1969

EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS

Reprint

D. REIDEL PUBLISHING COMPANY
DORDRECHT-HOLLAND

Articles for publication and communications concerning editorial matters should be sent to a member of the Editorial Board or to:

PROF. H. FREUDENTHAL
Mathematical Institute
Budapestlaan–De Uithof
Utrecht–The Netherlands

Subscriptions, changes of address, and all business correspondence should be addressed to:

D. REIDEL PUBLISHING COMPANY
P.O. Box 17, Dordrecht-Holland

Subscription price per volume of 4 issues Dfl. 80.– (US $ 22.50)
Single copy rate Dfl. 22.50. One volume is published yearly

EMMA CASTELNUOVO

DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS UTILISANT LA NOTION DE BARYCENTRE

Mon exposé est, tout simplement, le compte rendu d'une expérience que je viens de faire dans mon école à Rome, je dirais mieux que je viens de vivre avec mes élèves de 13–14 ans, tellement le sujet nous a passionnés.

Permettez-moi, tout d'abord, de vous présenter brièvement l'organisation de l'enseignement secondaire en Italie, et de situer mon école et mes élèves. L'enseignement secondaire couvre chez nous huit ans: trois ans pour le premier cycle qui est le même pour tous les enfants (âgés de 11 à 14 ans) et cinq ans pour le second cycle. Je suis professeur dans le premier cycle et j'ai conduit mon expérience pendant trois mois dans les deux classes de troisième année, chacune d'une trentaine d'élèves (garçons et filles) âgés de 13–14 ans. Les enfants appartiennent à tous les milieux sociaux. Je vous dis tout cela car vous vous trouverez dans un moment en plein cours et il est bon que vous sachiez d'où viennent les observations, les discussions, enfin toute cette vivacité.

Encore une précision, avant de commencer: ces enfants ne connaissent presque rien du calcul littéral. Ce manque de culture a été fort significatif car, pour surmonter des difficultés d'ordre algébrique, ils ont été obligés, bien souvent, d'avoir recours à l'intuition géométrique ou physique, et ce 'plongement' dans le concret nous a fait revivre quelquefois les voies de la pensée.

Le titre que j'ai donné à cet exposé est, sans doute, fort sibyllin. Je vais m'expliquer: bien de fois, dans les années précédentes, j'avais remarqué combien la notion de barycentre est formative: l'intuition géométrique dans des sujets de mécanique conduit fort souvent à des erreurs, car il y a le poids, la masse qu'on doit considérer et qu'on néglige lorsqu'on est 'pris' par la vision géométrique. Cette année j'ai voulu pousser l'étude jusqu'au calcul barycentrique de Möbius dans le but de donner une idée des applications modernes de ce calcul. Je dois dire que c'est la lecture d'un fort joli livre de M. Freudenthal, *La mathématique dans la science et dans la vie*, qui m'a suggéré ce sujet: dans un des chapitres M. Freudenthal traite, justement, le calcul barycentrique et son application à la programmation linéaire. Or, il s'agissait de mettre tout cela à la portée des enfants.

J'ai divisé le sujet en deux parties:

(a) le calcul barycentrique;

(b) quelques applications.

Educational Studies in Mathematics 2 (1969) 307–332; © *D. Reidel, Dordrecht-Holland*

A. LE CALCUL BARYCENTRIQUE

1. *La loi d'équilibre du levier*

Je dirai tout d'abord que bien souvent j'ai utilisé la notion de poids au lieu de la notion de masse dans le but de mieux exciter la sensibilité des enfants.

On a pris une petite barre 'sans poids', on l'a pendue en utilisant un petit anneau dans lequel la barre peut glisser (Figure 5) et on a écrit la condition d'équilibre que les enfants avaient déjà rencontrée à propos de la proportionalité inverse:

$$m_1 \cdot b_1 = m_2 \cdot b_2 ,$$

m_1, m_2 désignent les poids appliqués aux extrémités de la barre A_1A_2 (Figure 1) et b_1, b_2 représentent les bras. Le point P autour duquel la barre s'équi-

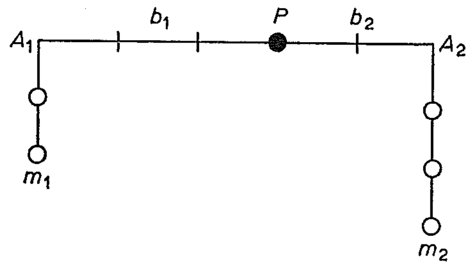

Fig. 1.

libre est le *barycentre* du système. En P est concentré le poids $m = m_1 + m_2$.

On a introduit, d'une façon naturelle, le symbolisme

$$m_1 A + m_2 A = mP ,$$

c'est-à-dire *une masse multipliée par un point* pour indiquer la masse concentrée dans ce point.

Par exemple, le barycentre du système $2A_1$ et $3A_2$ est un point P où est concentré un poids 5; brièvement, on écrit:

$$2A_1 + 3A_2 = 5P .$$

La position de P est vite trouvée: il suffit de partager A_1A_2 en 5 parties égales et d'en prendre 3 à partir de A_1 (et donc 2 à partir de A_2).

Il est évident que l'équilibre n'est pas altéré si l'on double en même temps les deux poids m_1, m_2, ou si l'on les multiplie par un nombre quelconque. Donc, en général, à tout point P d'un segment A_1A_2 on peut faire correspondre une infinité de couples équivalents. Pour fixer un couple on fait la convention de choisir m_1, m_2 de façon que leur somme soit égale à 1:

$$(1) \qquad m_1 + m_2 = 1 .$$

m_1, m_2 avec la condition (1) sont *les coordonnées barycentriques du point P*. Les coordonnées barycentriques d'un point sont donc des poids.

Dans le cas précédent les coordonnées barycentriques de P sont $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$.

Or, tout cela, qui pour un adulte ne pose pas de problèmes, a suscité un tas de questions de la part des élèves. En effet – et il suffit de rappeler les recherches de Jean Piaget à propos de l'équilibre du levier – cette loi marque le passage de la logique de l'enfant à celle de l'adolescent, et concerne donc l'âge des nos élèves. Les enfants, en effet, sont amenés *à substituer à la loi additive (poids plus bras) la loi multiplicative*. Dès qu'ils arrivent à se rendre compte que c'est la loi multiplicative qui donne l'équilibre, ils sentent le besoin de comprendre le pourquoi par des moyens qui ne sont pas seulement expérimentaux: "d'autant plus – remarquent certains – que si l'on voyage vers la lune le poids n'a aucune signification". En regardant encore le levier en équilibre ils sont conduits à remplacer la sensation physique par la vision géométrique: ils 'voient' des rectangles pendus ayant la même surface (Figure 2).

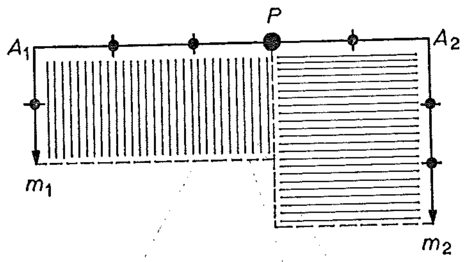

Fig. 2.

