EMMA CASTELNUOVO, DANIELA ET CLAUDIO GORI-GIORGI

LES GRAPHES DE FLUX DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE*

1. Introduction

Un graphe de flux traduit graphiquement un système d'équations linéaires et sa 'lecture' conduit à la résolution du système. La théorie des graphes de flux a été créée, dans les années '50, surtout par Samuel J. Mason de l'M.I.T., Cambridge Mass.

Conçue pour résoudre d'une façon assez souple quelques questions d'électronique et d'automatique, cette théorie se répandit rapidement dans ce secteur et s'avéra fort expressive pour visualiser la structure de problèmes même complexes.

Nous aimerions tout d'abord expliquer aux collègues le pourquoi de l'introduction de cette théorie au niveau secondaire. Il est bien connu que la résolution de problèmes au moyen de systèmes linéaires exige la maîtrise d'un formalisme algébrique: il arrive souvent que l'élève soit tellement pris par les calculs qu'il oublie tout à fait le problème qu'il devait résoudre. C'est justement pourquoi la plupart des élèves n'aiment pas la mathématisation des problèmes. Or, les graphes de flux rendent très attrayante l'étude mathématique de questions traduisibles en systèmes linéaires parce que soit la construction du graphe faite directement à partir de l'exposition verbale des données, soit son examen, conduisent à éclaircir la nature du problème et à jeter de la lumière sur ses différents aspects.

Cet article expose sept leçons sur ce sujet, données par Emma Castelnuovo à une classe de garçons et filles agés de 13 ans (élèves de la 3me classe de la Scuola Media). L'enthousiasme avec lequel ces élèves ont suivi les leçons nous a encouragés à en parler aux Collègues.

1ère Leçon

1. *Graphes de flux et équations*

Je veux commencer par l'exemple d'un raffinage où une tonne de pétrole brut est transformée en $\frac{2}{3}$ de tonne de gas-oil, ce qui se traduit d'une part par *le graphe de flux* (figure 1)

* Travail effectué dans le cadre du groupe de recherche en didactique de la mathématique du Conseil National des Recherches.

Educational Studies in Mathematics **5** (1974) 467–492.

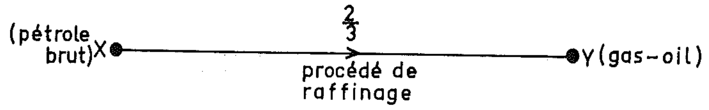


Fig. 1.

et d'autre part par l'équation

$$y=\frac{2}{3}x.$$

Graphe et équation représentent tous les deux le même lien entre deux quantités.

En général les équations qui lient deux quantités d'un processus x et y seront nombreuses et compliquées, et il se pourrait qu'il soit difficile d'exprimer effectivement y en fonction de x. Mais nous constaterons que souvent un graphe peut éclaircir le problème et nous indiquer la voie de la solution.

Nous sommes partis d'un exemple: le passage du pétrole au gas-oil. Nous rencontrerons d'autres problèmes liés au pétrole (l'or noir dont on parle tous les jours ces temps-ci). Ces problèmes nous aideront à comprendre les lois des graphes de flux, et vice versa la "lecture" des graphes nous aidera à voir clair dans quelques questions relatives au pétrole.

Commençons par nous demander: qu'est-ce que c'est le pétrole? Le nom nous le dit: pétrole vient du latin "petra et oleum", des pierres imprégnées d'huile. Il s'agit d'une substance dont les constituants fondamentaux sont des hydrocarbures. Son origine est organique: le pétrole vient de la décomposition de végétaux et d'autres êtres vivants. Ce mélange d'huiles est comprimé par la couche de terre ou d'eau qui la surmonte, et il arrive donc que si dans une de ces zones on perce le sol par un tuyau, la pression fait monter le liquide dans le tuyau.

On a déjà parlé de produits de raffinage; parmi ceux-ci il y a, et dans cet ordre, le gas-oil et l'essence. On les obtient par des procédés de chauffage qui éliminent, en pourcentages plus ou moins élevés, les différents déchets.

2. *Deux lois sur les graphes de flux*

A. D'un gisement pétrolifère on tire une certaine quantité x de pétrole brut; de cette quantité on envoie à une raffinerie $\frac{1}{4}$ par un oléoduc et $\frac{1}{3}$ par un oléoduc plus moderne (figure 2).

Il est clair que la quantité de pétrole qui arrive à la raffinerie est:

$$y=\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}\right)x.$$

On a donc: *si un graphe se compose de plusieurs branches en parallèle (figure 3) et si les coefficients de transfert des branches sont a, b, c, on obtient la sortie y en multipliant l'entrée x par la somme des coefficients de transfert:*

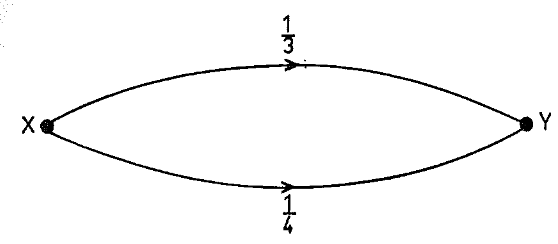


Fig. 2.

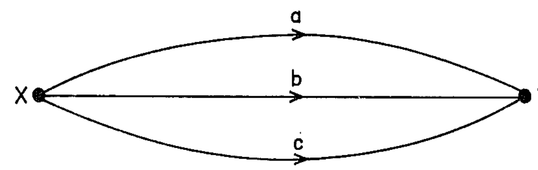


Fig. 3.

$$y=(a+b+c)\,x.$$

B. Nous avons dit que par raffinage du pétrole brut on obtient du gas-oil; par un second raffinage on obtient de l'essence. Si par exemple on tire du pétrole les $\frac{2}{3}$ en gas-oil, et si du gas-oil on tire les $\frac{3}{4}$ en essence, on pourra traduire ces données dans un graphe (figure 4)

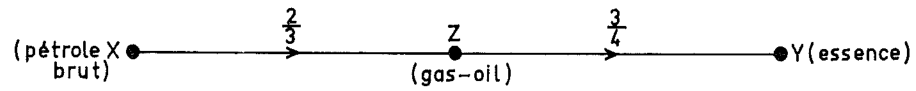


Fig. 4.

qui correspond au *système d'équations*

$$z=\tfrac{2}{3}x$$
$$y=\tfrac{3}{4}z.$$

Quel est le pourcentage de pétrole qu'on obtient en essence? Il est clair qu'on obtient les $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire

$$y=\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}x.$$

On a donc: *si un graphe se compose de plusieurs branches en série (figure 5), et si les coefficients de transfert des branches sont a, b, c, on obtient la sortie y en multipliant l'entrée x par le produit des coefficients de transfert:*

$$y=abc\,x.$$

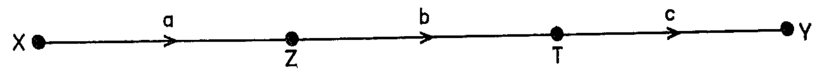


Fig. 5.

Voici une autre situation: Un certain pays importe du pétrole arabe (x_1) et du pétrole américain (x_2); le premier donne les $\frac{2}{3}$ en gas-oil, le second donne les $\frac{4}{5}$. Du gas-oil obtenu on tire ensuite la fraction $\frac{3}{4}$ en essence. Au fur et à mesure qu'on exprime les données, on les traduit dans un graphe (figure 6)

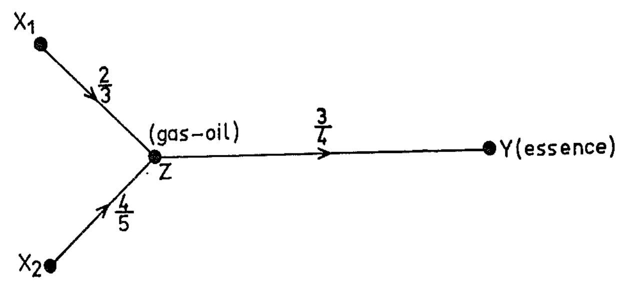


Fig. 6.

