

LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE À L'ÉCOLE*

I. DES TRANSFORMATIONS AFFINES AUX TRANSFORMATIONS PROJECTIVES

Parmi les phénomènes naturels un des plus frappants pour l'oeil est celui de l'ombre d'un objet donnée par le soleil ou par une source ponctuelle. Alors que dans le cas du soleil le phénomène est facilement mathématisable et qu'on peut développer la théorie des transformations affines même dans des classes d'élèves âgés de 12 ans, dans le cas d'une lampe, au contraire, on trouve des difficultés à exprimer analytiquement, en partant du concret, le phénomène de l'ombre, et, donc, à 'faire descendre' la géométrie projective au niveau d'élèves assez jeunes. Et, pourtant, l'étude des transformations projectives est fortement motivée: en plus du 'mystère' de la forme de l'ombre d'un objet, qui n'est pas du tout prévisible, il y a le problème du dessin en perspective avec ses règles assez cachées, et l'interrogation, toujours passionnante, sur l'art de la photographie.

Ce sont justement ces motivations, qui nous viennent 'de la base', c'est-à-dire de nos élèves, qui nous ont poussés à étudier à fond ce problème didactique.

Nous avons pensé à l'étude qu'on peut faire de l'affinité en partant du concret, et nous avons cherché à développer de façon analogue la géométrie des transformations projectives.

Affinité: lorsqu'un carré quadrillé est frappé par les rayons du soleil (Figure 1), il suffit de regarder son ombre pour découvrir facilement quelques propriétés:

- (1) à des droites parallèles correspondent des droites parallèles;
- (2) le rapport entre segments correspondants est invariant pourvu que les segments appartiennent à la même droite ou à des droites parallèles;
- (3) le rapport entre les aires des figures correspondantes est invariant;
- (4) à des droites correspondent toujours des droites.

Où, si notre carré quadrillé est sous les rayons d'une lampe ponctuelle, on remarque tout de suite que les trois premières propriétés disparaissent; la seule qui soit toujours valable est la quatrième.

Les enfants observent: ils déplacent la lampe en la rapprochant ou en l'éloignant du carré. "Mais-dit quelqu'un- il y aura quand même un rapport qui

* Travail effectué dans le cadre du groupe de recherche en didactique de la mathématique du Conseil National des Recherches.

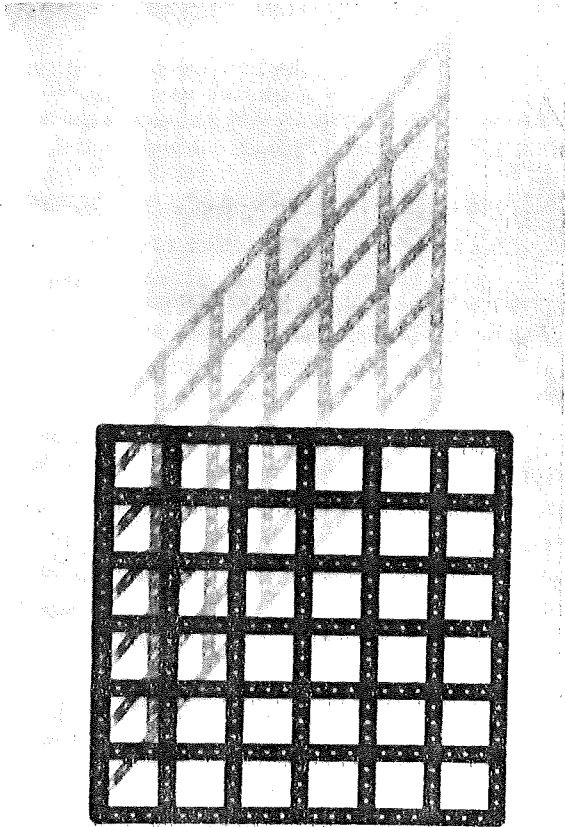


Fig. 1.

ne change pas!" On mesure, on mesure de nouveau, on calcule des rapports . . . : rien de constant!

En outre il est clair que le parallélisme ne se garde pas dans l'ombre, mais on remarque que si on place la lampe tout près du carré, comme dans la photo de la Figure 2, "on a vraiment l'impression-tout le monde est d'accord-que les droites-ombre vont se rencontrer au delà du carré".

Lorsqu'on avait étudié l'affinité, les élèves avaient découvert les équations des transformations affines à partir de l'étirement d'une toile élastique (Figure 3); ils se demandent maintenant de quelle espèce de concret on devrait partir pour découvrir les équations d'une transformation projective. Il y en a qui observent que "si on avait ces équations, il serait facile de faire le dessin d'une figure en perspective: il suffirait de transformer la figure qu'on voit, point après point".

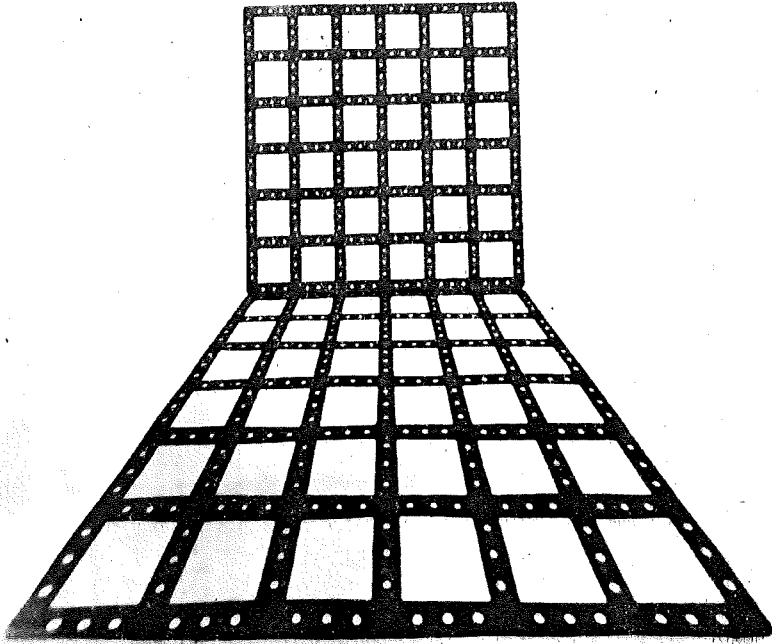


Fig. 2.

