LES TRANSFORMATIONS AFFINES DANS LE 1er CYCLE DE L'ÉCOLE SECONDAIRE

L'objet de cet exposé est l'enseignement des transformations affines dans le 1er cycle de l'école secondaire. Bien que je me rapporte toujours à l'enseignement de cette matière à l'école italienne, il est évident que ce même enseignement peut être situé dans un autre pays et dans une organisation scolaire tout à fait différente.

Pour faciliter la lecture je voudrais brièvement renseigner les collègues sur l'organisation du 1er cycle en Italie. Depuis cinq ans ce cycle-là – la *Scuola Media* –, qui couvre trois années, est devenu obligatoire et identique pour tous les enfants. Les élèves sont âgés de 11 à 13–14 ans. Le problème de l'enseignement des mathématiques à une école qui réunit des éléments si différents du point de vue social, pose une responsabilité non seulement d'ordre scientifique, car c'est justement la mathématique qui peut servir d'élément unificateur dans un milieu social fort mélangé. En effet, c'est la description spontanée d'un 'fait mathématique' plutôt que celle d'un fait littéraire ou d'une situation de la vie quotidienne qui encourage l'enfant d'une famille moins cultivée à exprimer ses observations et qui le conduit à surmonter peu à peu ces difficultés de langage qui proviennent d'une expérience linguistique trop restreinte; d'autre part, on a remarqué que ce sont justement les enfants d'ouvrier, de paysan et même du plus modeste travailleur qui, fort souvent, révèlent des intuitions bien plus fécondes que leurs camarades élevés dans un milieu intellectuel. Ces différents facteurs, qui se sont présentés surtout depuis l'unification des écoles du 1er cycle, c'est-à-dire dès l'année scolaire 1963–64, ont enrichi notre enseignement mathématique d'idées, de suggestions et d'espoirs.

Dans ce cycle les classes ont de 25 à 30 élèves; il y a trois leçons de mathématiques par semaine dans chaque classe.

C'est le même professeur de mathématiques qui suit les enfants pendant ces trois années et, comme il jouit de la plus grande liberté dans l'enseignement, il peut organiser à son gré la liste des sujets du programme à traiter pendant ces trois années, en avançant ou en retardant certains sujets selon ses préférences didactiques. Il faut aussi remarquer que, bien que le programme ne comporte pas de sujets trop modernes, les directives ministérielles qui accompagnent les programmes, encouragent le professeur à traiter des chapitres qui, tout en ne figurant pas sur la liste, sont considérés comme formatifs dans une conception moderne de l'enseignement mathé-

Educational Studies in Mathematics **1** (1969) 274–288; © *D. Reidel, Dordrecht-Holland*

matique. C'est justement dans ce cadre que notre équipe a développé depuis quelques années le sujet des transformations affines. J'attribue une grande importance à ce sujet, soit comme préparation à un cours axiomatique, soit parce qu'il est particulièrement propre à relier le monde de la nature et de la technique avec la mathématique pure. L'inspiration didactique est suggérée par l'âge des enfants: de 11 à 13–14 ans. A cet âge il faut bien laisser une grande place à l'intuition, à l'imagination mathématique, pour ainsi dire, tout en admettant la découverte de propriétés, entrevues intuitivement, par des processus déductifs simples. L'intuition est toujours suscitée par le fait que, dès le début, l'enfant est plongé dans des situations mathématiques qui ont comme 'support' un concret opératif.

Dans la première période de la *première classe* les élèves sont plongés dans la géométrie (une géométrie sans nombres) par la construction effective de polygones au moyen de barres, genre mécano (Figures 1 et 2). Une attention particulière est donnée à l'ensemble des quadrilatères et, parmi ceux-ci, au sous-ensemble des parallélogrammes. L'enfant se rend compte qu'un carré articulé se transforme en un losange, un rectangle en un parallélogramme, et commence, dès les premiers jours, à découvrir les invariants qui sont liés à cette transformation. Mais il ne s'agit pas – il faut bien le souligner – d'une transformation de l'espace: c'est seulement la figure qui se transforme dans un espace immobile.

En observant la figure qui se transforme, les enfants remarquent que pendant que les angles et les diagonales changent, le périmètre reste le même et que la somme des angles est aussi constante. Par analogie, et peut-être guidés par un certain désir de propriétés invariantes, ils sont toujours séduits à affirmer que 'la somme des diagonales est aussi constante, parce que ce qu'on perd avec l'une est gagné par l'autre'; ils diront aussi que 'si le périmètre reste le même, il est évident que la surface ne change pas non plus'. Quelques raisonnements logiques basés sur l'intuition des cas-limite arrivent à convaincre les enfants du fait que leurs affirmations ne sont pas vraies. Ils sont étonnés: c'est la première fois qu'un raisonnement logique, qui est à leur portée, s'oppose à la perception immédiate.

Dans la voie de la découverte des invariants il n'arrive pas trop facilement que leur attention soit attirée par un invariant non-métrique: le parallélisme des côtés. Pour diriger l'attention sur cette propriété qui leur paraît assez fade, nous ferons remarquer aux enfants les ombres des vitres projetées par le soleil sur le sol ou sur les murs, et nous ferons entrer dans leur vocabulaire, d'une façon tout à fait naturelle, l'adjectif 'affin'; on dira donc que le carré, le losange, le rectangle et le parallélogramme sont des *figures affines*. Nous avons ainsi, pendant quelques instants, dirigé leur attention sur une transformation qui implique l'espace entier; cependant, l'étude systématique de cette transformation ne sera entreprise que dans la 2ème classe. Pour le moment on s'occupe uniquement de figures affines, non pas d'espaces affins.