Par les lois de la somme et du produit on a:

$$y = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}x_1 + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{4}{5}x_2 .$$

3. *Des équations aux graphes correspondants*

Jusqu'ici on est passé des phrases aux graphes et aux équations. Les exemples suivants nous montreront de quelle façon on peut passer des équations aux graphes. On comprendra qu'il suffit de *regarder* un graphe pour être à même de le résoudre, c'est-à-dire pour avoir une inconnue en fonction d'une donnée.

a. Le système d'équations

$$z = 1x$$
$$y = 1z + \tfrac{1}{2}z$$

correspond au graphe de la figure 7.[1]

[1] J'examinais le système avec les élèves et je le traduisais en graphe; par exemple, en lisant la première équation je faisais ce graphe

$$x \xrightarrow{1} z$$

qui met en relief de quelle façon z dépend de x. Les élèves ont compris tout de suite ce passage et ils n'ont eu aucune difficulté pour le compléter.

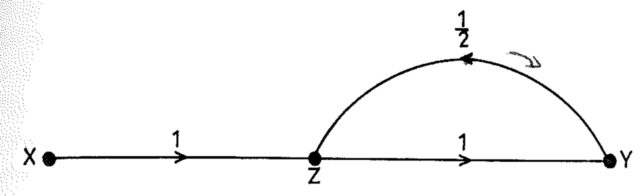


Fig. 7.

On obtient y en fonction de x en regardant les *chemins* qui vont de x à y:

$$y = (1.1 + 1.\tfrac{1}{2})\,x ,$$

c'est-à-dire

$$y = \tfrac{3}{2}x .$$

b. Déterminer y en fonction de x dans le système

$$z = 4x + 5x$$
$$t = 3z$$
$$y = 2t + 1t .$$

On traduit le système dans le graphe de la figure 8. La lecture de ce graphe nous donne:

$$y = (4.3.1 + 5.3.1 + 4.3.2 + 5.3.2)\,x$$
$$y = 81\,x .$$

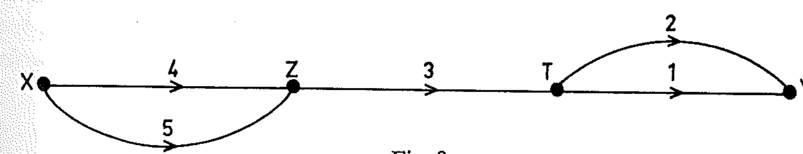


Fig. 8.

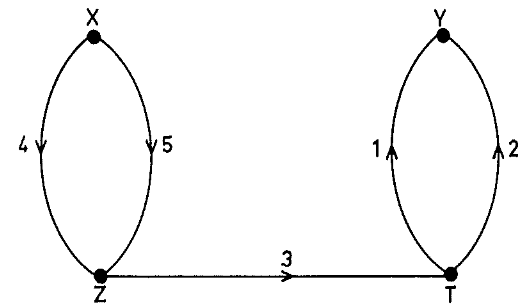


Fig. 9.

Du même système on peut passer au graphe de la figure 9. Il est facile de vérifier qu'il s'agit du *même graphe*, et on parvient à la même solution.

c. Résoudre le système suivant; on veut y en fonction de x:

$$z = 1x$$
$$t = 3z$$
$$y = 2x + 1t + 4t + 2z.$$

Le graphe est celui de la figure 10.

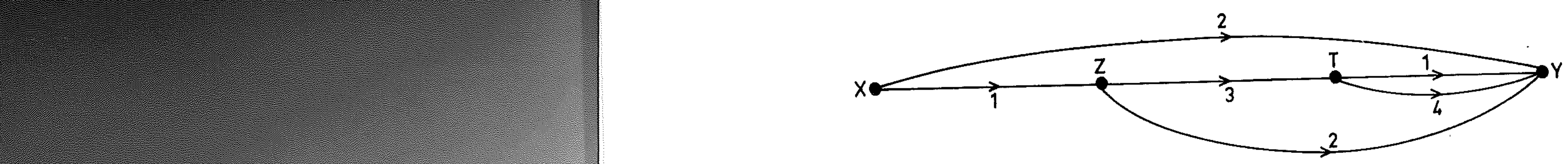


Fig. 10.

Sa lecture donne

$$y = (1.3.1 + 1.2 + 1.3.4 + 2)\,x$$
$$y = 19x.$$

Il faut donc se rappeler que: *la sortie est donnée par l'entrée multipliée par la somme de tous les chemins qui vont de l'entrée à la sortie.*

Je m'étonne encore d'avoir pu aller si loin dans une première leçon sur un sujet si "neuf", mais j'avais été encouragée par la facilité que tous les enfants avaient montré dans les passages "équations-graphes" et vice versa. Il faut ajouter que le sujet était neuf, non pas seulement en ce qui concerne les graphes, mais aussi du point de vu algébrique, les enfants n'ayant jamais entendu parler de systèmes d'équations.

2ème LEÇON

4. *Graphes avec un cycle*

Je vous propose aujourd'hui le système

$$z = 1x + \tfrac{1}{2}y$$
$$y = 1z.$$

Nous le traduisons en graphe (figure 11).

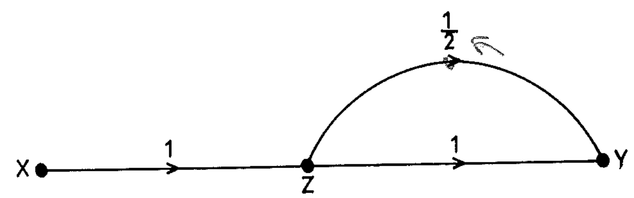


Fig. 11.

Stefano dit qu'on a déjà rencontré un graphe comme celui-ci (il pense au graphe de la figure 7), mais on se rend compte tout de suite du fait que le graphe déjà rencontré avait, en effet, la même "forme" mais la flèche sur la branche zy allait de z à y et non de y à z. Il s'agit donc d'un autre graphe: c'est *un graphe avec un cycle*. Valerio suggère de l'interpréter comme ceci: pour aller de x à y on peut suivre soit le chemin direct de coefficient 1.1 soit le chemin qui parcourt aussi le cycle et qui a donc le coefficient $1.1.\frac{1}{2}.1$. "En lisant" le graphe avec cette interprétation on a

$$y = (1.1 + 1.1.\tfrac{1}{2}.1)\,x$$
$$y = \tfrac{3}{2}x.$$

Les élèves se rendent compte du fait que cette interprétation est erronée car on a obtenu exactement la même solution que pour le système correspondent au graphe de la figure 7.

Après cette constatation je les invite à réfléchir. C'est Paolo qui parle le premier; il dit: "mais le cycle pourrait être parcouru plus d'une fois; c'est comme s'il y avait un flux d'eau qui, arrivée en y, était repoussée plusieurs fois." "Alors – c'est Nicolò qui parle – le coefficient du cycle n'a pas la valeur $1.\frac{1}{2}.1$, car on continue". "Voilà – dit Claudia –, la seconde fois il arrive comme si l'eau, dont parlait Paolo, était renvoyée en arrière en mesure de la moitié de la moitié." "C'est-à-dire $\frac{1}{4}$ – dit Guido –, et puis $\frac{1}{8}$, et puis..." Je prévoyais la réaction: tout le monde explose "c'est le problème de la fourmi![2]". Quelqu'un se précipite au tableau-noir et écrit

$$y = (1 + 1)\,x.$$

[2] Il faut que j'explique aux collègues ce qu'est le "problème de la fourmi".

Au cours d'un enseignement il y a toujours des suggestions, des exemples bien choisis qui "ont prise" sur les élèves et qui marquent autant d'étapes dans leur apprentissage de la mathématique. Une de ces étapes correspond justement, dans mon cours, à la discussion faite avec les enfants sur les deux aspects de la mathématique: l'aspect concret, celui des applications, et l'aspect abstrait. Il y a bien des occasions, au cours des trois ans de l'Ecole Moyenne, qui amènent à une discussion sur ce sujet. C'est justement pour mettre en route cette question, que je parle du problème de la fourmi (c'est encore une interprétation des problèmes de Zénon): "une fourmi voit une miette de pain qui se trouve – disons – à 1 mètre de distance. Elle décide d'aller la prendre et se met en route. Après avoir parcouru $\frac{1}{2}$ de cette distance, il lui restera $\frac{1}{4}$ et puis $\frac{1}{8}$, etc. (figure 12). La distance que la fourmi a à parcourir semble avoir une longueur infinie car il s'agit de la somme

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots.$$

D'autre part, le bon sens nous dit que notre fourmi parviendra certainement à atteindre la miette qui se trouve, comme on a dit, à un mètre de distance de son point de départ."

