EMMA CASTELNUOVO

L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA INTUITIVA

ESTRATTO DA
Cultura e scuola – n. 3, aprile 1962

L'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA INTUITIVA

Devo ringraziare l'amico Lucio Lombardo-Radice per avere, nel suo articolo *Matematiche e storia del pensiero in un liceo letterario*, pubblicato nel n.º 2 di questa rivista, citato il mio nome in termini oltremodo laudativi come propugnatrice d'un insegnamento dinamico della geometria nella scuola media. Chiamata in causa, penso sia opportuno che dia delle chiarificazioni di carattere didattico ai lettori della stessa rivista.

Ma prima di passare all'argomento specifico, e cioè all'insegnamento della geometria nella scuola media, desidero ancora riferirmi all'articolo di Lombardo-Radice, e ai suoi commenti, più che giusti, sui nuovi programmi.

« In Italia – egli dice – vi è una contraddizione.... Si mette mano ai programmi di una scuola media unificata? Ebbene, quelli di matematica vengono fuori come se negli ultimi sette anni non fosse successo niente, come se le discussioni, gli studî, gli esperimenti, le conclusioni di cui abbiamo cercato di dare un panorama non avessero mai avuto luogo ». In verità, sono quasi venti anni, e cioè dall'immediato dopoguerra, che si lavora attivamente in tutto il mondo per un rinnovamento della didattica della matematica nei varî ordini di scuola. E, anche volendosi limitare al modesto lavoro svolto in Italia, ci sembra opportuno ricordare le « riunioni del sabato » organizzate dall'Istituto romano di cultura matematica (1), nelle quali furono ripresi varî argomenti di didattica particolare e generale, tante volte discussi ma sempre vivi e attuali. E già da allora si vedeva come si fosse ancora una volta alla ricerca di una formula nuova e si sentiva che qualcosa doveva farsi per una società scolastica in continuo sviluppo. Alla fine del 1950 l'attività dell'Istituto fu sospesa, non solo perché i suoi dirigenti erano impegnati in altri lavori, ma per una ragione ben più profonda; s'intuiva, allora, dopo cinque anni di animate riunioni, che qualche cosa di nuovo doveva portarsi all'attenzione e alla discussione dei colleghi, e che era bene rafforzare i contatti, già iniziati per corrispondenza, con altri paesi, dove, come in Italia, uomini di scienza e di scuola si riunivano e discutevano.

---

(1) L'Istituto romano di cultura matematica, sorto all'inizio del 1945 per iniziativa di Tullio Viola e di Emma Castelnuovo, svolse la sua attività negli anni 1945-50. Un'ampia relazione sui lavori dell'Istituto è stata fatta dall'ispettore Alfredo Perna nella rivista « Archimede » (1950, pp. 36-40).

I frequenti scambî d'idee attraverso congressi internazionali, contatti personali, e libri e riviste [1], portarono Luigi Campedelli, professore all'università di Firenze, a sollecitare i Centri didattici del Ministero perché organizzassero riunioni sull'insegnamento della matematica. Ebbero così luogo a Firenze nel febbraio e nel novembre del 1958 due interessantissimi convegni di didattica matematica. Questi convegni, diretti dallo stesso Campedelli, ebbero notevoli riflessi anche all'estero, e, in Italia, attirarono l'attenzione di largo pubblico, da matematici di professione a insegnanti, a psicologi, a pedagogisti; e, per la prima volta, il problema dell'insegnamento della matematica fu illustrato nelle colonne dei giornali quotidiani e nei notiziarî trasmessi alla radio, richiamando così l'interesse dell'opinione pubblica [2].

A questi convegni si sono evidentemente ispirati i compilatori dei nuovi programmi per la «scuola media unificata» nella redazione delle direttive premesse ai programmi stessi, ma purtroppo i programmi che seguono sembrano stranamente allontanarsi dalle direttive che li precedono. Mentre nelle direttive s'insiste sul fatto che si deve partire dal reale, da modelli e da esperienze effettive, in breve «dal concreto», chi legge i programmi trova, per esempio, che se, da una parte, gli viene suggerito di far esercitare gli allievi fin dall'inizio del primo anno sul sistema metrico decimale, non deve però parlare di aree o di volumi fino al terzo anno; si comprende perciò che quelle esercitazioni sul sistema metrico decimale, non avendo la base su cui inserirsi, rimarranno necessariamente «staccate» dal concreto. E se poi – mi sia permesso di esporre un altro dubbio – si vuole introdurre il ragazzo nel mondo delle figure concrete, come ci suggeriscono le direttive, penso che ci si trovi un po' male dovendo prima parlare delle rette e dei piani, enti depurati da ogni attributo concreto.