Dans la 1ère classe les enfants s'occupent beaucoup de graphiques empiriques (leurs tailles, leurs poids, les températures dans un certain lieu, les variations du nombre des habitants d'un certain pays, etc.) et aussi de représentations graphiques de simples lois mathématiques, comme la loi fonctionnelle des carrés des nombres. Ils ont l'habitude de choisir à leur gré les unités de mesure. De cette manière des graphiques du même phénomène ou de la même loi mathématique peuvent apparaître différents bien qu'ils possèdent des propriétés communes. En particulier, on remarque qu'à des segments parallèles dans un graphique correspondent des segments aussi parallèles dans l'autre tracé dans des échelles différentes, qu'au milieu d'un segment correspond le milieu du segment correspondant. Avec les enfants on dira que les graphiques sont affins l'un à l'autre à cause de l'invariance de ces propriétés.

Nous sommes maintenant dans la *deuxième classe*. On va reprendre les sujets traités en première pour avancer dans le monde des transformations affines. Nous allons envisager une fois de plus:

(1) le carré articulé;

(2) les ombres d'un objet produites par les rayons du soleil;

(3) des graphiques affins d'une même loi.

Ces trois sujets marqueront autant de voies vers la caractérisation d'un espace affin.

(1) L'observation plus proche du carré articulé provoque la question: 'Qu'est-ce qu'il arrive à un point du carré lorsque le carré se transforme dans un losange?' Il est facile d'y répondre s'il s'agit d'un point du périmètre du carré, mais c'est un grand problème s'il s'agit d'un point à l'intérieur du carré. 'On comprend bien', – ce sont les enfants qui le disent – 'qu'à tout point du carré va correspondre un point du losange et viceversa, mais, comment concilier tout cela avec le fait que la surface du carré est plus grande que celle du losange?' 'D'un côté', dit quelqu'un, 'je vois, je comprends bien qu'il doit y avoir une correspondance entre les points du carré et les points du losange, mais d'autre côté je ne vois pas comment cette correspondance pourrait s'établir, étant donné que la surface du losange est plus petite que celle du carré.' Mais, c'est justement le fait de 'ne pas voir' qui conduit dans ce cas à 'ultra-voir': le concret est idéalisé peu à peu. Un autre dit: 'On dirait que les points du carré sont plus espacés, et qu'ils deviennent de plus en plus épais lorsqu'en déformant le carré, on va vers le cas-limite.'

Ces observations faites par des enfants de douze ans sont assez significatives: on est à la frontière entre le concret et l'abstrait, on voudrait donner une justification, on y voudrait voir clair..., et, pour cela l'enfant lui-même

est conduit à la conception du point sans dimension, il est donc contraint de faire l'abstraction.

Mais notre but était de conduire les enfants à fixer une correspondance: comment trouver le correspondant d'un point qui se trouve à l'intérieur du carré? A cette question bien des enfants sont prêts à répondre en suggérant de tendre deux fils ou deux barres parallèlement aux côtés du carré et se croisant sur ce point. Tout à coup l'on voit: on peut 'quadriller' le carré, de sorte que chaque point paraît comme reperé par deux coordonnées. Ce 'moment géométrique' est très important: à partir de ce moment, en effet, l'enfant ne voit plus seulement un carré quadrillé; il a la sensation que 'l'enceinte' du carré n'existe plus: c'est le plan tout entier qui lui paraît quadrillé. Le carré quadrillé qu'il garde dans les mains (on peut facilement le réaliser avec les barres-mécano – Figure 3a, b) représente 'un modèle en petit' du plan entier: en regardant ce qui arrive dans son carré il pourra facilement imaginer ce qu'il peut arriver dans le plan. Si p. ex. il réalise un polygone quelconque par un fil élastique tendu autour des vis-mécano (les nœuds du treillis), il pourra examiner la transformation de ce polygone pendant la transformation du carré. C'est donc l'enfant qui pourra 'lire' sur le concret les propriétés de cette transformation. Et il ne s'agit plus de la transformation de la figure qu'il garde dans les mains – je le répète –, mais de la transformation du plan: nous sommes 'sortis' de la figure, nous avons réalisé une *transformation affine* à laquelle tout le plan est intéressé. On remarquera des propriétés, les propriétés de l'affinité: à des droites parallèles vont correspondre des droites parallèles; le rapport de segments correspondants est invariant, le rapport de l'aire des figures correspondantes est invariant. Ensuite, on fera remarquer qu'il s'agit d'une affinité particulière.

Le carré quadrillé ne permet pas de réaliser, aux moyens des nœuds, des figures au contour curviligne. Ce sont les enfants eux-mêmes qui se posent le problème et ce sont eux qui en trouvent la solution en suggérant l'idée d'un quadrillage 'plus épais', d'un canevas où la trame des fils est bien visible. On encadre un tel tissu dans un métier articulé et l'on réalise de cette façon un plan affin. Une figure dessinée sur le tissu va se transformer à la suite de l'articulation du métier. Dans la Figure 4a on voit un cercle dans lequel est inscrit un carré, et dans la Figure 4b on peut observer la figure transformée: une ellipse dans laquelle est inscrit un losange. Une des propriétés de l'affinité – la constance du rapport des aires de figures correspondantes – donne l'idée de déterminer l'aire de l'ellipse en partant de celles du cercle, du carré et du losange. La découverte de la formule de l'aire de l'ellipse par des moyens si élémentaires est une acquisition très importante par des élèves qui ne connaissent pas encore la valeur du calcul littéral.