C'est justement ce contraste entre le concret et l'abstrait qui frappe les enfants d'une façon inoubliable, dès la première fois qu'ils rencontrent des problèmes de ce genre et cela arrive en général au cours de la première classe.

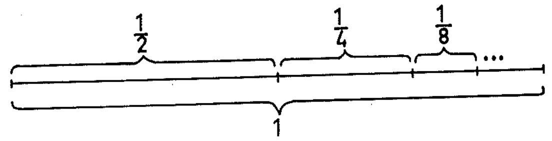


Fig. 12.

Et ils sont tous d'accord que le premier "1" indique la transférence du chemin direct tandis que le second "1" est la transférence du parcours qui comprend le cycle, car

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\cdots=1$$

En définitive, on a

$$y=2x.$$

Paolo avait suggéré l'idée d'un flux d'eau qui, arrivé en y, est chaque fois repoussé au taux de la moitié. En effect, dis-je, cet exemple est très expressif mais il est bien difficile à réaliser. Au contraire, je vais vous donner un exemple réel, qui arrive toujours; c'est celui du haut-parleur. Si je parle devant un microphone connecté à un haut-parleur (dont l'unique but est de transmettre ma voix au fond de la salle, sans l'altérer), la voix sort du haut-parleur et va frapper un mur. Une certaine fraction de la voix est renvoyée par le mur, et s'achemine de nouveau dans le microphone (figure 13).

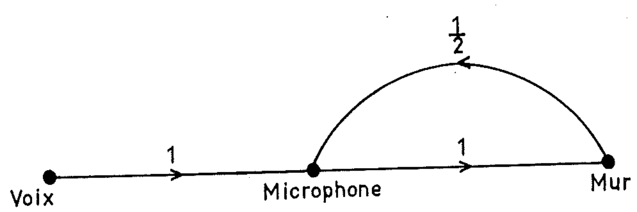


Fig. 13.

Si la fraction qui revient en arrière est $\frac{1}{2}$, cette quantité entre dans le microphone, sort du haut-parleur, est réfléchie par le mur, et sa moitié, c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ de la voix initiale, revient en arrière, etc.

En définitive la voix qui sort du haut-parleur est précisément

$$y=(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\cdots)\,x,$$

c'est-à-dire

$$y=2x.$$

On voit donc que la voix émise par le haut-parleur, n'est pas égale à 1, comme on le voulait, mais égale à 2.

Dans la réalité, il n'arrive pas qu'un mur réfléchisse un si haut pourcentage: cela tient au matériau dont est fait le mur; il y a aussi des matériaux qui ne réfléchissent pas du tout. On veut voir ce qu'il arrive si le mur réfléchit $\frac{1}{3}$ de la voix, c'est-à-dire si le coefficient de transfert du cycle est $\frac{1}{3}$ (figure 14). On aura:

$$y=(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{27}+\cdots)\,x.$$

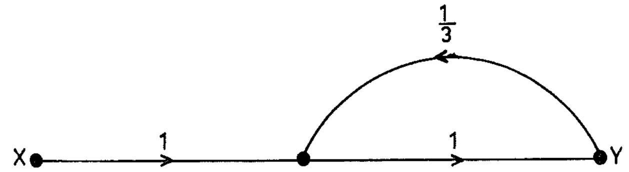


Fig. 14.

Il s'agit de découvrir la valeur de la somme

$$\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{27}+\cdots$$

Les enfants essayent par "la méthode de la fourmi" mais leur dessin (figure 15) semble ne conduire à rien. Claudia est seule à soutenir que la limite de cette somme doit être $\frac{1}{2}$, mais elle n'arrive pas à le démontrer.

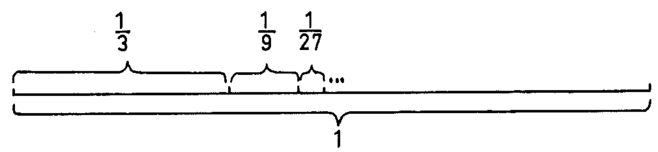


Fig. 15.

C'est moi, alors, qui suggère une méthode qui tient compte de la psychologie des fourmis. "On doit penser – dis-je – que les fourmis sont prévoyantes: elles aiment être à l'avance. Notre fourmi décide de parcourir la distance comme ceci: elle fait tout de suite les $\frac{2}{3}$ de la longueur, puis le tiers de ce qui lui reste, c'est-à-dire le $\frac{2}{9}$ du total, ensuite... On voit bien à partir de la figure 16 qu'elle va rejoindre son but. On aura.

$$\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{9}+\tfrac{2}{27}+\cdots=1.$$

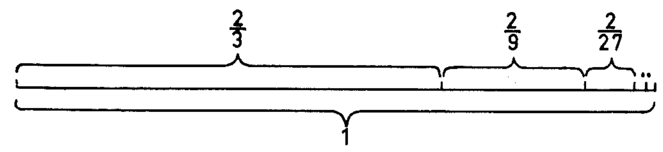


Fig. 16.

La conclusion est tout de suite donnée par les élèves. "Alors – disent-ils – on a

$$\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{27}+\cdots=\tfrac{1}{2}."$$

La lecture du graphe de la figure 14 nous donnera

$$y=(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9}+\cdots)\,x,$$
$$y=(1+\tfrac{1}{2})\,x,$$
$$y=\tfrac{3}{2}\,x.$$

Si le coefficient du cycle est $\frac{1}{4}$, on a le graphe de la figure 17.

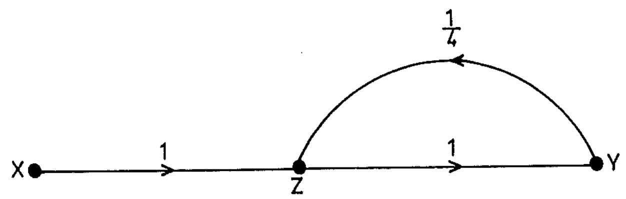


Fig. 17.

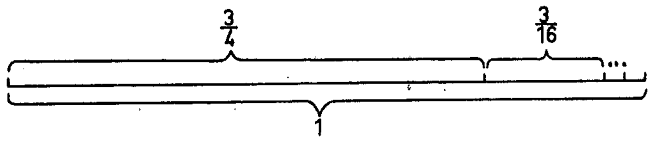


Fig. 18.

Sa solution est:

$$y=(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\cdots)\,x.$$

En suivant la même méthode (figure 18) on a:

$$\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{16}+\cdots=1$$

et donc

$$\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\cdots=\tfrac{1}{3}.$$

La solution du graphe est alors:

$$y=(1+\tfrac{1}{3})\,x,$$
$$y=\tfrac{4}{3}\,x.$$

Ensuite, on a trouvé que si le coefficient est $\frac{1}{5}$ on a

$$y=(1+\tfrac{1}{4})\,x,$$
$$y=\tfrac{5}{4}\,x.$$

3ème Leçon

5. *L'effet d'un cycle*

J'ai commencé cette leçon en écrivant au tableau-noir les résultats obtenus dans la leçon précédente:

coefficient de transfert du cycle: k	*coefficient de transfert du graphe: y*
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{4}$
$\vdots$	$\vdots$

On découvre tout de suite une règle pour avoir le coefficient du transfert du graphe, mais on va l'écrire sous une autre forme.
Partons du cas

$$k=\tfrac{1}{5}$$

On a

$$y=\tfrac{5}{4}.$$

On peut écrire

$$\frac{5}{4}=\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}.$$

On conclut que si

$$k=\tfrac{1}{5},\quad \text{on a}\quad y=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\,x.$$

En général, si le coefficient du transfert d'un cycle est k, on aura:

$$y=\frac{1}{1-k}\,x.$$

Il est clair que si le chemin de x à y a le coefficient a, et non pas 1 (figure 19),

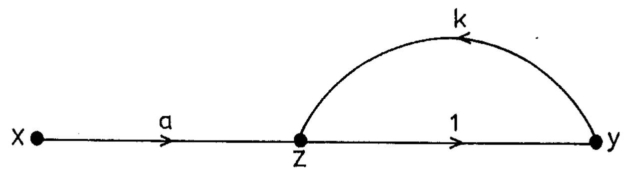


Fig. 19.

on aura:

$$y = \frac{a}{1-k}\,x.$$

On a réfléchi sur la formule qu'on a obtenue et qui concerne le graphe de la figure 19. On a remarqué que cette formule donne aussi la solution du graphe de la figure 20, graphe qui n'a aucun cycle.