Ma in effetti, quanto abbiamo detto ha ben poca importanza se si riflette che in Italia l'insegnante gode della massima libertà, e che questa libertà, di cui mi piace ancora una volta render atto pubblicamente, ci autorizza a svolgere i nostri corsi secondo i criterî che sembrano più consoni a noi stessi. È proprio in virtù di questa possibilità di libero insegnamento, che ho sperimentato, fin dal 1945, una metodologia per l'insegnamento della geometria intuitiva che si differenzia notevolmente dai corsi classici [3]. Cercherò d'illustrarla anche ai colleghi non specializzati in materia.

Chi, dopo gli studî secondarî, non ha seguìto i corsi universitarî di matematica, ha di questa disciplina idee molto vaghe; se ha studiato con serietà,

---

(1) Ricordiamo, fra le nazioni con cui siamo stati più a contatto: la Francia e in particolar modo il Centre international d'études pédagogiques di Sèvres, la Svizzera e la Scuola di didattica psicologica sotto la guida di Jean Piaget, il Belgio con gli appassionati docenti dell'Università di Bruxelles e tutto il gruppo della rivista «Mathematica et Paedagogia»; e ricordiamo soprattutto l'influenza esercitata anche in Italia dalla *Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques*, sorta nel 1950 per iniziativa di matematici, di psicologi e pedagogisti. Più recentemente, le attività dei vari paesi sul tema «insegnamento della matematica» si vanno organizzando sotto l'egida dell'O.E.C.E.

(2) Per una relazione su questi Convegni si veda *Il II Convegno di didattica matematica* in «Annali della Pubblica Istruzione», 1958, 12. Le relazioni del I Convegno di Firenze sono state pubblicate in un volumetto a cura dei Centri didattici, con il titolo *Orientamenti sulla didattica della matematica nella scuola secondaria di primo ciclo*. Molte delle relazioni del II Convegno sono state pubblicate nella rivista «Archimede».

(3) E. Castelnuovo, *Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria intuitiva*, in «Periodico di matematiche», dicembre 1946; e *Geometria intuitiva*, Firenze, La Nuova Italia.

ricorda, per quanto riguarda la geometria, che vi erano dei teoremi collegati uno all'altro come gli anelli d'una catena, e che questi teoremi discendevano da alcune proprietà di carattere evidente, dette postulati. Che poi quegli enti del piano o dello spazio, che si chiamavano triangoli, cerchi o coni, avessero qualche relazione con le figure realmente esistenti che cadono sotto i nostri sensi, questo è lontano, molto spesso, dalla mentalità d'un giovane arrivato alla fine di un corso liceale che lo ha abituato per lunghi anni ad adorare l'ente astratto e il tipo di ragionamento deduttivo, e dove gli è stato istillato, sia pure involontariamente, il disprezzo per il reale. Le figure geometriche, perciò, gli sono sempre apparse come una creazione della nostra mente, indipendenti e preesistenti a qualsiasi osservazione concreta, e tutto il sistema logico deduttivo gli è sembrato imposto da un essere superiore, e quindi indiscutibile. È appunto per questa sua perfezione e staticità che il corso liceale lascia sovente l'impressione che in matematica non c'è più nulla da fare e da creare, impressione quanto mai dannosa anche da un punto di vista psicologico.

Quanto al corso di geometria seguìto nel primo triennio medio, è difficile che esso abbia lasciato una qualsiasi traccia nell'intelligenza del giovane, sia per il modo stesso con cui in generale viene svolto questo corso, sia perché soffocato dai cinque anni successivi di geometria razionale.

Quale sia il significato che si può dare a questo corso di geometria intuitiva e quali siano gli scopi che esso si propone, è quanto cercherò di esporre. Che cosa è la geometria intuitiva? Quando è stato istituito questo corso in Italia? Cominciamo col rispondere alla seconda domanda.

