorico-pratica ad uso delle scuole di *Francesco Soave*, edizione diligentemente corretta nella quale si è aggiunto per la prima volta il trattato sulla maniera di misurare i terreni del signor *Clairaut*».

Il libro del *Soave* è un trattatello di geometria razionale che segue più o meno la disposizione odierna ed è corredato da molte applicazioni pratiche (costruzione di mappe, misurazione di altezze facendo uso del quadrante, ecc.); quella parte della traduzione italiana degli elementi del *Clairaut* ne costituisce appunto l'ultimo capitolo, completamente staccato dall'opera del *Soave*.

Il fatto che almeno cinque edizioni di questo volumetto si susseguirono fino al 1838 fa pensare che esso venisse ben accolto nelle scuole, per lo meno in alcuni tipi di scuole.

Queste osservazioni vengono però a contrastare con quanto scrive *C. I. Giulio*, professore di Torino, cui si deve, nella seconda metà del secolo scorso, una nuova traduzione degli *Elementi di Clairaut*. Egli afferma che la sola traduzione italiana, precedente la sua, fu quella pubblicata in Roma nel 1751, e aggiunge: «assai negletta nella lingua e poco degna dell'originale essa è stata ragione che il libro di *Clairaut* non ottenesse fra noi successo pari al merito e non penetrasse nelle nostre scuole». Evidentemente il *Giulio* non sapeva che alcuni capitoli degli *Elementi* erano entrati nelle scuole attraverso il volumetto del *Soave*.

Diamo quindi a *Francesco Soave* il merito di aver divulgato nelle scuole lombarde, valendosi del suo nome allora molto noto, parte dell'opera didattica del *Clairaut*, senza averne, probabilmente, afferrato il valore!

La seconda edizione della versione italiana del *Giulio* e le successive (la quarta porta la data 1885) sono corredate da aggiunte e note di *Giuseppe Da Camin*, il quale, nella prefazione, spiega le ragioni del suo commento. «Ridurre il *Clairaut*, coll'aggiunta di quelle proposizioni mancanti, a contenere

tutto quanto si deve insegnare nelle scuole tecniche, o, con altre parole, ridurre il *Clairaut* anche nella quantità della materia, come lo è nell'indirizzo e nel metodo, secondo le riviste del R. Ministero, ecco il fine che — dice il *Da Camin* — mi sono proposto in questa seconda edizione». E il Consiglio Superiore di Pubblica Istruzione approva questa nuova edizione degli *Elementi* come particolarmente adatta alle scuole tecniche.

D'altra parte, dai suggerimenti ufficiali al programma di matematica nelle scuole tecniche, in quel periodo, non risulta affatto che la linea da tenersi sia il «metodo *Clairaut*»; si insiste molto invece sul metodo grafico e sulle applicazioni pratiche in generale.

È certo che, dato il numero grande di edizioni sia di questa traduzione sia della precedente allegata al libro del *Soave*, il *Clairaut* deve aver fatto da testo in molte scuole tecniche italiane durante il secolo scorso; ma è anche certo, e ciò risulta dai programmi ministeriali e dalla prefazione sopra citata, che è stato usato perché ricco di begli esempi e di interessanti applicazioni pratiche, ma non per quello che è veramente lo spirito del libro, cioè il *metodo costruttivo*.

Evidentemente *Clairaut* prevedeva che sarebbe stato male interpretato quando, alla fine della prefazione degli *Elementi*, scriveva: «Dato che ho scelto la misura dei terreni per interessare i principianti, non dovrò forse temere che si confondano questi *Elementi* con gli ordinari trattati di rilievo? Questa interpretazione non può esser data che da coloro che non capiranno che la misura dei terreni non è affatto il vero scopo di questo libro, ma che tale argomento mi serve solo come spunto per far scoprire le principali verità geometriche».

A quanto riferisce uno dei più seri storici della matematica contemporanea — *David Eugenio Smith* — (nel suo libro «*The Teaching of Elementary Mathematics*») non sembra che gli elementi di geometria del *Clairaut* siano mai entrati nel loro vero senso nell'insegnamento ufficiale, nemmeno in Francia; ivi riscossero subito larga fama, tanto che il *Voltaire* li rese eterni con la frase: «Questo scienziato (*Clairaut*), rendendo piacevole la scienza, la rende insensibilmente necessaria alla nostra nazione».

Dopo aver sperimentato per un anno questo metodo didattico, ritengo che possa dare nel primo triennio medio brillanti risultati, facendo nascere nelle giovani menti il desiderio della ricerca e della scoperta.

EMMA CASTELNUOVO