Fig. 20.

Quelqu'un dit tout de suite: "mais alors, c'est la même chose!" Ils arrivent tous ensemble à la conclusion qu'un graphe doué d'un cycle peut se réduire à un graphe sans aucun cycle.

Et voici *la règle générale* que les enfants aimaient rappeler comme *"la puissance magique d'un cycle"*:

- si d'un chemin x on *ôte* un cycle de transfert k, on doit *diviser* le transfert du chemin par $1-k$;

et inversement:

- si à un chemin x on *ajoute* un cycle de transfert k, on doit *multiplier* le transfert du chemin par $1-k$.

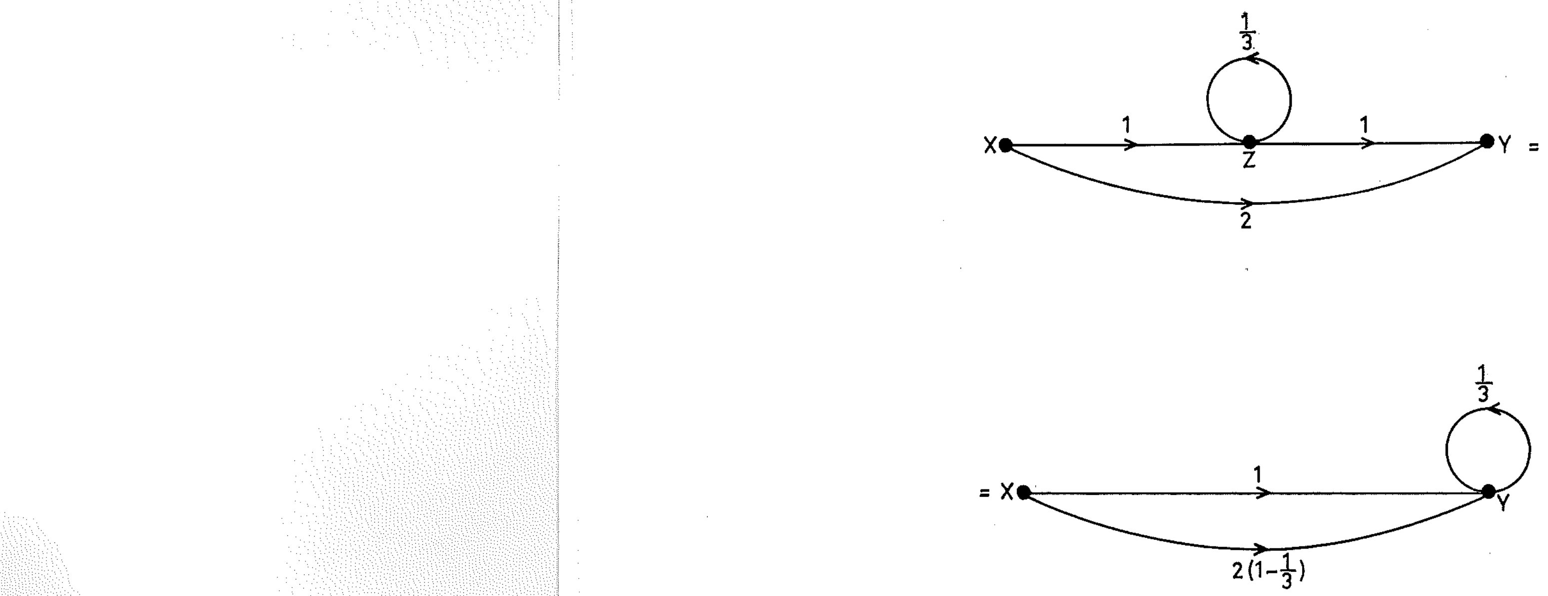


Fig. 21.

En se basant sur cette règle, on a résolu le graphe de la figure 21:

$$y = \frac{1+2\left(1-\frac{1}{3}\right)}{1-\frac{1}{3}}\,x = \frac{1+2\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\,x = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}}\,x = \tfrac{7}{2}x.$$

4ème Leçon

6. *La formule de S. Mason*

On a continué à s'exercer à la résolution de graphes. Voici des exemples:

(a)

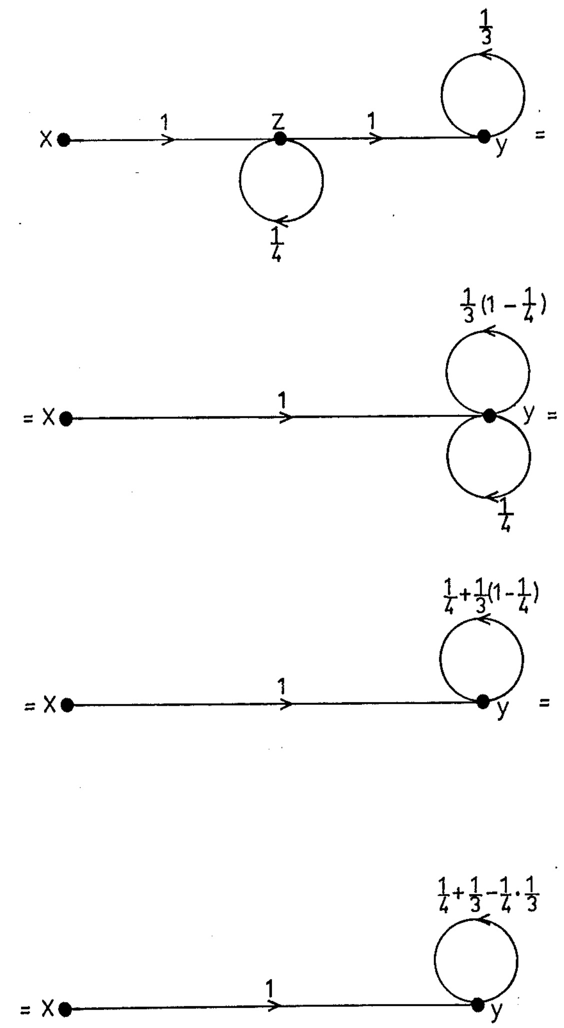


Fig. 22.

On a:

$$y = \frac{1}{1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3})}\,x = \frac{1}{\frac{6}{12}}\,x = 2x\,.$$

(b)

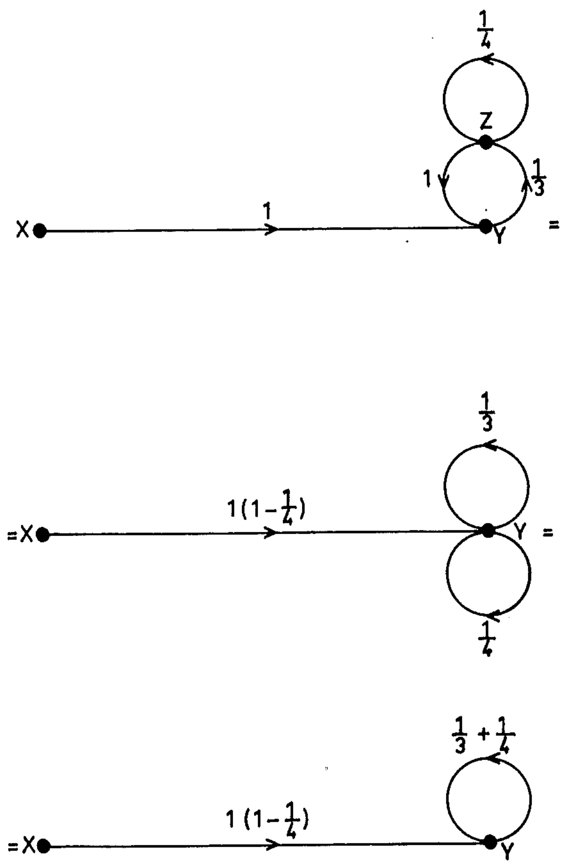


Fig. 23.