La data di nascita del corso di geometria intuitiva è il 1881, ma conviene risalire ancora avanti per comprendere, in tutta la sua essenza, il perché di questa istituzione. Lo spirito a cui doveva attenersi l'insegnamento della geometria e in generale della matematica nelle scuole secondarie italiane era stato fissato nel 1867 dai matematici Cremona, Betti e Brioschi, incaricati dal Ministero di redigere i programmi per le scuole secondarie. «La matematica – dice la relazione ministeriale del 1867 – non deve considerarsi come un complesso di cognizioni utili in sé perché applicabili ai bisogni della vita, ma principalmente come un mezzo di cultura intellettuale, come una ginnastica del pensiero diretta a svolgere le facoltà del raziocinio ed aiutare quel sano criterio che serve a distinguere il vero da ciò che ne ha solo l'apparenza». I matematici non si resero conto che una trattazione ispirata a questi principî, se pure poteva adattarsi ai corsi delle scuole secondarie superiori, non era certamente indicata per l'età della pre-adolescenza. Si deve a un grande medico, allora Ministro della Pubblica Istruzione, Guido Baccelli, l'idea di premettere al corso logico-deduttivo un corso di geometria a carattere sperimentale; questo corso, che fu denominato geometria sperimentale, o costruttiva o intuitiva (la denominazione subì varî cambiamenti, ma il carattere rimase sempre più o meno lo stesso) fu appunto istituito nel 1881. Fu l'Italia la prima nazione del mondo a istituire un corso di geometria intuitiva! E di questa priorità, a distanza di quasi un secolo, possiamo andare veramente orgogliosi, dato che solo oggi si sostiene in tutto il mondo la necessità di un tale studio; e che solo oggi paesi ben più progrediti del nostro dal punto di vista dell'istruzione scolastica istituiscono un corso di geometria intuitiva (il Belgio nel 1947, la Francia solo da uno o due anni, e in modo assai vago).

Questi fatti, che appaiono assai strani se si considerano nell'àmbito della stretta didattica, si spiegano invece in modo del tutto logico quando s'inquadrino nel corso della storia. La domanda « perché un corso di geometria intuitiva? quale ne è lo scopo? » s'inserisce in un problema filosofico e non è che la traduzione di altre domande: come si costruisce la geometria? quali sono le radici di questa scienza? su quali basi deve essere fondata un'assiomatica? Alle risposte che si possono dare a queste domande, risposte che dipendono dalle diverse impostazioni filosofiche, corrispondono, sul piano didattico, altrettante metodologie.

Se si sostiene che l'ente geometrico è una costruzione della mente umana, indipendente dalla considerazione di oggetti reali, non ha evidentemente senso premettere al corso di geometria razionale uno studio a carattere sperimentale, sensoriale. Si comprende perciò come quei paesi, come la Francia, che sostenevano la tesi razionalista non abbiano ritenuto opportuna l'introduzione di un corso di geometria intuitiva. Ma se si parte dall'ipotesi che l'ente geometrico si formi nella mente umana « per astrazione », a partire da osservazioni di oggetti reali e da esperienze su questi, dovremo, sul piano didattico, far precedere il corso deduttivo da uno studio a carattere sperimentale, dove gli assiomi trovino le loro radici naturali.

Abbracciando il secondo punto di vista sorge subito un problema di natura didattica: se dobbiamo introdurre il bambino alla concezione dell'ente geometrico attraverso considerazioni e osservazioni sul concreto, quale è il senso che va dato a questo « concreto »?

Risaliamo al significato etimologico del termine « intuitivo » che denomina il nostro primo corso di geometria. *Intueri* significa originariamente: « guardare dentro, guardare con attenzione ». In origine il significato era dunque statico: era quello di contemplare la verità in senso platonico. Se allora interpretiamo in questo senso l'appellativo « intuitivo », ricorrere al concreto vorrà dire portare l'attenzione dell'allievo a osservare passivamente disegni, modelli e oggetti che ci circondano. Se invece ci riferiamo al significato della parola intuizione così come è stato precisato nella pedagogia pestalozziana, cioè all'intuizione come costruzione, il corso di geometria intuitiva dovrà offrire al ragazzo un materiale con cui possa costruire o che si possa trasformare, facendo sì che la sua attenzione si rivolga non tanto all'oggetto, alla figura in sé, ma alla sua variazione, a un'azione, a un'operazione dunque.