(2) Le deuxième point de départ pour l'étude des transformations affines

sera l'observation des ombres produites par le soleil. Déjà dans la 1ère classe, pour mettre en relief les propriétés affines d'un carré ou d'un rectangle articulé, nous avions fait remarquer que les mêmes propriétés – en particulier le parallélisme des droites – se retrouvent dans les ombres produites par le soleil. On va donc reprendre ces observations, et l'on peut exposer au soleil notre carré quadrillé, cette fois sans le déformer (Figure 5). On remarquera que:

(a) à des droites parallèles correspondent des droites parallèles;

(b) le rapport entre les segments correspondants reste invariant pourvu que les segments appartiennent à la même droite ou à des droites parallèles: si p.ex. un segment est 1/6 du côté du carré, le segment-ombre sera aussi 1/6 du côté-ombre;

(c) le rapport entre les aires des figures correspondantes reste invariant: si p.ex. un petit carré est 1/36 du grand carré, le petit parallélogramme-ombre sera aussi 1/36 du grand parallélogramme-ombre;

(d) à des droites correspondent toujours des droites; pour mettre en relief cette propriété il faut bien faire remarquer qu'il y a d'autres transformations où cela n'est plus vraie: le miroir concave ne respecte pas la linéarité; les cartes géographiques donnent l'exemple bien connu de transformations qui ne conservent pas la linéarité.

Nous ferons remarquer que, à cause de l'invariance du rapport entre segments correspondants, au milieu d'un segment va correspondre le milieu du segment correspondant, et, par conséquent, au centre d'un carré va correspondre le point d'intersection des diagonales du parallélogramme correspondant. A partir de ces considérations on peut développer toute une recherche à propos des barycentres de bien des figures.

En revenant maintenant à la transformation affine obtenue par la déformation du carré quadrillé, il faudra faire remarquer que celle-ci est un cas particulier de l'affinité que nous donne le soleil, l'ombre d'un petit carré pouvant être le parallélogramme le plus général tandis que dans la première expérience le transformé d'un petit carré était un losange.

Mais, comme toujours, c'est le contre-exemple qui met en relief une certaine propriété: il faut comparer les ombres produites par le soleil avec les ombres produites par une lampe, une source ponctuelle (Figure 6). Rien ne reste, à l'exception de la dernière propriété, celle qui était la plus fade: à des droites vont correspondre des droites. L'espace éclairé par une lampe artificielle – *l'espace projectif* – est donc bien différent d'un espace éclairé par le soleil: la réalité que l'enfant croyait bien connaître a révélé, une fois de plus, des aspects tout à fait inconnus.

Et encore des découvertes: l'enfant déplacera la lampe, regardera l'ombre du quadrillage sur un écran, disposera le quadrillage parallèlement à l'écran,