On a

$$y = \frac{1(1-\frac{1}{4})}{1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})}\,x = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\,x = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{12}}\,x = \frac{9}{5}x\,.$$

(c)

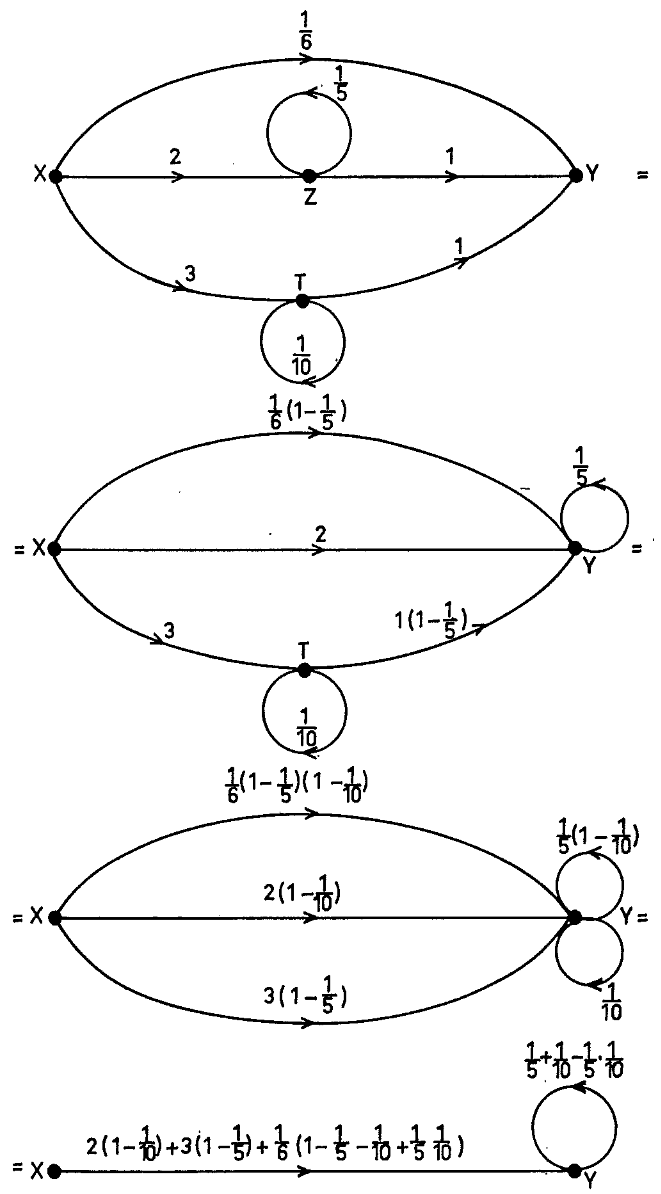


Fig. 24.

On a

$$y = \frac{2(1-\frac{1}{10})+3(1-\frac{1}{5})+\frac{1}{6}(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10})}{1-(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10})}\,x =$$

$$= \frac{2-\frac{2}{10}+3-\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{36}{50}}{1-\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{50}}\,x = \frac{\frac{216}{50}}{\frac{36}{50}}\,x = 6x\,.$$

Nous avons été frappés, pendant toute cette leçon, de la facilité avec laquelle les élèves "lisaient" les graphes: ils s'apercevaient bien vite si on devait changer tel ou tel coefficient à la suite du changement de position d'un cycle. Cette sensibilité topologique nous a conduit à réfléchir encore une fois sur l'appui que le concret (le graphe) prête aux opérations sur le plan algébrique qui servent à résoudre les systèmes linéaires: on connaît bien toutes les difficultés que des enfants de 13 ans ont soit en substituant une variable soit en rendant explicite la variable elle-même, en recourant à des opérations inverses. Après tous ces exemples qui mettaient en lumière le mécanisme des transformations successives d'un graphe, j'ai demandé aux élèves s'ils pensaient vraiment indispensable de faire tellement de dessins. Quelqu'un a dit: "moi, les dessins, je peux aussi les imaginer". On a alors examiné un ou deux de ces graphes et on a remarqué que, pour les résoudre, il suffisait de "les regarder et de raisonner".

De la sorte, on a compris que:

notre technique a eu comme but de réduire tous les graphes à la forme de la figure 25.

Fig. 25.

Ce graphe donne

$$y = \frac{h}{1-k}\,x$$

où *h est la somme de tous les coefficients de transfert des chemins*, en se rappelant que le coefficient d'un chemin doit être modifié en tenant compte des cycles qui ne touchent pas ce chemin; k est *la somme des coefficients des cycles* diminuée du produit des coefficients des cycles qui ne se touchent pas. Cette règle résume la formule de S. Mason, dans le cas de deux cycles au maximum.

Il nous a paru préférable de ne pas alourdir les leçons avec des cas plus compliqués.

5ème Leçon

Quelques applications de la théorie des graphes

7. *Une question de commerce*

De nos jours les magasins alimentaires ayant la licence de vendre des produits différents se répandent de plus en plus. Nous voulons savoir pourquoi c'est

un avantage de vendre plus d'un seul produit. Nous examinerons séparément différents cas.

(1). Commençons par schématiser l'activité d'un magasin qui vend seulement un produit, par exemple de la charcuterie.

Le propriétaire ouvre son activité avec un certain capital qu'il investit dans l'achat de charcuterie. Ensuite, il vend ces marchandises au prix double, et il lui revient une certaine somme. Il décide de placer $\frac{1}{3}$ de cette somme dans l'achat d'un nouveau stock de charcuterie, et ainsi de suite. On veut determiner la relation entre le capital initial – soit x – et la somme – soit y – que le propriétaire aura après une assez longue période de temps.

Le problème se traduit dans le graphe de la figure 26.

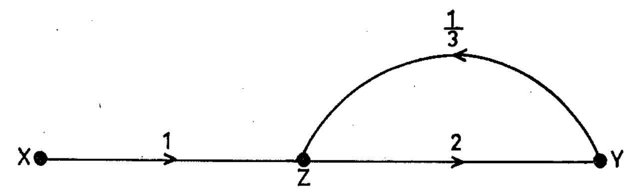


Fig. 26.

x = capital initial;
z = argent investi dans l'achat de charcuterie;
y = capital après un temps assez long.

On a:

$$y = \frac{2}{1-\frac{2}{3}}\,x = 6x\,.$$

On a appliqué la formule $y = (a/(1-k))\,x$ qui se rapporte au cas dans lequel le cycle est parcouru un nombre infini de fois, chose qui, évidemment, n'arrive pas dans ce problème; mais après une assez longue période de temps la valeur effective sera très proche de la valeur donnée par cette formule.

Il est évident qu'une partie du capital sera employée pour payer le loyer des locaux, les vendeurs, etc.

(2) En Italie, et dans bien d'autres pays, il y a un système de taxes à la valeur ajoutée (T.V.A.), qui augmente de 6% le prix des produits alimentaires. Cela signifie que le propriétaire, qui avait décidé d'investir $\frac{1}{3}$ de son argent dans l'achat d'un nouveau stock de charcuterie, devra tenir compte du fait qu'une partie de cet argent (les 6%, c'est-à-dire environ $\frac{1}{16}$) lui sera nécessaire pour payer la T.V.A.; par conséquent il ne pourra pas disposer entièrement du tiers de son capital, mais seulement des $\frac{15}{16}$ de $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire de

$$\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{16}\,.$$

On a alors le graphe de la figure 27 qui tient compte de la T.V.A.

Fig. 27.