Penso sia opportuno fare un esempio che chiarisca le differenze nella trattazione d'uno stesso argomento secondo l'una o l'altra metodologia. Prendiamo un esempio molto semplice: si voglia parlare del quadrato, di una figura che è notissima a un bambino di 11 anni. Si potrà allora procedere così: far ritagliare dei quadrati di carta, far misurare lati e diagonali, far citare dagli allievi stessi degli oggetti che hanno la forma quadrata...; si potrà anche far disegnare un quadrato con la riga e il compasso. Si potrà, poi, condurre il ragazzo ad analizzare le differenze che passano fra il quadrato e gli altri quadrilateri, allo scopo di condurlo a una definizione. Ma una definizione che sorga da queste esperienze esige una quantità di osservazioni comparative e una facoltà d'astrazione che in generale non ha un ragazzo di 11 anni. Il maestro è allora obbligato a dare lui stesso la definizione, che viene pertanto imposta dall'alto.

Un altro modo per introdurre allo studio del quadrato può essere questo: si diano al bambino delle strisce uguali e delle viti (tipo quelle del meccano) che permettano di collegare le sbarrette una all'altra. Appena fatta la costruzione, il ragazzo si accorgerà, non senza meraviglia, che la figura che ha costruito è mobile, può articolarsi esercitando una piccola pressione su un vertice o su un lato, e che da quadrato si trasforma in rombo; il quadrato è dunque un rombo particolare, il quadrato appartiene alla famiglia dei rombi. Tutta una serie di considerazioni e d'esperienze verranno spontanee alla sua mente nell'osservare questa trasformazione; vi sono in effetti degli elementi che non cambiano (come il perimetro, il parallelismo dei lati, la somma degli angoli), mentre altri (come l'area, la somma delle lunghezze delle diagonali) variano al variare della figura. E il ragazzo stesso, di fronte a un materiale che si trasforma con continuità, potrà cogliere i caratteri distintivi di questa famiglia di quadrilateri, e gli verrà spontaneo di costruire altre famiglie, e d'indagare, e sarà spinto in modo naturale a classificare e quindi a definire.

Penso che anche questo banalissimo esempio basti a far cogliere la differenza notevole che vi è fra due metodologie che prendono, però, entrambe origine da uno studio di basi concrete: per l'una il carattere del corso è *descrittivo*, per l'altra è *costruttivo*.

Un ricorso al concreto, seguendo una metodologia costruttiva, si può anche avere portando l'attenzione del ragazzo su problemi reali, come potrebbe essere quello della determinazione dell'area di un campo; in tal caso « s'immerge » il ragazzo in una situazione complessa, quali sono quelle che si presentano in natura; ed egli, per renderla più semplice, sarà condotto ad analizzarla, passando così dal « globale » all'elemento.

Un metodo attivo, nel senso di costruttivo, deve – a me sembra – esercitare la mente ai due processi, l'uno opposto dell'altro: quello di sintesi, che parte dall'elemento per costruire, per arrivare a un globale, e quello di analisi, che parte da una situazione complessa, da un globale, per analizzare e giungere all'elemento. I mezzi per esercitare a questa ginnastica mentale sono naturalmente molti e i più varî. È interessante sapere che anche autori antichi hanno sentito l'esigenza d'una metodologia viva per un primo insegnamento della geometria; introduce appunto con metodo attivo nel mondo geometrico un libro del '700, divenuto classico nella letteratura della didattica matematica: gli *Eléments de géométrie* del grande matematico francese A. C. Clairaut. L'autore dice nella prefazione che è stato condotto a scrivere il suo libro perché troppe volte ha notato come gli inizî della geometria respingano i principianti; e ciò è dovuto al fatto – egli dice con spirito didattico veramente moderno – che lo studio della geometria comincia sempre con un gran numero di definizioni, di assiomi, di principî preliminari, e che, se anche successivamente viene fatta qualche applicazione pratica d'un teorema, questo non ha per scopo di facilitare i mezzi di apprendimento, ma solo quello di far comprendere che la geometria ha anche delle utilità pratiche. « Perché – sono parole di Clairaut – se ogni proposizione viene sempre prima del suo uso, la mente non ritorna a delle idee sensibili che dopo aver subìto la fatica di cogliere le idee astratte ». Queste affermazioni, di carattere così evidente, hanno avuto più volte bisogno di essere ribadite e commentate; è di oggi una frase espressiva dello scienziato francese J. L. Destouches proprio su questo argomento: « Cominciare un'opera scientifica – egli dice – con l'enunciato di un sistema di assiomi è come scrivere un'opera di cui manchi il primo volume, e dove si chiede all'intelligenza del lettore una ricostruzione della teoria, col pericolo che non comprenda affatto il testo che ha sotto gli occhi ».