2. *Le triangle barycentrique*

On est vite passé de la droite au plan: de la barre à un triangle 'sans poids', réalisé avec un filet à mailles serrées (Figure 6). On a appliqué des poids aux trois sommets et on a suspendu le triangle. On a vu que si les poids sont égaux, par exemple égaux à 1, le barycentre se trouve dans une position particulière qu'on a établi en se basant deux fois sur la loi du levier (Figure 3): si le triangle est ABC on determine le barycentre $2D$ entre $1A$ et $1B$, et puis le barycentre $3P$ entre $2D$ et $1C$.

Les enfants connaissaient déjà la propriété du point d'intersection des médianes: on l'avait obtenue à partir de considérations géométriques sur le *triangle équilatéral*, et on l'avait généralisée à un triangle quelconque en se basant sur les propriétés de l'affinité. Maintenant, en s'appuyant sur la loi du levier, chaque point P du triangle (Figure 4) – et nous prenons un triangle équilatéral, bien que toutes les considérations qu'on va faire soient valables pour un triangle quelconque – reste caractérisé comme barycentre de trois poids convenables m_1, m_2, m_3 appliqués aux sommets. C'est-à-dire que, pour tout triplet m_1, m_2, m_3, il existe un point et un seul (car on peut démontrer que si, pour la determination du barycentre, on suit une autre voie on tombe toujours sur le même point) tel que le triangle suspendu par P est en équilibre.

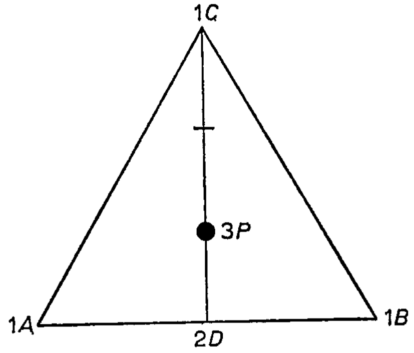

Fig. 3.

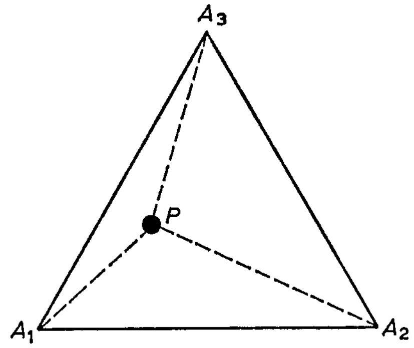

Fig. 4.

Afin d'établir une correspondence bi-univoque entre chaque point du triangle et un triplet m_1, m_2, m_3 on fait la convention:

$$(1) \qquad m_1 + m_2 + m_3 = 1\,.$$

m_1, m_2, m_3 avec la condition (1) sont *les coordonnées barycentriques d'un point P du triangle*. Les coordonnées barycentriques d'un point sont donc des poids. Or, exactement comme cela s'était passé pour la barre-levier, les enfants ne sont pas satisfaits de la seule signification physique. Tous soutiennent que les coordonnées barycentriques doivent être liées aux distances

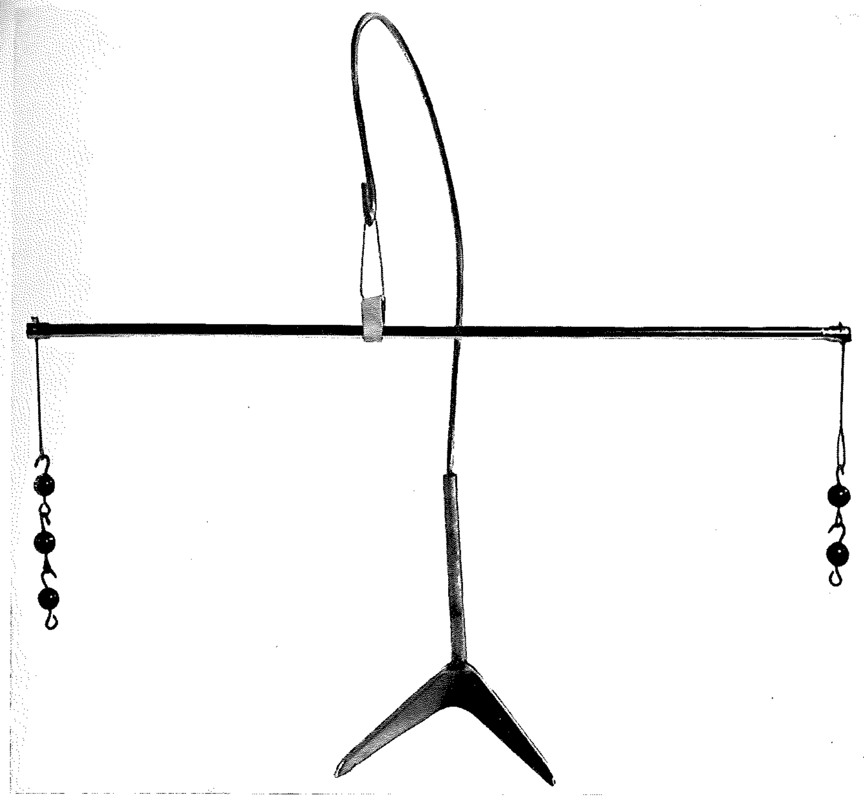

Fig. 5.

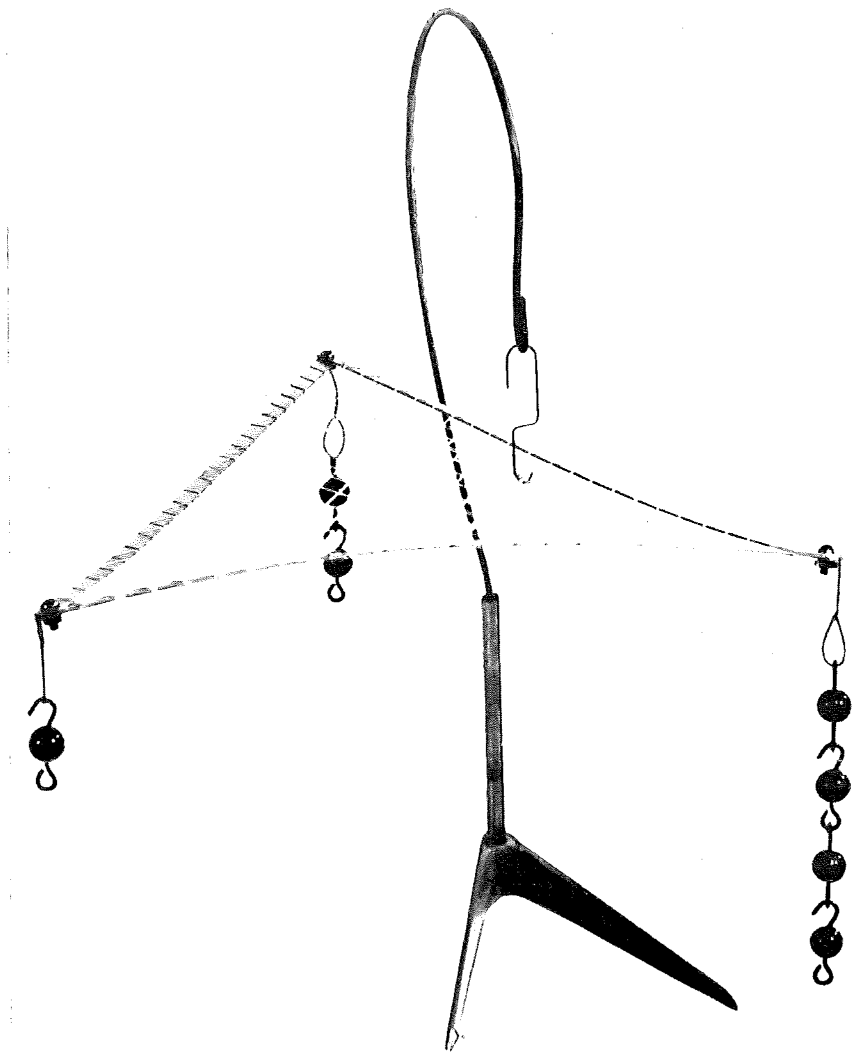

Fig. 6.