On a:

$$y = \frac{2}{1 - 2\cdot\frac{5}{16}}\,x = \frac{2}{1 - \frac{5}{8}}\,x = \frac{16}{3}x \cong 5,3x.$$

On remarque que, maintenant, le capital est devenu non pas 6, mais 5,3 fois plus grand. Une partie de celui-ci, comme on a déjà dit, devra être employée pour le loyer, etc.

(3) Le propriétaire, qui dispose maintenant d'un gros capital, décide d'agrandir son entreprise. Il peut choisir entre deux possibilités:

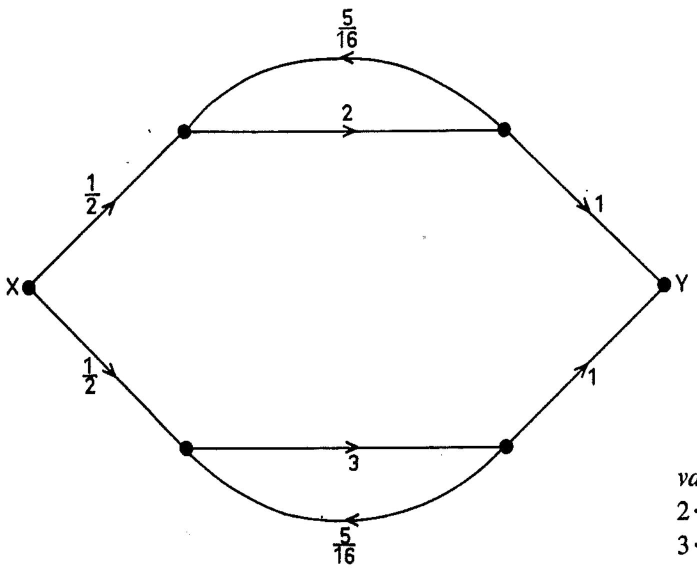
(A) ouvrir deux magasins, l'un de charcuterie et l'autre de vins;

(B) ouvrir un seul magasin, mais avec la license de vendre soit de la charcuterie soit du vin.

Dans le cas (A) le propriétaire garde les deux administrations tout à fait séparées, tandis que dans le cas (B) les administrations sont liées.

On va étudier séparément les deux cas à l'aide des graphes.

(A) Le graphe de la figure 28 montre l'activité des deux magasins: le capital initial x est divisé en deux parties égales: $\frac{1}{2}$ va au secteur charcuterie et $\frac{1}{2}$ au secteur vins. Supposons que le prix de vente de la charcuterie soit double du prix d'achat, tandis que le prix de vente des vins soit triple. Rappellons-nous aussi que $\frac{1}{3}$ du capital réinvesti est réduit de la T.V.A. comme dans le cas 2.



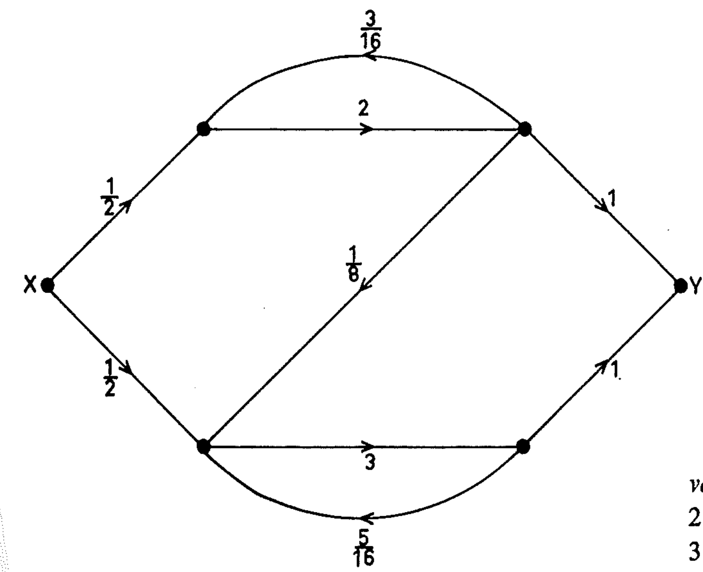
valeur des cycles
$2\cdot\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$,
$3\cdot\frac{5}{16}=\frac{15}{16}$.

Fig. 28.

On a:

$$y = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot(1 - \frac{15}{16}) + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\,(1 - \frac{5}{8})}{1 - \frac{5}{8} - \frac{15}{16} + \frac{5}{8}\cdot\frac{15}{16}}\,x = \frac{10}{16}\cdot\frac{128}{3}x = \frac{80}{3}x \sim 27x.$$

(B) Etant donné que le secteur de vin rend davantage, le propriétaire décide de distribuer différemment ses investissements: les $\frac{2}{16}$ de ce qui revient du secteur charcuterie, sont placés dans le secteur de vin, et seulement les $\frac{3}{16}$ de ce qui revient du secteur charcuterie sont employés pour acheter encore de la charcuterie. Bref, il décide de faire "circuler" l'argent, comme le montre le graphe de la figure 29.



valeur des cycles
$2\cdot\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$,
$3\cdot\frac{5}{16}=\frac{15}{16}$

Fig. 29.

On a:

$$y = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot(1 - \frac{15}{16}) + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot(1 - \frac{3}{8}) + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{8}\cdot 3\cdot 1}{1 - \frac{3}{8} - \frac{15}{16} + \frac{3}{8}\cdot\frac{15}{16}}\,x =$$
$$= \frac{22}{16}\cdot\frac{128}{15}x = \frac{176}{5}x = 35,2x.$$

On remarque que, avec cette activité "mixte", c'est-à-dire en faisant circuler l'argent entre les deux secteurs, on a obtenu un meilleur profit: on est passé de 27 à 35,2.

Je n'aurais jamais pensé qu'un problème commercial aurait suscité un si grand intérêt parmi ces garçonnets. Je me trompais, évidemment: l'un, fils d'un propriétaire d'un petit magasin nous parlait des difficultés commerciales de son père, l'autre parlait d'un ami de famille qui faisait partie de la direction d'un grand magasin: d'autres encore citaient l'exemple de deux magasins alimentaires, tout près de l'école, qui avaient réuni leurs entreprises après avois traversé, tous deux, une période critique.

Partant d'un petit problème commercial, on voyait s'ouvrir la discussion sur le thème plus général de l'économie. J'ai dû leur assurer que les jours suivants on parlerait de quelques questions d'économie et de politique. Il est difficile d'imaginer jusqu'à quel point nos garçonnets sont intéressés par ces sujets.

Les deux leçons suivantes, fortement inspirées par des sujets d'économie politique, seront rapportées sous une forme plus succincte pour ne pas trop prolonger l'exposé.

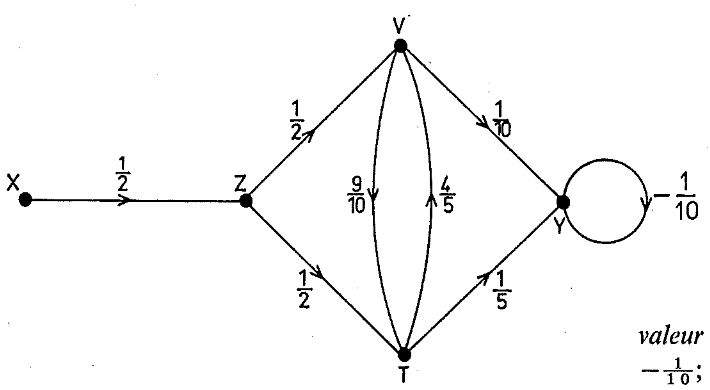
6ème Leçon

8. *Pétrole et agriculture*

Les journaux de cet hiver sont pleins de titres du genre: "l'agriculture va mourir: c'est le manque de pétrole", "la hausse des produits alimentaires tient au pétrole", "la hausse des engrais et les spéculations ont créé pour les campagnes une situation insupportable." Le "climat" était donc plus que favorable à l'analyse de ce problème d'un point de vue quantitatif.