Orbene, gli *Eléments* di Clairaut costituirebbero appunto il primo volume di quell'opera, volume che modernamente potrebbe intitolarsi « geometria intuitiva ». Senza entrare nei particolari, descriverò in breve la linea seguìta dal Clairaut: partendo da quelle che generalmente si ritengono le origini della geometria, e cioè dalla determinazione dell'area dei campi, Clairaut pone il lettore fin dalle prime pagine del libro di fronte a un problema molto naturale: come calcolare l'area di un campo poligonale? Viene spontaneo di semplificare il problema, di analizzarlo cioè: viene l'idea di dividere il poligono in tanti triangoli. È poi facile vedere come un triangolo sia la metà di un rettangolo, e l'area del rettangolo si può calcolare con un riporto effettivo del quadrato unità di misura sul rettangolo. Ma ecco che quando il problema fondamentale della geometria piana – quello dell'equivalenza dei poligoni – sembra risolto, qualche ostacolo pone una nuova problematica: può infatti accadere che nell'interno del poligono si trovi un lago, una costruzione,... che impedisca la divisione in triangoli. Tutto il procedimento ideato prima viene a cadere. Sorge allora l'idea di riprodurre, in una spianata libera da ostacoli, un poligono uguale al dato, ed eseguire su questo tutte le misure; il capitolo dell'uguaglianza segue così, in modo del tutto naturale, a quello dell'equivalenza. Ma anche questa soluzione può essere inattuabile; infatti se non c'è nelle vicinanze una spianata libera da ostacoli la riproduzione d'un poligono uguale al dato può non potersi effettuare. Il ragazzo è allora spinto a fare un altro passaggio; vi suggerirà lui stesso di riprodurre la figura « in piccolo ». Si apre così lo studio delle figure simili. I capitoli fondamentali della geometria piana – equivalenza, uguaglianza, similitudine – vengono così ad essere legati fra loro da una linea che non è certamente euclidea, e che potrebbe intendersi come un'interpretazione di avvenimenti storici nel campo della matematica.

Mi è sembrato che al corso del Clairaut, sempre sostenuto dall'idea di partire dal globale e di analizzare, mancasse qualcosa sia da un punto di vista metodologico che da un punto di vista matematico. Effettivamente, il Clairaut introduce nel mondo delle figure solo attraverso la descrizione o il disegno; ora, anche il disegno, sebbene sia costruzione, non ha i caratteri del metodo attivo, dato che, non permettendo tentativi, deve essere suggerito dalla parola del maestro. Il problema di come convenga introdurre il ragazzo allo studio delle figure mi ha condotto al problema più largo sulle origini del disegno geometrico, e mi è sembrato di poter attingere idee non dalla storia ma dalla preistoria. Dalle ricerche svolte in questo campo, mi pare di poter concludere che alla costruzione grafica di una figura geometrica l'umanità è arrivata solo dopo la costruzione effettiva, materiale, della figura stessa; che la costruzione grafica rappresenta insomma l'immagine, il quadro d'una costruzione materiale. Così, per esempio, il triangolo come disegno appare solo nel periodo neolitico dopo che l'uomo aveva scoperto l'utilità della forma triangolare nelle costruzioni statiche (capriate, puntelli di sostegno, ecc.). Traducendo queste idee sul piano didattico, il bambino sarà condotto a fare la conoscenza delle figure geometriche non col sussidio del disegno ma con l'effettiva costruzione, manipolando un materiale (come abbiamo mostrato nella costruzione del quadrato), cioè partendo dagli elementi e « sintetizzando ».

Abbiamo voluto dare un'idea di come si può impostare in modo dinamico un corso di geometria intuitiva. Ci siamo ispirati alla storia, ma non si tratta d'una storia nel senso di cronaca quanto piuttosto d'una storia sociale quale potrebbe esser stata vissuta da un'umanità idealizzata, spinta inizialmente alla ricerca per risolvere problemi di carattere pratico. Si tratta d'uno

sviluppo della matematica reso necessario da una logica degli avvenimenti, dove questi, in quanto avvenimenti umani, si succedono per crisi, per salti, per fratture. Il corso che segue questa metodologia è dunque pieno d'emozioni e d'imprevisti.

Ma, a un certo punto, la mente del ragazzo, giunta alla maturazione, avvertirà i limiti di tutta la trattazione, perché avvertirà i limiti del concreto. È solo allora che il ragazzo vi chiederà di aprire davanti a lui « il secondo volume » di quell'opera che si chiama geometria, e di cui conosce ormai le radici naturali.

Scuola media « T. Tasso », Roma EMMA CASTELNUOVO