PA_1, PA_2, PA_3: "Si le poids m_1 est plus grand, la distance PA_1 est plus petite". L'idée d'une proportionnalité inverse surgit. "Mais non – dit quelqu'un – il n'y a pas un rapport constant car si l'on réduit m_1 à la moitié, tout en gardant égale la somme des trois poids, il n'est pas vrai que la distance PA_1 devienne le double." Alors on pense au levier, mais, en raisonnant mal par analogie, on tombe encore une fois dans l'erreur. Une fillette dit: "Je vois trois rectangles pendus qui ont pour base la distance de P à chaque sommet et pour hauteur les poids 'stylisés' en vecteurs". On donne des valeurs aux poids, on applique le théorème de Pythagore pour déterminer les longueurs PA_1, PA_2, PA_3, mais, hélas! ... les surfaces qui en résultent ne sont pas égales.

Pendant ces discussions auxquelles tout le monde participait avec – dirais-je – 'éxubérance', un garçon avait fait le dessin de la Figure 7. Ce dessin suggère deux solutions. L'un dit: "Voilà, nous sommes dans l'espace; il ne

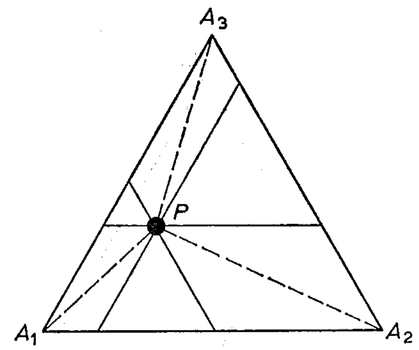

Fig. 7.

peut pas s'agir de surfaces égales mais de volumes". Et il vérifie par le dessin de la Figure 8 que les volumes des trois *parallélépipèdes* ayant pour bases les parallélogrammes de diagonales PA_1, PA_2, PA_3, et pour hauteurs les vecteurs représentant des poids appliqués respectivement à A_1, A_2, A_3 sont égaux.

Le même dessin suggère à d'autres camarades une interprétation physique (Figure 9): "C'est comme si le point A_1 était tiré par une corde en direction A_2 avec une force égale à 1, et par une corde ayant la direction A_3 avec une force égale à 2". On a donc été conduit à étudier la composition des forces, des vecteurs. Un élève a réalisé le dispositif que vous voyez dans la Figure 13; il s'agit de ceci: trois fils liés par un nœud portent à l'extrémité des poids. En superposant cet arrangement à un triangle rigide tenu horizontalement, de sorte que les fils descendent des trois sommets, on observe que le nœud

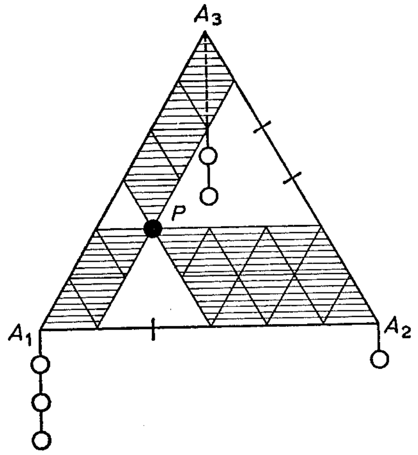

Fig. 8.

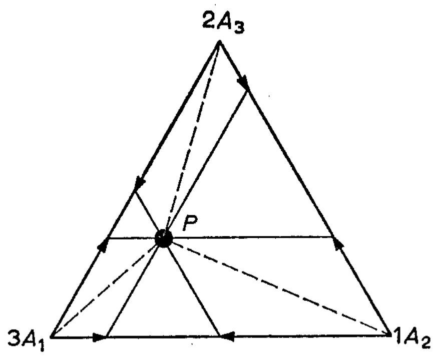

Fig. 9.

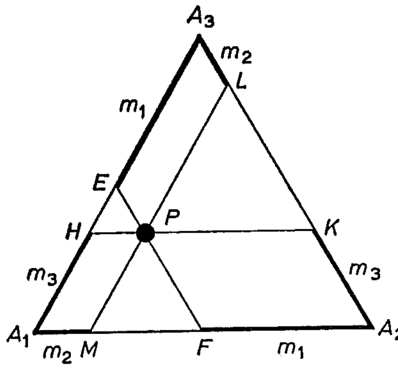

Fig. 10.

se deplace ici et là selon les poids appliqués. En particulier, il prend la position du centre du triangle si les trois poids sont égaux. Ce dispositif montre la *composition des forces* et, en même temps, caractérise chaque point du triangle comme barycentre de poids convenables.

C'est toujours le même dessin qui a suggéré une autre observation. Un élève a mis en évidence que les segments (Figure 10) A_3E, A_2F, A_1M, A_3L, A_1H, A_2K indiquent graphiquement la valeur des poids m_1, m_2, m_3. Voilà l'interprétation classique de la signification géométrique des coordonnées barycentriques.

3. *L'équation d'une droite*

La signification géométrique des coordonnées barycentriques conduit tout naturellement à donner un 'nom', c'est-à-dire une équation aux droites parallèles aux côtés du triangle: par exemple (Figure 11) la droite qui 'dé-

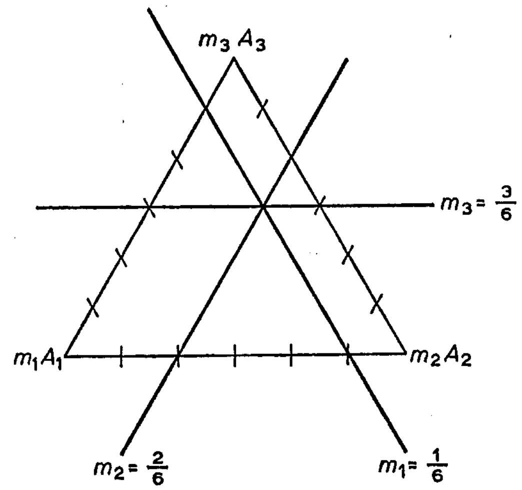

Fig. 11.

tache' un segment $m_1 = \frac{1}{6}$ à partir du côté opposé à A_1 aura l'équation $m_1 = \frac{1}{6}$; celle qui détache un segment $m_2 = \frac{2}{6}$ à partir du côté opposé à A_2 aura l'équation $m_2 = \frac{2}{6}$; et l'autre aura l'équation $m_3 = \frac{3}{6}$. On comprend donc que les droites parallèles à A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 ont respectivement pour équation

$$m_1 = k, \quad m_2 = k, \quad m_3 = k.$$

On pourrait aussi trouver l'équation de ces droites en exprimant la condition d'équilibre d'un triangle matériel qui 'se balance' sur un axe, comme s'il s'agissait d'une lame de couteau. Dans la Figure 14 vous voyez un triangle en bois qui est en équilibre sur une planchette très mince. Voilà le raisonnement qui vient tout spontanément: si le triangle doit être en équilibre sur une droite, par exemple sur la droite r de la Figure 12, une partie m_1' du