Le graphe de la figure 30 traduit la situation qui lie pétrole et agriculture: *le noeud x* représente la quantité de pétrole brut importé; de celui-ci, $\frac{1}{2}$ est utilisé à des fins industrielles (*noeud z*). Ce pétrole est envoyé, en parties égales, au secteur chimique (*noeud v*) et au secteur métallurgique (*noeud t*). Le secteur chimique produit des engrais qui vont au secteur agricole (*noeud y*), et le secteur métallurgique produit des machines agricoles.

On a reporté sur le graphe les coefficients des branches et des cycles.



valeur des cycles
$-\frac{1}{10}$; $\frac{9}{10}\cdot\frac{4}{5}=\frac{18}{25}$

Fig. 30.

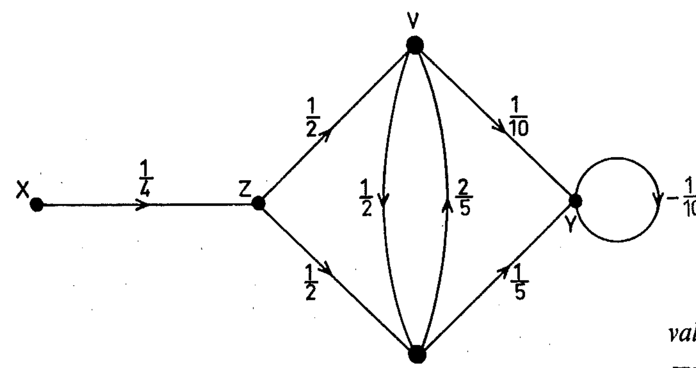
En construisant ce graphe, on a mis un cycle au secteur agricole: on sait bien, en effet, que l'agriculture est nécessaire pour alimenter l'agriculture (par exemple un dixième du blé pour reproduire du blé); or, il est évident que le coefficient de transfert de ce cycle est négatif parce qu'il concerne une consommation. Enfin, il faut tenir compte du fait qu'il y a interaction entre le secteur métallurgique et le secteur chimique: des produits chimiques sont nécessaires pour construire les machines, et les machines sont nécessaires dans les industries chimiques.

On a:

$$y = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{10}}{1 - \frac{9}{10}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{10} - \frac{9}{10}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{10}}\, x =$$

$$= \frac{\frac{1}{40} + \frac{1}{20} + \frac{9}{200} + \frac{1}{50}}{1 - \frac{18}{25} + \frac{1}{10} - \frac{18}{250}}\, x = \frac{5}{11} x .$$

Si, pour cause de pénurie du pétrole, la quantité destinée aux industries est reduite de moitié, on s'attendrait à ce que la production du secteur agricole soit aussi dividée par deux. En réalité la situation est bien pire, car la diminution du pétrole provoque un changement de la structure interne de la situation, c'est-à-dire du graphe. Voici ce qui arrive: si la quantité de pétrole est réduite de moitié, les industries chimiques et métallurgiques se ressentent évidemment de cette réduction. Et, même si elles continuent à verser au secteur agricole toujours $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{5}$ de leurs produits, l'industrie chimique vendra, par example, seulement la moitié de sa production à l'industrie métallurgique, et l'industrie métallurgique versera par example seulement les $\frac{2}{5}$ à l'industrie chimique, car une partie des biens produits par ces secteurs sera stockée dans l'attente d'une hausse des prix. On traduit cette nouvelle situation dans un graphe et on a la figure 31.



valeur des cycles
$-\frac{1}{10}$; $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

Fig. 31.

On a:

$$y = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{10}}\, x =$$
$$= \frac{\frac{1}{80} + \frac{1}{40} + \frac{1}{80} + \frac{2}{400}}{1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{50}}\, x = \frac{1}{16}x\,.$$

On voit bien que le secteur agricole, et par conséquent le secteur alimentaire, souffrent énormément de la nouvelle situation.

7ème Leçon

9. *Le problème du désarmement*

L'incertude de la situation politique extérieure d'un état peut provoquer des dépenses militaires importantes: bien des gens sont dans l'armée et les entreprises de matériel de guerre sont en pleine activité. On se demande: si le gouvernement décide, à la suite d'une situation politique plus détendue, de réduire les armements, qu'est-ce qui arrive? On répond tout de suite: bien des personnes seront sans travail, et cela finit par une crise économique. Ces craintes sont-elles fondées?

L'étude mathématique d'un problème de ce genre a été développée par Wassily Leontief (un économiste russe-américain, Prix Nobel 1973). Il y a dédié deux articles, l'un en 1961 et l'autre en 1965. Le problème est très compliqué, mais nous en réduisons les données. Nous faisons comme ceci: nous partageons toute l'économie du pays en deux secteurs productifs principaux: *agriculture et industrie*.

Soit x la somme totale d'argent que la nation verse pour acheter des produits agricoles, des produits industriels et pour payer les salaires des travailleurs employés dans le *secteur civil*; soit y la somme totale d'argent qu'on verse pour acheter des produits agricoles et industriels et pour payer les salaires de ceux qui travaillent dans le *secteur militaire*. Cet argent coule donc de deux *entrées x et y* et va constituer la "caisse" t_1 des entreprises agricoles et la "caisse" t_2 des industries. L'argent coule selon les coefficients de transfert marqués dans le graphe de la figure 32. On remarque que dans le graphe il y a deux cycles, relatifs à t_1 et à t_2. La signification des cycles est la suivante: hors de la vente des produits agricoles aux civils et aux militaires, c'est à elles-mêmes que les entreprises agricoles distribuent une partie de leurs produits (sémences, etc.), à savoir au taux d'un sixième du produit agricole; de même, hors de la vente de leurs produits aux civils et militaires les industries distribuent à elles-mêmes une partie de leurs produits (machines, etc.), à savoir au taux de $\frac{3}{8}$ de leur produit. De plus $\frac{5}{18}$ du produit agricole est rendu pour l'achat de produits industriels (tracteurs, etc.).

Ce qui nous intéresse, c'est le salaire des travailleurs, qui indique le *niveau d'occupation*: z. Ce salaire vient soit directement de la dépense civile x et de la dépense militaire y (écoles, hôpitaux, ministères, personnel militaire, etc.), soit indirectement des entreprises agricoles et des industries: sur le graphe

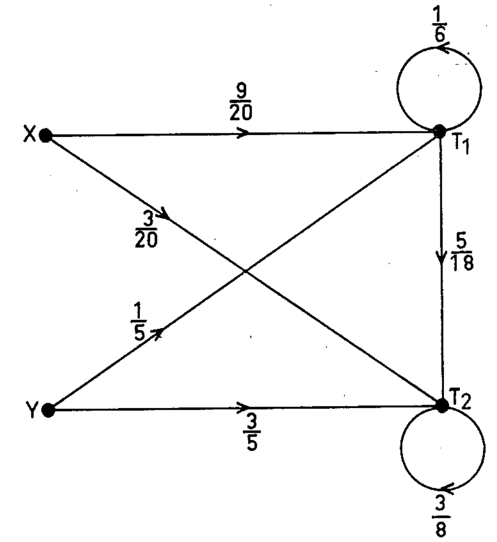


Fig. 32.