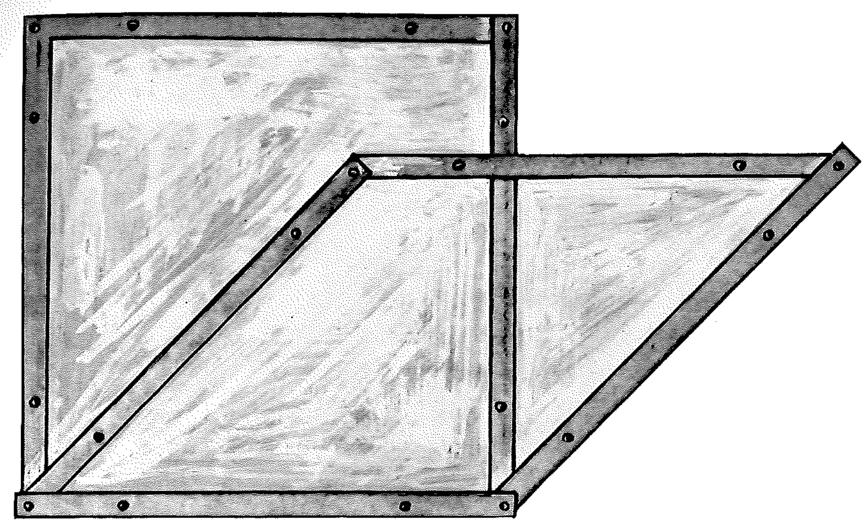

Fig. 1

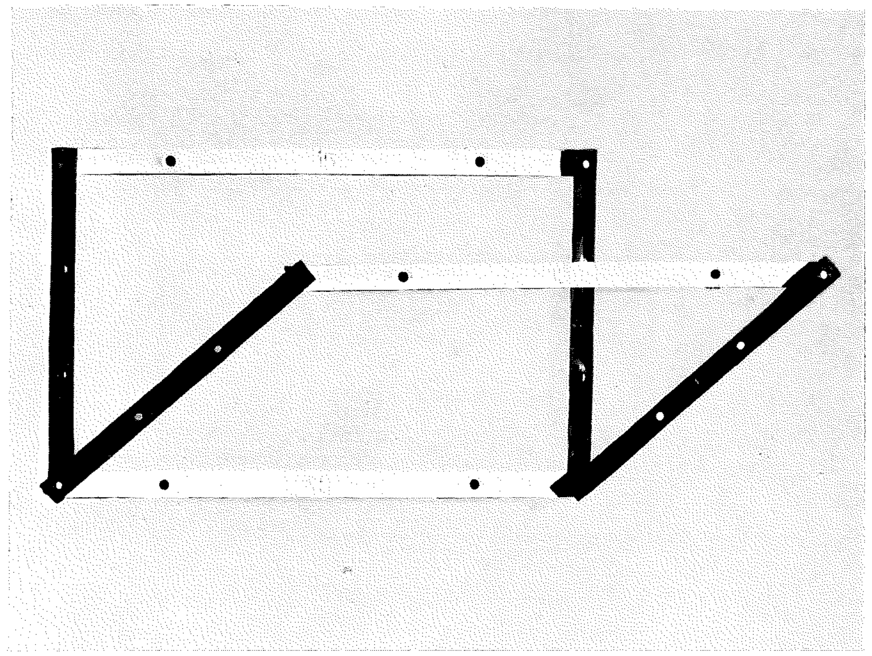

Fig. 2

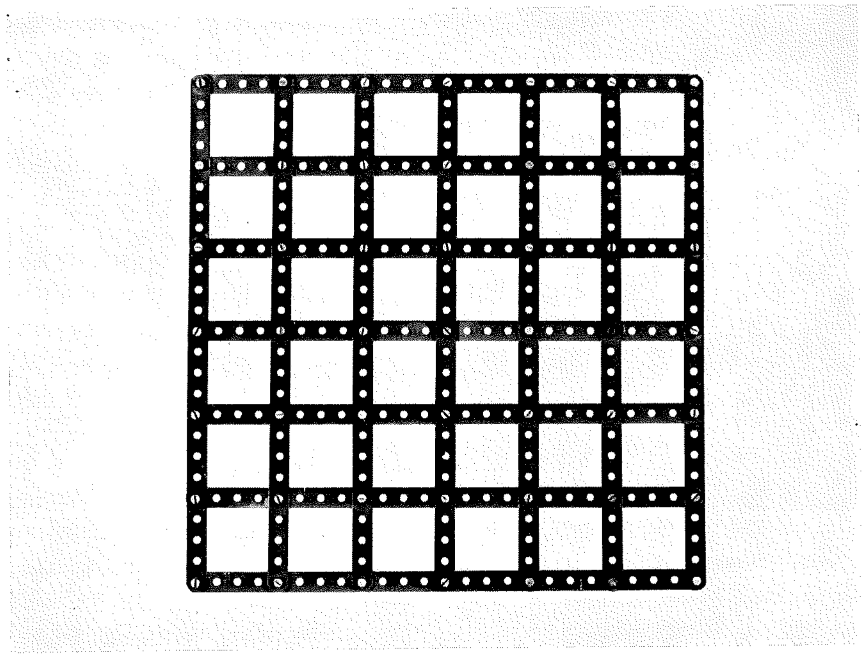

Fig. 3a

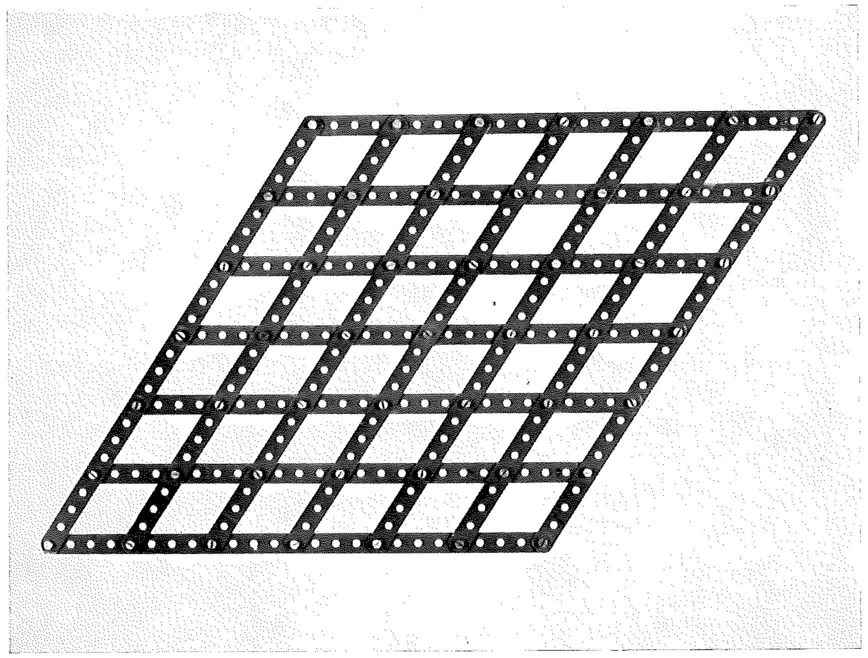

Fig. 3b

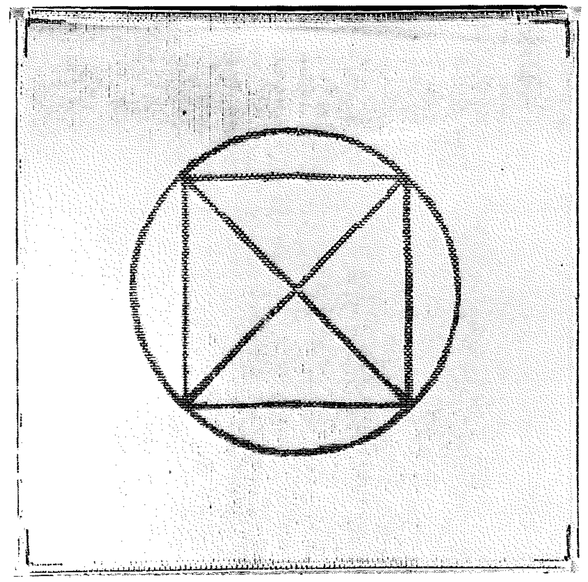

Fig. 4a

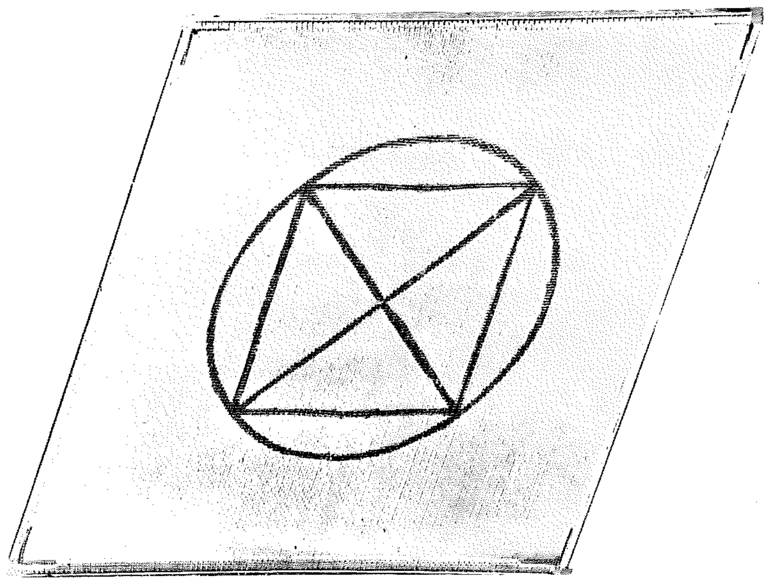

Fig. 4b

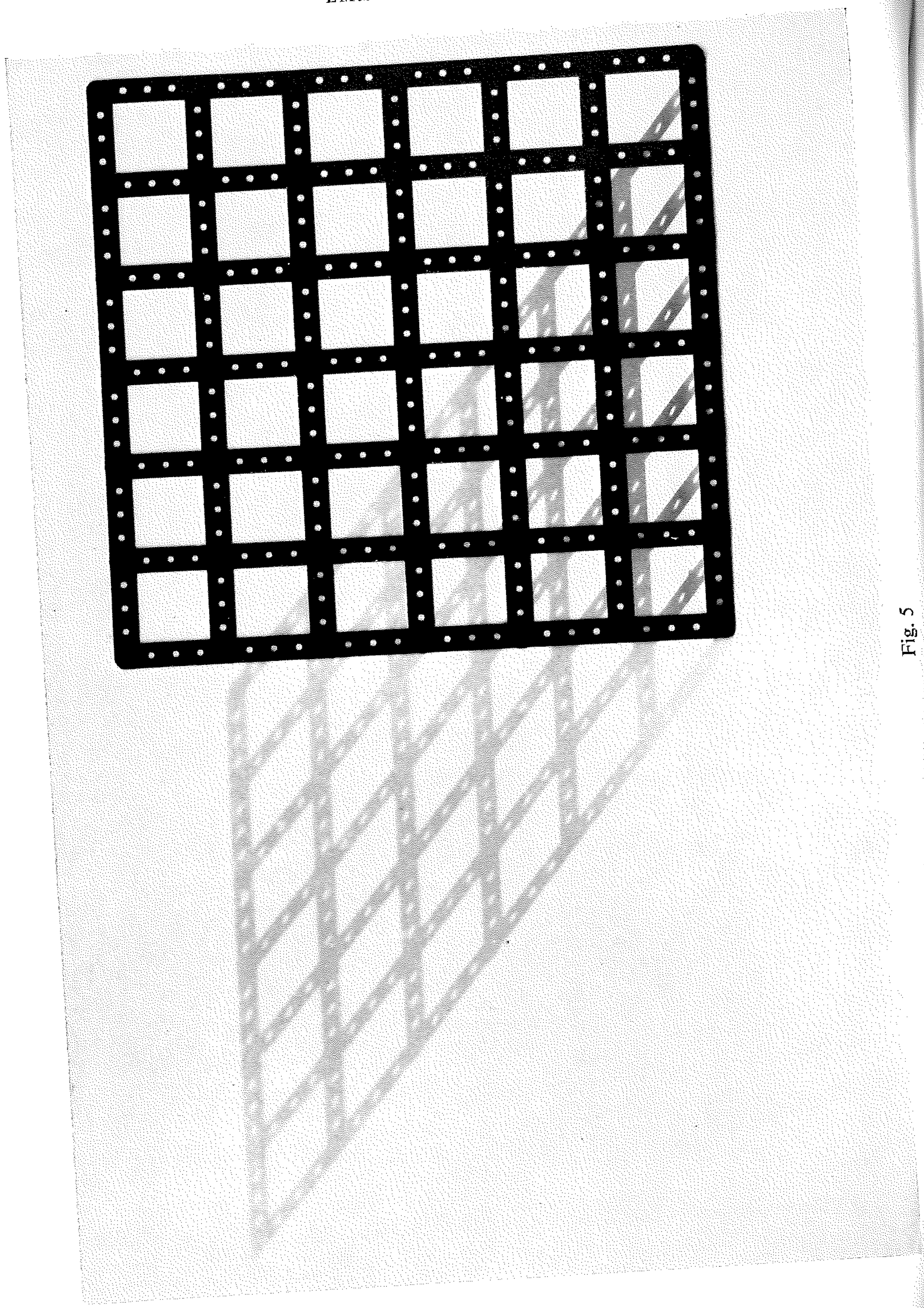

Fig. 5

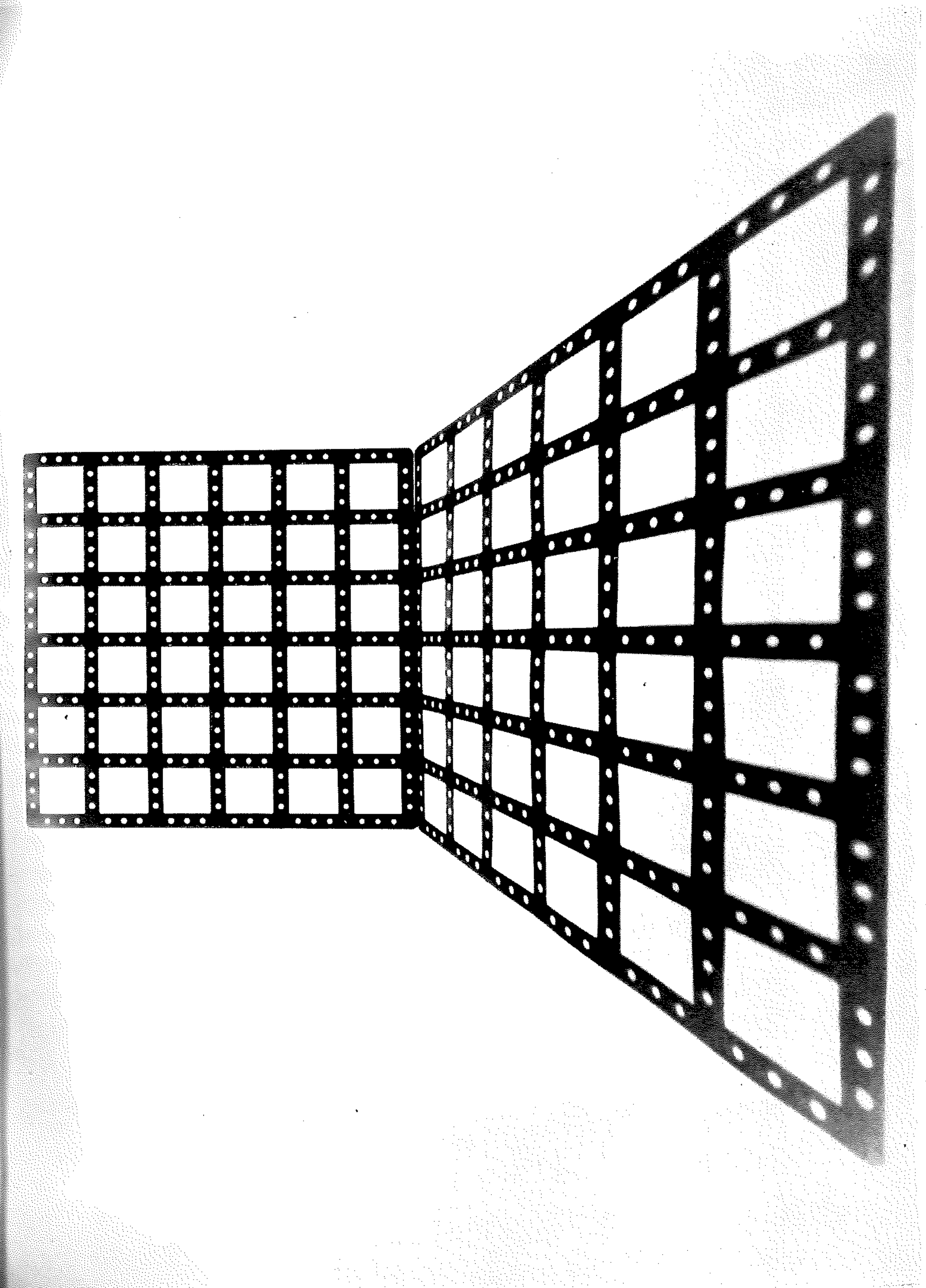

Fig. 6

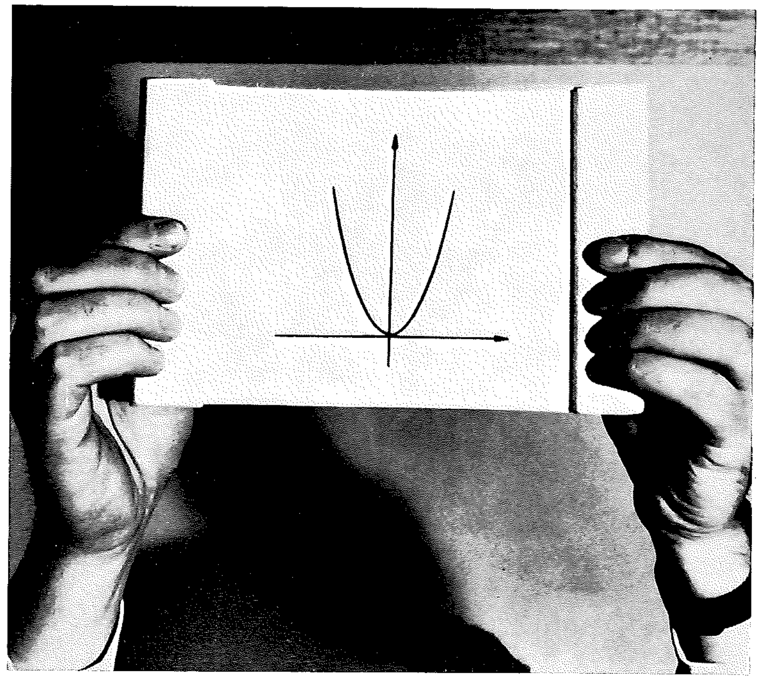

Fig. 7a

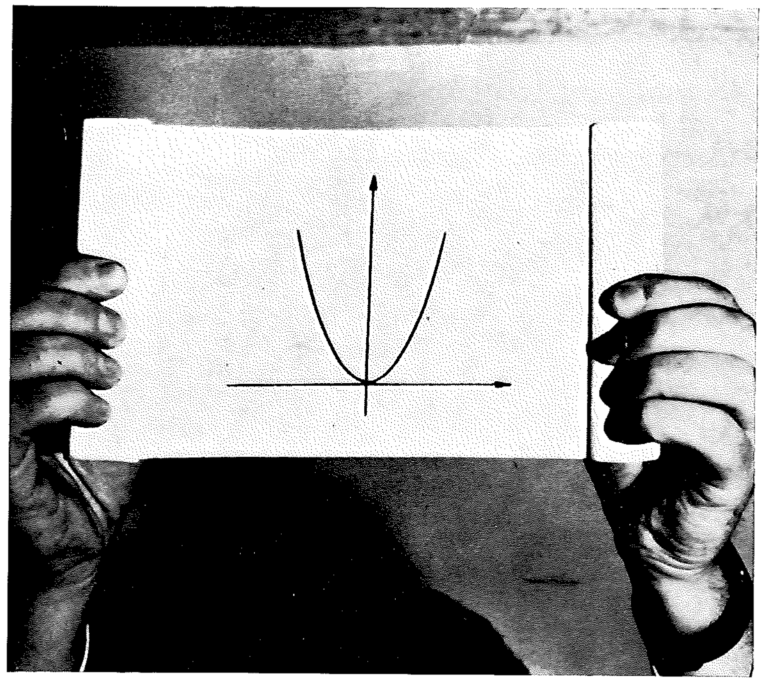

Fig. 7b

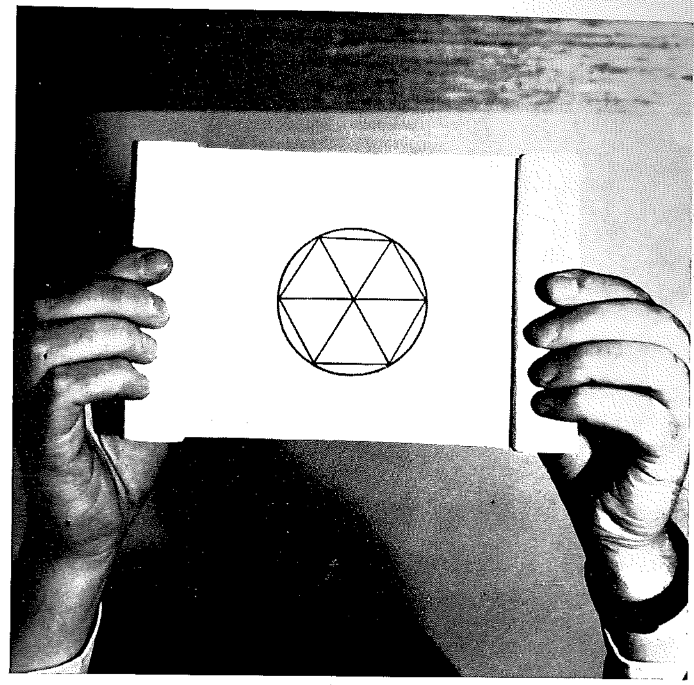

Fig. 8a

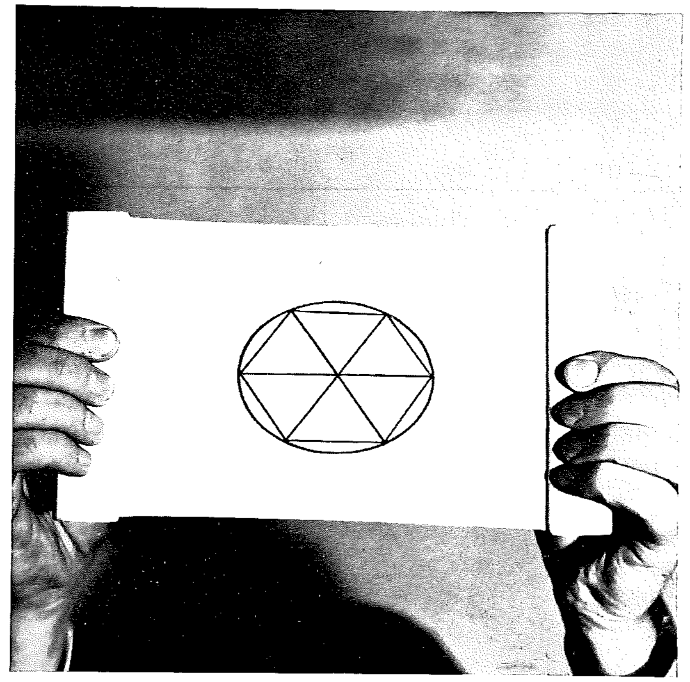

Fig. 8b

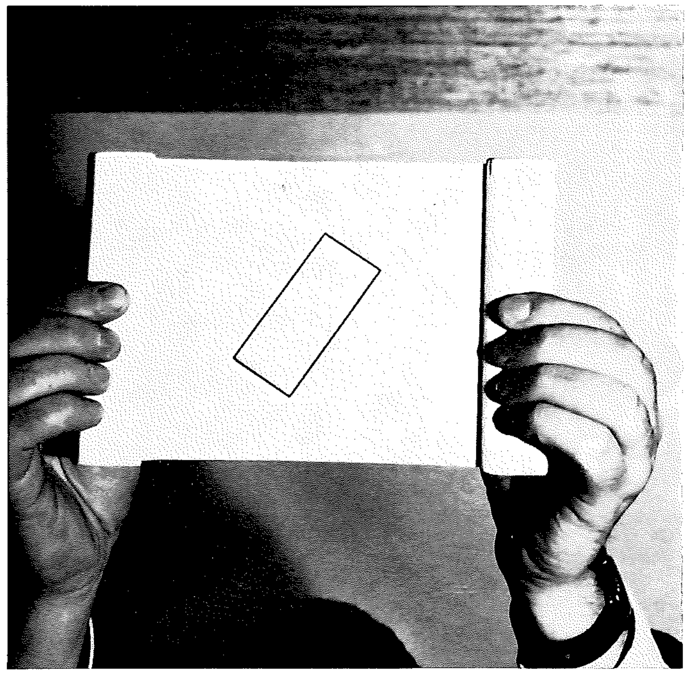

Fig. 9a

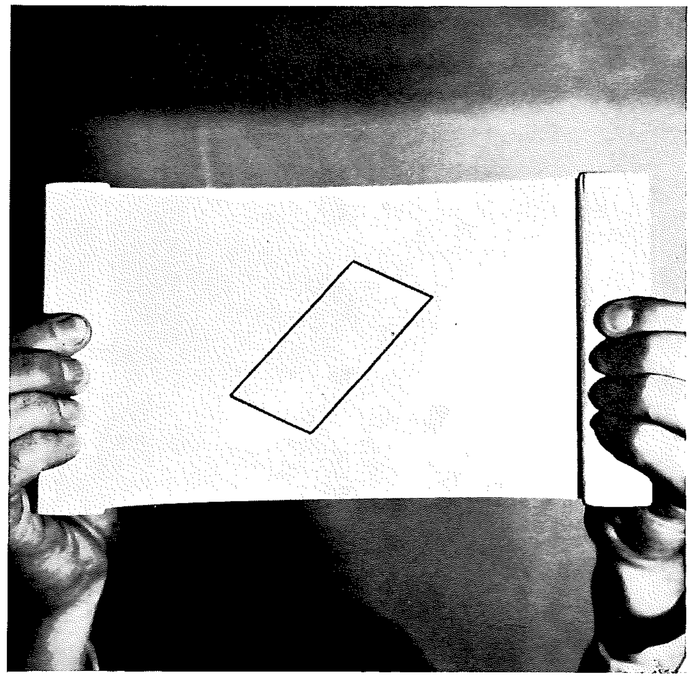

Fig. 9b

s'éloignera, et il arrivera tout seul aux conclusions suivantes: la similitude est un cas particulier de la projectivité: l'égalité est un cas particulier de l'affinité; l'affinité est un cas particulier de la projectivité.

(3) Nous allons enfin 'entrer' dans l'espace affin par des considérations sur les graphiques.

On va reprendre la loi des carrés des nombres dans l'ensemble des nombres réels. Chaque enfant a dessiné sa parabole en choisissant à son gré les unités de mesure. Cela donne bien des