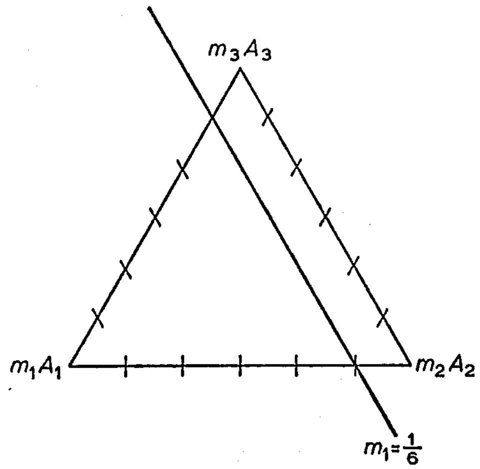

Fig. 12.

poids m_1 doit équilibrer le poids m_2, tandis que l'autre partie m_1'' doit équilibrer le poids m_3. C'est comme s'il y avait deux leviers A_1A_2 et A_1A_3. Les conditions d'équilibre

$$m_1' \cdot 5 = m_2 \cdot 1$$
$$m_1'' \cdot 5 = m_3 \cdot 1$$

donnent, par addition, l'équation de la droite r

$$(1) \qquad 5m_1 = m_2 + m_3 .$$

De cette équation, qui a un aspect plus significatif du point de vue physique, on peut passer à la forme

$$m_1 = \tfrac{1}{6},$$

qu'on avait trouvé tout à l'heure, en se rappelant que $m_1 + m_2 + m_3 = 1$.

C'est toujours la même méthode, voir la division d'un poids en deux, qui nous a conduit à écrire l'équation d'une droite quelconque. Par exemple, pour trouver l'équation de la droite s dessinée dans la Figure 15 on a par-

Fig. 13.

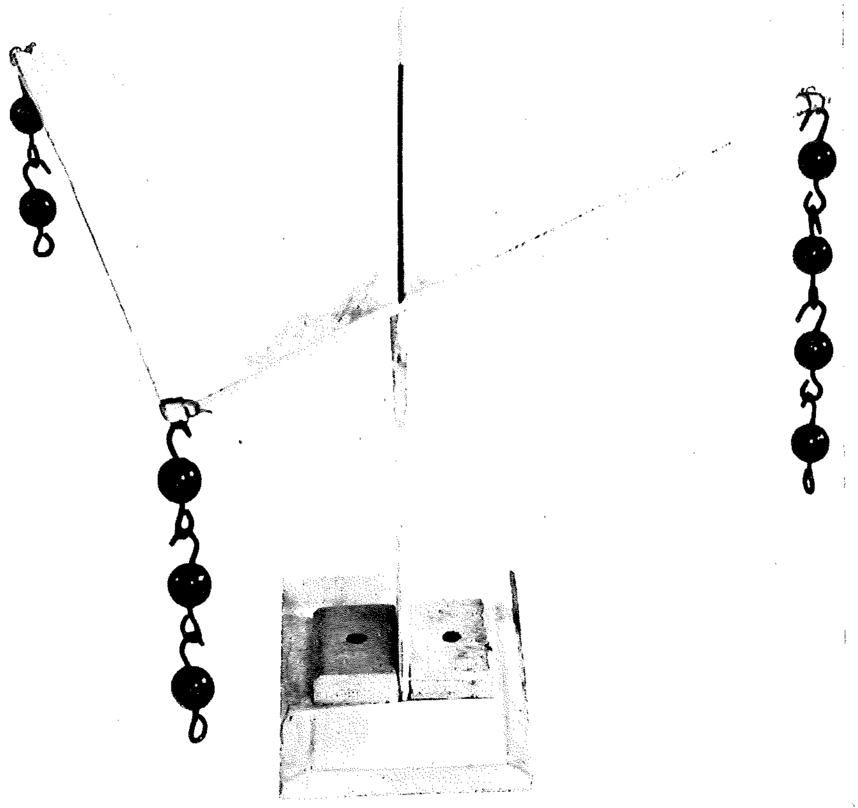

Fig. 14.

tagé le poids m_3 en deux parties, l'une m_3' équilibrant le poids m_1, et l'autre m_3'' équilibrant le poids m_2. En additionnant les deux conditions d'équilibre on trouve l'équation

$$6m_3 = 9m_1 + 2m_2\,.$$

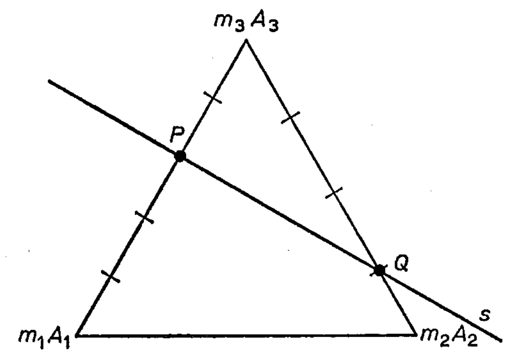

Fig. 15.

Il faut remarquer que pour établir l'équation d'une droite on pouvait aussi se baser sur la notion de *moment axial*, en 'se libérant' ensuite de cette notion métrique par des considérations sur la similitude des triangles, considérations qui permettent de remplacer les distances des trois sommets de la droite considérée par les segments determinés par cette droite sur les côtés. De cette façon, au lieu de partager un poids, on est conduit à 'altérer' les bras: dans l'exemple précédent on reduit les bras A_3P et A_3Q de m_3 au même nombre de parties: 6 (Figure 16). Les bras de m_1 et m_2 deviendront évidemment composés de 9 et 2 parties. On peut alors écrire tout de suite la condition

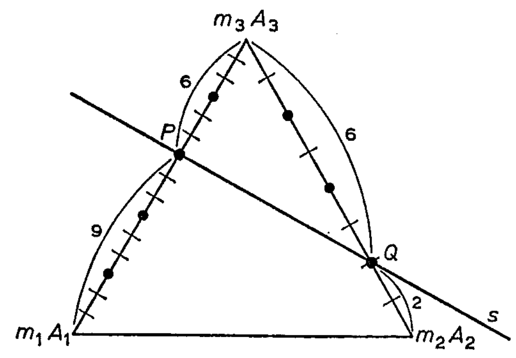

Fig. 16.

d'équilibre qui est l'équation de notre droite s:

$$m_3 \cdot 6 = m_1 \cdot 9 + m_2 \cdot 2 .$$

4. *Droites parallèles*

On avait remarqué avec les enfants à propos des droites parallèles aux côtés que la forme non homogène de l'équation indique si deux droites sont parallèles: par exemple les droites $m_3 = \frac{1}{4}$ et $m_3 = \frac{3}{4}$ sont parallèles; l'équation diffère seulement par le terme connu. La même chose arrive pour une droite quelconque. Par exemple la droite d'équation

$$6m_3 = 9m_1 + 2m_2$$

peut s'écrire, par élimination de m_3 (étant donné que $m_1 + m_2 + m_3 = 1$), comme ceci:

$$15m_1 + 8m_2 = 6 .$$

Le terme '6' a une signification géométrique: il distingue les droites d'un faisceau de droites parallèles. On peut, de cette façon, écrire l'équation de la parallèle à cette droite passant par n'importe quel point: par exemple, les parallèles passant par A_1, A_2, A_3 (Figure 17) auront pour équations