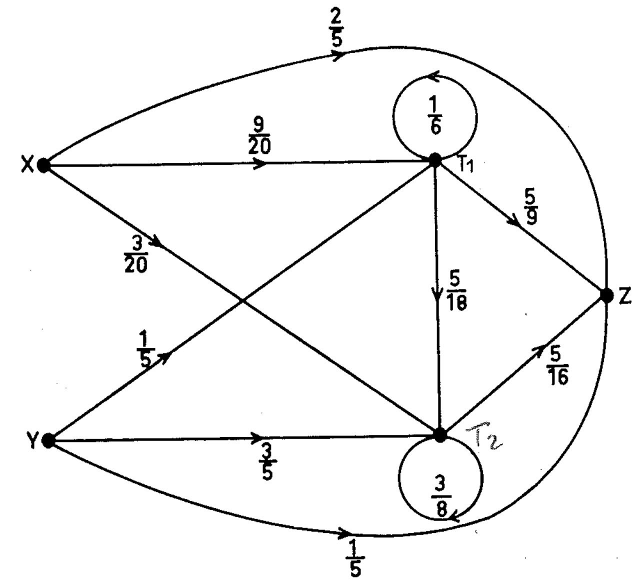


Fig. 33.

de la figure 33 on peut lire les coefficients de transfert. Le graphe est donc complété et on peut obtenir z en fonction des deux entrées x et y.
Avant de calculer z qui, comme on le sait, est exprimé par une fraction, il est bon de déterminer le dénominateur D et la valeur des deux cycles. On a:

$$D = 1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{3}{8} = \tfrac{25}{48},$$
$$t_1 = 1 - \tfrac{1}{6} = \tfrac{5}{6},$$
$$t_2 = 1 - \tfrac{3}{8} = \tfrac{5}{8}.$$

On a donc:

$$z = \frac{\left(\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{25}{48} + \tfrac{9}{20}\cdot\tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{5}{8} + \tfrac{9}{20}\cdot\tfrac{5}{18}\cdot\tfrac{5}{16} + \tfrac{3}{20}\cdot\tfrac{5}{16}\cdot\tfrac{5}{6}\right)x + \left(\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{25}{48} + \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{5}{16}\cdot\tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{5}{8} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{5}{18}\cdot\tfrac{5}{16}\right)y}{\tfrac{25}{48}} =$$
$$= \tfrac{17}{20}x + \tfrac{2}{3}y.$$

Etant connue la situation du pays, x et y sont connus, et par conséquence z.
Si par example on part de la situation

$$x = 40 \qquad y = 30,$$

on a

$$z = 34 + 20 = 54.$$

On se demande: si on modifie y, par exemple en le diminuant, est-il possible de modifier en même temps x de façon que le niveau d'occupation reste à la valeur 54?
Voyons donc: on a la relation

$$\tfrac{17}{20}x + \tfrac{2}{3}y = 54,$$

c'est-à-dire

$$51x + 40y = 3240$$
$$40y = -51x + 3240$$
$$y = -\tfrac{51}{40}x + 81.$$

Cette équation, sur le plan cartésien, représente une droite. Il s'agit d'une droite parallèle à la droite $y = -\frac{51}{40}x$ et qui coupe l'axe des y au point A d'ordonnée 81 (figure 34). A chaque point de cette droite correspond un x et un y, c'est-à-dire une situation du pays. On a donc une quantité de possibilités de la part du gouvernement. Si par exemple on décide de réduire y à la moitié, c'est-à-dire

$$y = 15,$$

on a

$$\tfrac{17}{20}x + \tfrac{2}{3}\cdot 15 = 54,$$
$$\tfrac{17}{20}x = 44,$$
$$x = 51{,}7.$$

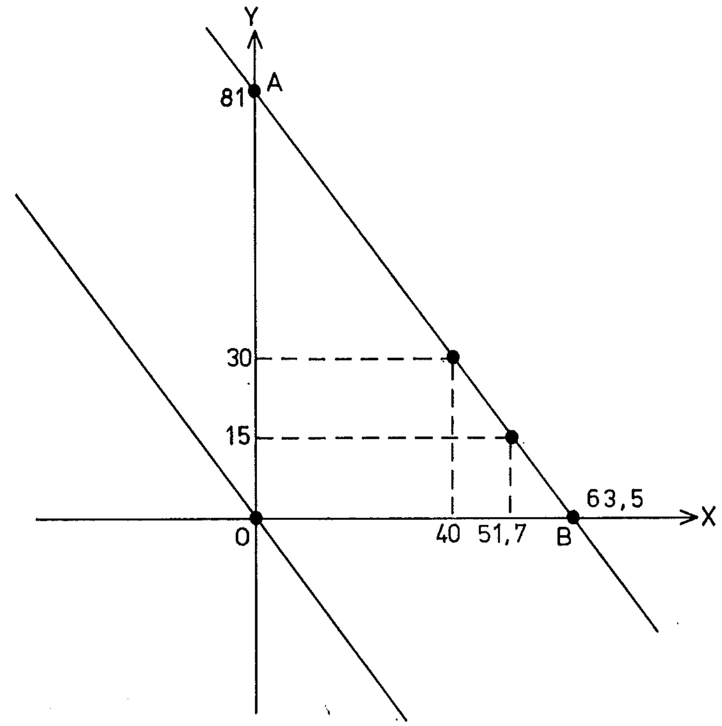


Fig. 34.

On se rend compte du fait que, tandis que nous avons réduit de la moitié les dépenses militaires, les dépenses civiles ne doublent pas, mais passent de 40 à 51,7 tout en conservant le niveau d'occupation, c'est-à-dire sans créer du chomage.

Il est vrai qu'on avait réduit toute l'économie du pays à une forme "élémentaire", mais même sous cette forme, on pouvait se rendre compte du fait qu'une réduction des armements ne provoque pas forcément une crise économique, les travailleurs pouvant passer du secteur militaire au secteur civil. Ce sont les propriétaires des entreprises militaires qui, évidemment, font faillite. Tout ceci a fort intéressé les enfants. Mais, peut-être, ce qui les a frappés le plus, a été l'idée de représenter par un point d'une droite telle ou telle situation politique.

A la fin de ce bref cours sur les graphes de flux, j'ai demandé aux élèves ce qu'ils en pensaient. On ne voulait pas, moi et mes amis, une simple approbation, car l'enthousiasme avec lequel ils avaient suivi les leçons, leur participation toujours active nous faisait sentir leur intérêt. On voulait quelque chose de plus. Voici ce qu'il a résulté de cette conversation:

"Pour moi – dit Raffaele – la beauté de cette méthode est dans le fait que par

un dessin on voit tout". "C'est vrai – dit Lamberto – prenez tel problème avec un tas de données, on le lit et le relit, on réfléchit sur le lien de deux données, on oublie tous les autres liens, et enfin de ce problème fort compliqué, on parvient à un dessin, et ce dessin, voilà, c'est lui qui nous donne la solution." "Ça arrive – dit Ettore – tout à fait comme dans les problèmes de programmation: là aussi une question compliquée, peu à peu, on la rend visible en déterminant la "zone de production" et ensuite en faisant déplacer une droite parallèlement à elle-même". "C'est-à-dire – dit Laura – ça n'est pas la même chose, mais l'idée est la même." "A mon avis – dit Paolo – la chose la plus importante c'est que, maintenant, on peut voir clair dans les affaires de l'Etat". "Il faut connaître ces choses – dit Claudia – pour être à même de gouverner un pays." "C'est-à-dire – dit Valerio – même si on ne connaît pas ces théories, je pense que ce n'est pas grave, mais le gouvernement doit avoir un groupe de mathématiciens pour résoudre ces problèmes." "Lorsque, l'année prochaine, dans le cours supérieur – dit Lamberto – nous ferons les collectifs politiques, nous devons parler à tous les nouveaux camarades de cette méthode des graphes de flux."

Guido se taisait et il semblait perplexe. On lui a demandé son avis. "Moi, je pense à tout autre chose: je pense à notre Exposition d'Avril[3]*. Quelqu'un de nous parlera de ce sujet, et moi aussi j'aimerais bien en parler car il est si beau! Mais, je me demande, comment faire? Car nous, désormais, nous sommes dans la mathématique, et pour nous c'est facile, mais le public, les grandes personnes, seront elles à même de le comprendre?*

BIBLIOGRAPHIE

Mason, S. J.: 'Feedback Theory: Some Properties of Signal Flow Graphs', *Proc. I.R.E.* **41** (1953), 1144–1156.

Mason, S. J.: 'Further Properties of Signal Flow Graphs', *Proc. I.R.E.* **44** (1956), 920–926.

Lepschy, A. et Ruberti, A.: *Lezioni di controlli automatici*, Ediz. Siderea, Roma 1965.

Truxal, J. G.: *Control Engineers Handbook*, Mc Graw-Hill, 1958.

Mayeda, W.: *Graph Theory*, Wiley, 1972.

Leontief, W.: *Teoria economica delle interdipendenze settoriali*, Ediz. Etas-Kompass, Milano.

[3] L'Exposition de laquelle parle Guido a eu lieu le 2–3–4 Avril 1974. A cette Exposition ont pris part les 138 élèves de Emma Castelnuovo.