paraboles, différentes comme dessin, mais qui correspondent toutes à la même lois $y=x^2$. Deux enfants comparent leur dessin: un élève dit: 'Tiens, ma parabole paraît élargie en la comparant avec la tienne.' Un autre dit: 'C'est comme si une parabole avait été obtenue de l'autre en l'étirant dans une certaine direction.' 'Dis donc' – c'est encore un autre qui parle –, 'c'est comme si la plus étroite avait été dessinée sur caoutchouc et qu'on l'avait ensuite étirée.'

L'idée est acquise: on a dessiné des figures, la parabole, un hexagone régulier, un rectangle, sur toile élastique; on a réalisé un étirement de la toile et les figures se sont transformées (Figures 7, 8, 9). On a 'lu' les propriétés invariantes: ce sont celles de l'affinité. Cette expérience de la toile élastique nous a permis d'aller plus loin dans l'étude des transformations affines. On va la répéter et on va réfléchir: si l'on a dessiné sur la toile un système d'axes orthogonaux de façon que l'axe des x ait la direction de la trame extensible, chaque étirement va changer l'abscisse d'un point $P(x, y)$, tandis que l'ordonnée reste la même. Et, selon la force exercée dans l'étirement, l'abscisse va redoubler, tripler, etc. On arrive d'une façon tout à fait spontanée aux équations d'une affinité particulière