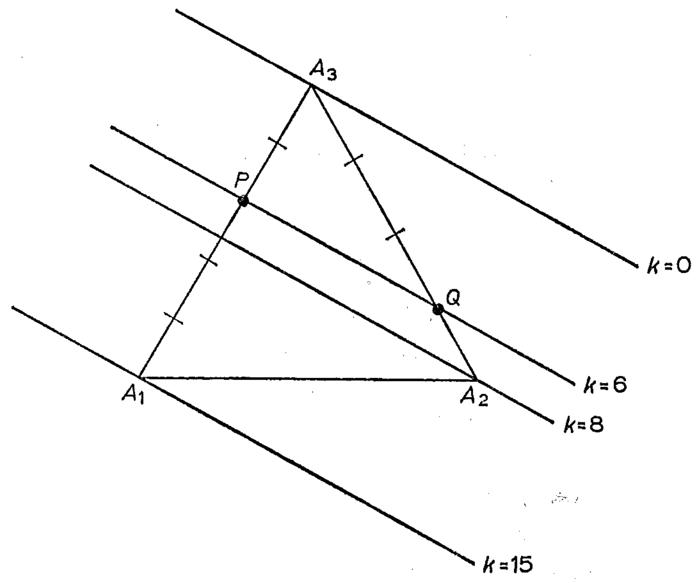

Fig. 17.

respectives:

$$15m_1 + 8m_2 = 15$$
$$15m_1 + 8m_2 = 8$$
$$15m_1 + 8m_2 = 0 .$$

De manière générale, l'équation d'une droite parallèle à la droite issue de A_3 et d'équation:

$$am_1 + bm_2 = 0$$

est la suivante:

$$am_1 + bm_2 = k .$$

5. *Inéquations et demi-plans*

Pendant notre travail sur les droites on avait trouvé qu'une droite passant par un sommet du triangle a une équation bien simple. Par exemple, la

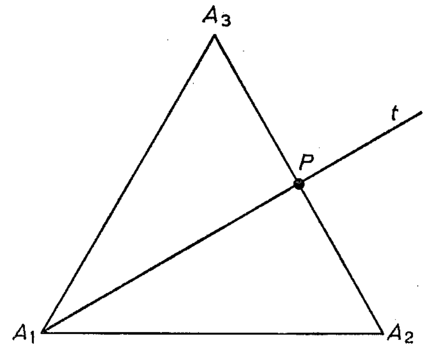

Fig. 18.

droite t (Figure 18) passant par A_1 et le milieu P de A_2A_3 a l'équation

$$m_2 = m_3 ,$$

car c'est justement là la condition d'équilibre du triangle sur 'la lame de couteau' t.

Il est évident que si l'on a l'inéquation

$$m_2 > m_3$$

le triangle penche du côté de A_2.

L'inéquation

$$m_2 < m_3$$

caractérisera le demi-plan contenant A_3.

Ces considérations d'ordre physique sont valables évidemment aussi pour une droite quelconque. Par exemple, la droite v (Figure 19) d'équation

$$2m_1 = 3m_2 + 5m_3$$

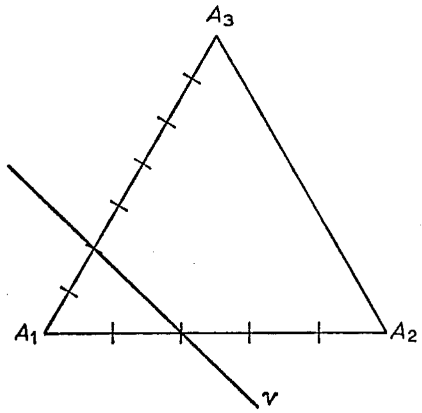

Fig. 19.

partage le plan en deux demi-plans à chacun desquels correspond une inéquation, et précisement: l'inéquation

$$2m_1 > 3m_2 + 5m_3$$

caractérise le demi-plan contenant A_1 car le triangle, si cette inéquation est valable, penche *du côté* de A_1; tandis que

$$2m_1 < 3m_2 + 5m_3$$

caractérise le demi-plan contenant A_2 et A_3.

B. QUELQUES APPLICATIONS

La première partie de mon expérience à l'école a pris plus de temps que je n'avais pensé à cause des questions si variées qui se présentaient à tout moment à l'esprit des enfants: la signification physique et la signification géométrique se superposaient quelquefois, d'autres fois semblaient être en contradiction, d'autres fois encore se clarifiaient l'une par l'autre, mais dans tous les cas faisaient ressortir les différentes sensibilités et aptitudes des élèves.

La seconde partie a été consacrée aux applications: probabilité; programmation linéaire; colorimétrie. Elle a passionné les enfants comme je ne l'avais encore jamais vu, et si la fin officielle des cours n'y avait mis un terme, je serais encore en train de l'étudier avec mes élèves!

1. *Probabilité*

J'ai commencé par donner quelques exemples de probabilité (la probabilité pour que, en jetant un dé, il présente telle ou telle face; que la somme des nombres qu'on obtient en jetant deux dés soit égale à une certaine valeur; ...) dans le but d'amener les enfants à concevoir la probabilité comme rapport entre le nombre des cas favorables et le nombre des cas possibles. Ensuite, par quelques exemples, je suis passée à la notion de probabilité statistique.

Tout ceci assez brièvement: je n'avais pas le temps et je voulais arriver à résoudre quelques questions à l'aide du calcul barycentrique.

J'ai posé le problème: on a une baguette d'un matériel fragile; on sait que lorsqu'elle tombe, elle se casse toujours en trois morceaux, et que tout point est 'équi-cassable'. Les trois pièces peuvent donc être d'une longueur quelconque. On demande: quelle est la probabilité avec ces trois pièces de pouvoir construire un triangle? Les enfants, tout en connaissant l'inégalité triangulaire, répondent d'un ton assuré: "Oh, c'est très probable!" Mais, comment calculer cette probabilité? L'idée de faire appel au calcul barycentrique vient tout de suite dès que je dis: les trois pièces, on ne les connaît pas, elles seront plus ou moins longues; indiquons-les par m_1, m_2, m_3 (Figure 20). On a observé: "On pourrait dire que m_1, m_2, m_3 représentent aussi les poids si la baguette est homogène, et alors on peut les mettre aux sommets d'un triangle barycentrique!"

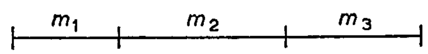

Fig. 20.

C'est tout ce que j'ai obtenu de la part des élèves. J'espérais la suite; mais plus tard, je me suis rendue compte qu'il s'agissait d'une énorme abstraction. C'est donc moi qui ai continué le discours en disant que, par conséquent, à chaque point de notre triangle barycentrique venait correspondre une certaine subdivision de la baguette. Un point signifiait donc une subdivision, c'est-à-dire un événement. J'ai eu pour quelques instants l'impression d'avoir 'franchi' le seuil des possibilités d'abstraction des enfants: quelques instants, en effet, d'un silence absolu. Puis, un garçon a dit: "Alors le centre du triangle va représenter la division de la baguette en trois parties égales". Tout d'un coup la classe a saisi: il y en a qui se sont précipités au tableau noir comme si, en marquant à la craie quelques points du triangle, ils pouvaient confirmer à eux-mêmes cette chose extraordinaire: un point représentait telle ou telle situation.

A ce moment-là je n'ai eu qu'à rappeler notre problème: nous ne nous intéressons pas, dis-je, qu'aux points qui représentent une subdivision qui permette de construire un triangle. Ce sont les élèves qui les découvrent: il s'agira de trois longueurs m_1, m_2, m_3 telles que (il suffit de regarder la baguette)

$$m_1 \leqslant \tfrac{1}{2}, \quad m_2 \leqslant \tfrac{1}{2}, \quad m_3 \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Or, chaque inéquation caractérise un demi-plan sur notre modèle (Figure 21).

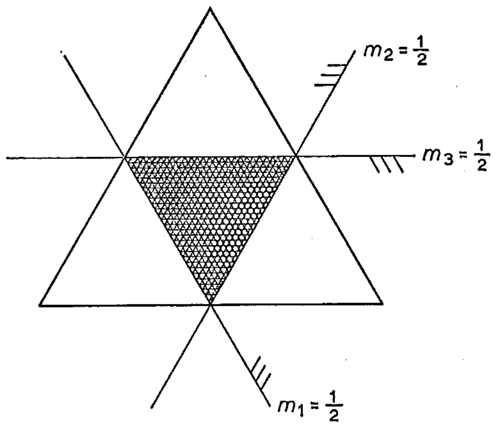

Fig. 21.

Et le modèle parle tout seul: les cas favorables sont renfermés dans un triangle qui est $\frac{1}{4}$ de tout le triangle, c'est-à-dire de tous les cas possibles. Interprétant les rapports d'aire comme des probabilités on peut dire que la probabilité d'obtenir un triangle est seulement égale à $\frac{1}{4}$.

On a suivi ici le genre de démonstration synthétique utilisée par le probabiliste Bruno de Finetti à propos de distributions au hasard; cela signifie, dans le modèle, qu'il y a une densité de probabilité uniforme dans tout le triangle barycentrique. La probabilité est, dans ce cas, la mesure (ici la surface) de l'ensemble des points satisfaisant aux conditions fixées.

Il est inutile de vous dire combien les enfants ont été impressionnés d'avoir résolu par des moyens si élémentaires un problème qui apparaissait fort mystérieux. J'ai entendu un élève qui disait: "J'ai compris, c'est ça la mathématique: c'est d'imaginer!"

J'ai cherché à donner des exemples dans le but de mettre en relief la portée

de cette méthode pour la détermination de la probabilité dans le cas d'une distribution au hasard: on peut trouver des exemples en physique comme la prévision des désintégrations d'une particule en trois particules d'énergies différentes selon la direction des forces qui la bombardent (phénomène connu comme Dalitz Plot).

2. *Programmation linéaire*

L'application qui a frappé davantage les enfants a été l'application relative à la programmation linéaire. Le terme 'programmation' n'était pas nouveau pour les élèves: en effet à la télévision et à la radio on parle bien souvent de programmer le plan de telle ou telle industrie ou entreprise, mais ils n'avaient pas du tout d'idées sur ce travail.

Nous avons considéré une fabrication particulière, celle du chocolat. J'ai pris cet exemple dans l'article de M. Freudenthal. La fabrication du chocolat intéresse particulièrement les enfants.

Les composants fondamentaux du chocolat sont: cacao, sucre et lait. Ces composants entrent dans des quantités différentes m_1, m_2, m_3 selon la qualité du chocolat. Ce sont les élèves qui, maintenant, poursuivent le discours. Ils représentent les trois composants comme sommets C, S, L d'un triangle (Figure 22) et donnent, eux-mêmes, l'interprétation: à chaque point du triangle correspond un mélange de cacao, sucre et lait; les chocolats plus

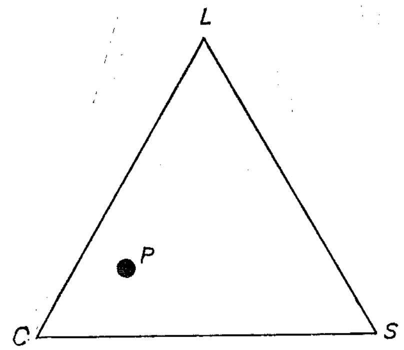

Fig. 22.

amers se trouvent vers le sommet C, les plus sucrés vers S et les chocolats 'plus au lait' se trouvent vers le sommet L. Quand-même – dis-je – il faut faire attention: il est vrai qu'à tout point du triangle correspond un certain mélange, mais certains mélanges sont trop liquides ou trop sucrés ou, encore, ne correspondent pas à la demande du marché. Bref, il y a des conditions auxquelles doivent satisfaire les quantités m_1, m_2, m_3.

Soient, par exemple, les conditions suivantes:

$$(1)\qquad \begin{cases} m_3 \leqslant \frac{1}{2} \\ m_2 \leqslant 3m_1 \\ m_2 \leqslant 3m_3 \\ m_1 \leqslant m_3 + 3m_2\,. \end{cases}$$

Chaque inéquation caractérise un demi-plan, et il est facile pour les enfants de déterminer la zone définie par ces inéquations (Figure 23). Le diagramme nous dit qu'il y a un cas, représenté par le point R, dans lequel interviennent seulement deux composants: cacao et lait; c'est le chocolat pour les diabétiques!

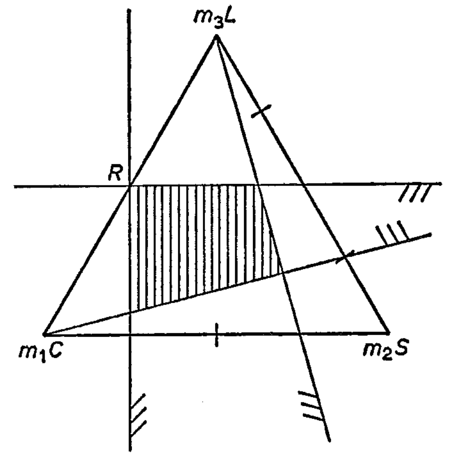

Fig. 23.

C'est maintenant que commence la partie la plus intéressante: celle qui concerne le prix des différents genres de chocolat. Si l'on suppose que les prix unitaires p_1, p_2, p_3 du cacao, sucre et lait soient dans le rapport

$$p_1 : p_2 : p_3 = 4 : 2 : 1\,,$$

le prix total de la matière première pour un chocolat contenant des quantités m_1, m_2, m_3 de cacao, sucre et lait sera:

$$(2)\qquad p = 4m_1 + 2m_2 + 1m_3\,.$$

La (2) est l'équation des prix de notre mélange: à tout triplet (m_1, m_2, m_3), c'est-à-dire à tout point du triangle, la (2) fait correspondre un prix. Ce prix

doit être considéré dans la zone où l'on peut fabriquer le chocolat. Or, la (2) est une droite et nous savons que lorsque le terme connu p change, la droite se déplace parallèlement à elle-même. Pour avoir la direction de cette droite il suffira de donner à p une valeur quelconque, par exemple la valeur zéro, bien que cela n'ait aucun sens dans un problème de prix. La droite d'équation

$$4m_1 + 2m_2 + 1m_3 = 0$$

est, évidemment, 'hors' du triangle. Pour la dessiner il suffit de trouver les points d'intersection avec deux côtés, par exemple CS et SL. On a:

$$2m_1 = -\,1m_2 \quad \text{et} \quad 2m_2 = -\,1m_3\,.$$

Ces valeurs négatives n'étonnent pas les élèves car on avait déjà rencontré ce cas à propos du levier. Ils sont donc à même de dessiner la droite des prix dans le cas $p = 0$ (Figure 24).