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = y \end{cases}.$$

Ensuite, si l'on imagine étirer la toile dans la direction de l'axe y, en laissant les x invariants, on parvient aux équations

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ny \end{cases}.$$

Finalement, il n'est pas difficile de concevoir les équations plus générales

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny \end{cases}.$$

Ces m et n, facteurs d'agrandissement (ou de réduction), sont intuitifs: les enfants se trouvent en état de 'voir' une équation, c'est-à-dire, ils savent l'interpréter tout de suite dans le concret. Ils 'sentent' p.ex. que si $m=n$, l'agrandissement doit être le même dans toutes les directions: la figure ne change pas de forme: on a donc réalisé une similitude. La similitude est pourtant une affinité particulière.

Il est fort intéressant, et la remarque vient des enfants, de réfléchir sur le fait que la similitude se présente maintenant comme un cas particulier d'affinité, tandis que l'espace éclairé par le soleil ne peut pas nous donner de figures semblables. L'affinité d'une toile élastique est donc plus générale que l'affinité produite par le soleil: cela arrive – et pour être plus clairs, revenons à notre expérience du carré – du fait que, lorsque le carré quadrillé est exposé au soleil, tous les points d'une droite, la droite d'intersection du plan du carré avec l'écran qui recueille l'ombre, sont unis, c'est-à-dire, l'ombre d'un point coïncide avec le point même. Enfin, l'affinité déterminée par le soleil a des équations dans lesquelles l'un des coefficients (m ou n) est égal à 1.

Et voilà comment va continuer l'étude des transformations affines dans la dernière classe du premier cycle: la *troisième*.

L'on considère l'ensemble des affinités du point de vue structural, en comparant cet ensemble avec d'autres ensembles finis et non-finis. Les affinités ont une structure de groupe comme les projectivités, les similitudes, les isométries, les entiers par rapport à l'addition, les rationnels par rapport à la multiplication, les rotations d'un polygone ou d'un polyèdre régulier, etc. Ce 'motif' – la structure de groupe – qui se présente ici et là dans des situations tout à fait différentes, devient peu à peu quelque chose de familier, de concret, surtout si l'on donne des contre-exemples, comme l'ensemble des nombres naturels, l'ensemble des mouvements inverses, etc.

Finalement, le groupe des affinités sera comparé avec d'autres groupes de transformations pour mettre en relief les propriétés de telle ou telle géométrie, et pour donner donc à l'élève qui termine ce premier cycle secondaire, des idées assez claires sur les transformations qu'il rencontre chaque jour dans la réalité qui l'entoure.

Désormais, il peut même dresser tout seul un schéma de classification des géométries que voici:

Groupe des isométries: une figure est transformée dans une figure égale. En particulier, un carré dans un carré de côté égal, un cercle dans un cercle de rayon égal.

Groupe des similitudes: une figure est transformée dans une figure de la même forme. En particulier, un carré dans un carré quelconque, un cercle dans un cercle quelconque.

Groupe des affinités: une figure est transformée dans une figure affine à elle. En particulier, un carré dans un parallélogramme, un cercle dans une ellipse.

Groupe des projectivités: une figure est transformée dans une figure projectivement équivalente à elle. En particulier, un carré dans un quadrilatère quelconque, un cercle dans une conique (ellipse, parabole, hyperbole).