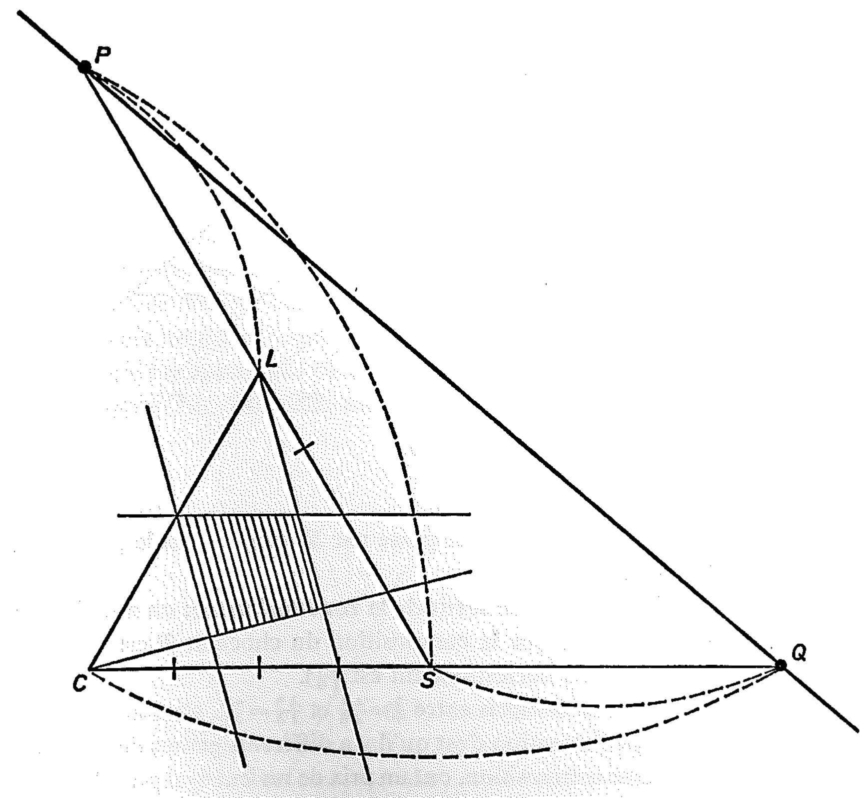

Fig. 24.

En faisant déplacer la droite parallèlement à elle-même on se rend compte graphiquement du prix de chaque sorte de chocolat (Figure 25). Lorsque la droite passe par L le prix est évidemment 1 car c'est le prix du lait. Puis, la droite traverse le triangle et à un moment donné arrive à la zone de production: nous sommes en A. "Quel est le prix du chocolat A?" demandent les enfants. Il faut connaître premièrement la composition du chocolat A (on trouve $m_1=\frac{1}{8}$, $m_2=\frac{3}{8}$, $m_3=\frac{4}{8}$), et ensuite il est facile d'établir le prix (on trouve $p=\frac{7}{4}$; il s'agit du prix minimum.

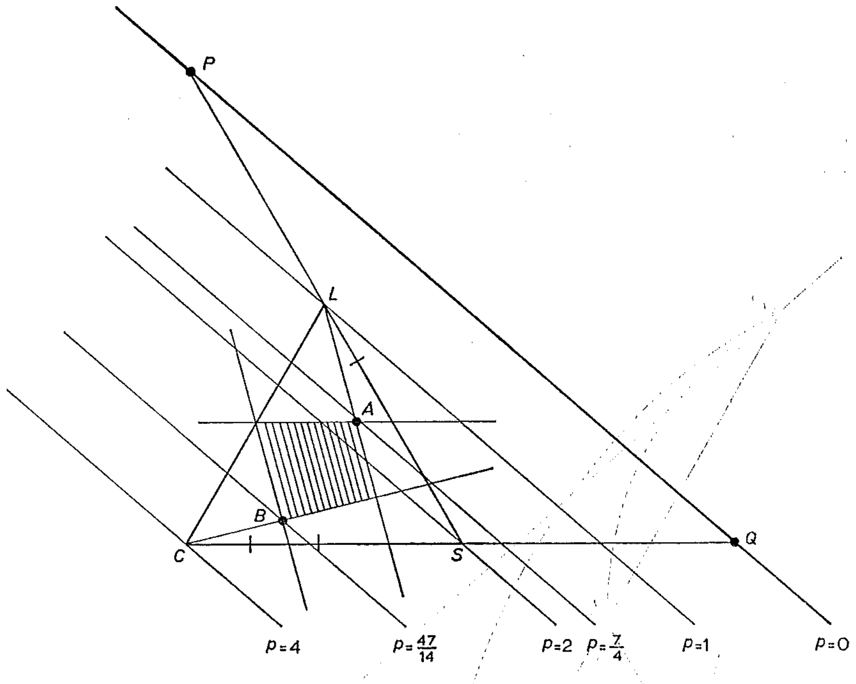

Fig. 25.

La droite continue à se déplacer et passe par S: dans ce cas le prix est 2, comme pour le sucre.

On arrive au point B, avant de sortir de la zone intéressée: on a ici le prix maximum (on peut vérifier que la composition du chocolat B est $m_1=\frac{10}{14}$, $m_2=\frac{3}{14}$, $m_3=\frac{1}{14}$, et le prix correspondant est $\frac{47}{14}$).

Tous les prix sont donc compris entre $\frac{7}{4}=\frac{49}{28}$ et $\frac{47}{14}=\frac{94}{28}$, c'est-à-dire entre 49 et 94. Ce qui frappe l'attention c'est qu'il y a différents genres de chocolat qui, sans avoir la même composition, ont un prix de revient égal pour le fabricant: ils correspondent à des points qui se trouvent sur la même droite de prix.

On a considéré bien d'autres problèmes de programmation: de la fabrication de produits zootechniques aux problèmes de transport, de la production des engrais à celle des alliages ternaires .... Un jour, j'entre en classe et on me dit tout de suite: "Avez-vous entendu le télé-journal hier soir? On a dit qu'a la Chambre des Députés, ils sont en train de mettre au point un plan régional; on a dit qu'il s'agit d'un problème de programmation linéaire avec trois paramètres: la surface de la région, le nombre des habitants et le revenu régional. Pourquoi ne pas leur proposer de nous faire faire ce travail?" Je vous dis tout cela car j'ai eu l'impression de développer une mathématique sociale: le cours de mathématiques avait fait prendre conscience du pays, des ses problèmes plus graves et, donc, plus intéressants.

3. *La colorimétrie*

J'ai voulu terminer en beauté, par un sujet esthétique: la couleur. Un sujet qui apparaît aux enfants comme très loin de la mathématique. Ils ont été fort frappés en apprenant que trois couleurs 'indépendantes' sont suffisantes pour produire n'importe quelle couleur, et que la composition des couleurs a été mathématisée il y a un siècle par H. Grassmann. Cette théorie vient d'être précisée récemment, mais il y a encore bien de choses obscures du point de vue physiologique. Nous avons dit 'trois couleurs indépendantes', mais si nous voulons obtenir toutes (ou presque toutes) les nuances de couleur par synthèse additive il vaut mieux prendre comme système de référence le rouge, le vert et le bleu, définis par certaines longueurs d'onde de façon que le mélange des trois unités de chaque couleur donne le blanc (c'est la Convention International de 1931).

Le fait que chaque couleur peut s'obtenir par synthèse additive à partir de ces trois couleurs fondamentales suggère tout naturellement le modèle du triangle barycentrique où les sommets représentent le rouge, le vert et le bleu (Figure 26). Les différentes quantités m_1, m_2, m_3 avec lesquelles ces

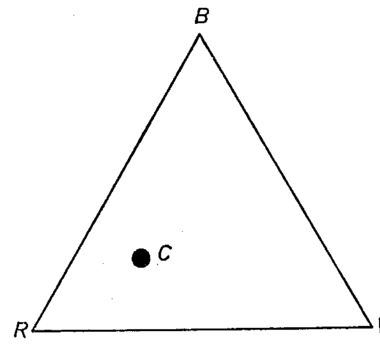

Fig. 26.

couleurs interviennent dans un mélange caractérisent la couleur composée C comme ceci:

$$C = m_1 R + m_2 V + m_3 B .$$

Si $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}$ on a le blanc, car on a justement choisi les longueurs d'ondes de façon que le mélange des trois quantités égales soit le blanc. Le blanc se trouve donc dans le centre O du triangle (Figure 27). Les points qui se trouvent sur les côtés sont les mélanges de deux couleurs: par exemple le milieu du côté RV est le jaune (un certain jaune); le milieu de BV est le bleu-paon; le milieu de RB est le cramoisi. Il est fort intéressant de remarquer que

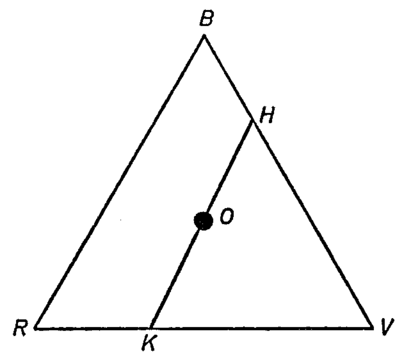

Fig. 27.

le complémentaire d'une couleur représentée par un point H d'un côté est le point K intersection de la droite HO avec un autre côté du triangle; autrement dit: tout segment passant par le centre de figure O relie des couleurs complémentaires représentées par deux points du contour. On constate ainsi, en particulier, que le jaune est complémentaire du bleu; le cramoisi du vert; ....

On a rendu cette théorie encore plus vivante en réalisant l'expérience grâce à trois lampes illuminant des verres respectivement rouge, vert et bleu.

Le problème des couleurs donne lieu à des questions qui sortent de la physique pour atteindre la physiologie de l'œil, et – comme on l'a dit – c'est justement ici que bien des questions sont loin d'être résolues. Par exemple, on est arrivé à établir que des distributions différentes de lumières, c'est-à-dire des triplets différents m_1, m_2, m_3, peuvent donner la même sensation de couleur. Ces triplets se trouveraient sur des lignes. On a donc un phénomène analogue à celui qu'on a rencontré dans la programmation linéaire: dans la programmation il y a différents mélanges alignés sur des droites qui correspondent au même prix; ici il y auraient des lignes 'iso-couleur'.

C'est ainsi que j'ai terminé notre 'promenade' dans le monde des couleurs: en faisant toucher, d'une part, des problèmes qui sont encore loin d'être résolus, et en mettant en relief, d'autre part, la grande importance qu'a aujourd'hui la synthèse additive pour ce qui concerne la télévision en couleurs.

Il est temps, maintenant, de mettre fin aussi à cet exposé. Je vous invite à réfléchir sur les réactions des enfants.

Après le premier moment d'étonnement, les enfants se sont très vite faits à l'idée de donner aux points les interprétations les plus variées: un point est un mélange, un événement, une couleur. Ils se sont habitués à concevoir le point précédé d'un coefficient comme un tout unique: c'était le point-masse, et le coefficient pouvait signifier un poids, une longueur, une quantité quelconque. Les lignes représentaient quelques fois des produits de prix égal, d'autres fois la même sensation de couleur. Les demi-plans indiquaient des zones de production ou l'ensemble des événements favorables, ou les couleurs d'une certaine tonalité.

Ils se sont habitués à additionner les points-masse, à les multiplier par un nombre, à les diviser en parties, ...; et, ici et là, ils ont eu l'impression (mais il ne s'agissait pas seulement d'une impression) que ces points doués d'un coefficient 'tiraient' comme s'ils étaient des forces: ils étaient comme des vecteurs et il se conduisaient comme des vecteurs. Le plan où l'on travaillait, était donc muni de vecteurs; ce plan se colorait tantôt d'une signification physique comme le poids, si on était dans un champ gravitationnel, tantôt retenait seulement la signification géométrique; d'autres fois il acquérait une valeur économique (la production et le prix), ou indiquait une probabilité en suggérant une prévision sur un phénomène physique ou chimique; d'autres fois, enfin, il se colorait vraiment de toute la gamme de couleurs et nous conduisait dans le vif des recherches actuelles sur la télévision en couleurs ou sur la physiologie de l'œil. Notre plan était donc tel: on l'avait rendu riche de tant d'interprétations seulement en lui donnant trois points et la loi d'équilibre du levier. Tel était aussi le plan que A. F. Möbius avait conçu en 1827 dans le but d'étudier 'de tout près' la géométrie projective, en créant ce calcul barycentrique jugé d'importance douteuse par quelques-uns de ses grands contemporains. Les enfants ont compris quel formidable outil constitue aujourd'hui cette création d'il y a un siècle et demi.

J'aimerais terminer en précisant la véritable finalité didactique: plusieurs parmi vous connaissent mes idées sur des questions de pédagogie mathématique. Permettez-moi de les répéter: je ne crois pas que pour arriver à une systématisation axiomatique on doive énoncer axiomes et définitions préalables, qui resteront toujours des choses froides pour l'esprit des enfants bien qu'on essaie de les illustrer par des exemples concrets. Les enfants âgés de 11 à 14 ans ne sont pas à même de goûter tout cela, et il y a le grand danger que l'axiomatique la plus moderne et la plus belle puisse dégénerer dans le formalisme et le dogmatisme le plus absurde. On peut aller très loin dans l'abstraction – et on vient de le voir – mais en faisant toujours naître les idées du concret, du réel. C'est ainsi que les enfants seront actifs au point de créer la théorie avec vous. Cette première phase, née du concret, sera la base naturelle sur quoi, dans un second cycle, on pourra bâtir une *axiomatique*.

J'ai voulu cette année-ci réaliser une autre expérience dans ce sens, et j'ai pensé vous en parler: mon problème était de construire une base concrète pour les espaces vectoriels. Prenez ce que je viens de dire dans cet exposé pour ce que c'est: un travail fait en collaboration avec mes élèves de 13 ans.

Rome, le 12 juin 1969