II. A LA RECHERCHE D'UN RAPPORT INVARIANT.
LE BIRAPPORT

On commence par une expérience. On place une petite barre r sous une lampe O ; on a, sur le plan π d'une table, l'ombre r' (Figures 4 et 5). Dans nos Figures la barre est perpendiculaire au plan, mais elle pourrait avoir n'importe quelle position; si la barre était parallèle au plan on aurait évidemment une similitude.

Notre expérience nous dit qu'il y a un point de la barre - L - qui n'a pas d'ombre sur le plan: le segment OL est parallèle au plan. Nous remarquons aussi qu'il y a un point de r' - L' - qui n'est l'ombre d'aucun point de la barre r . L et L' sont les points-limite ou points de fuite.

Si A est un point de r on trouve tout de suite par le dessin (Figure 5) son correspondant A' sur r' . On remarque facilement que les triangles $OA'L'$ et AOL sont semblables. On a par suite, si d et d' sont respectivement les distances OL et OL' :

$$\frac{A'L'}{d} = \frac{d'}{AL},$$

c'est-à-dire

$$AL \cdot A'L' = d \cdot d'.$$

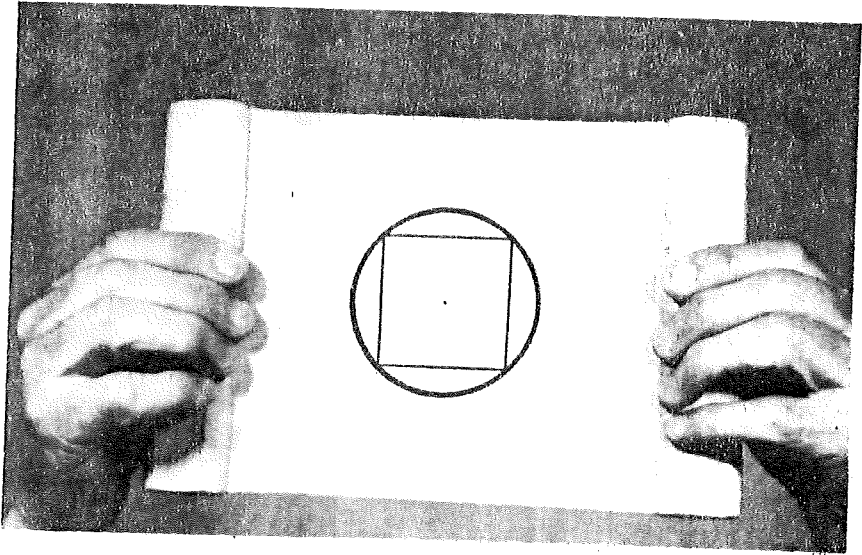


Fig. 3a.

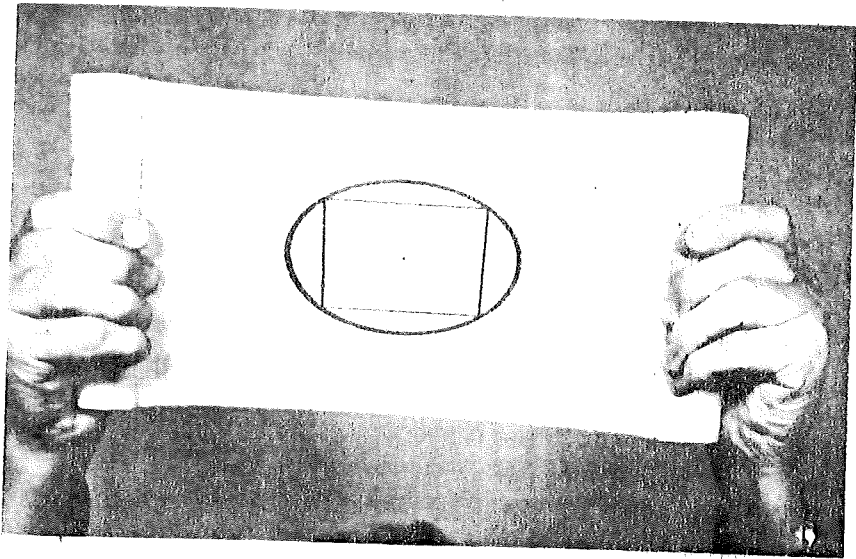


Fig. 3b.

On découvre ainsi *la constance du produit des distances de deux points homologues aux points-limite respectifs.*

Cette propriété est valable pour tout couple de points homologues (Figure 6); on aura, par exemple:

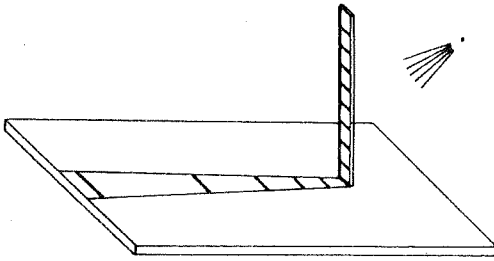


Fig. 4.

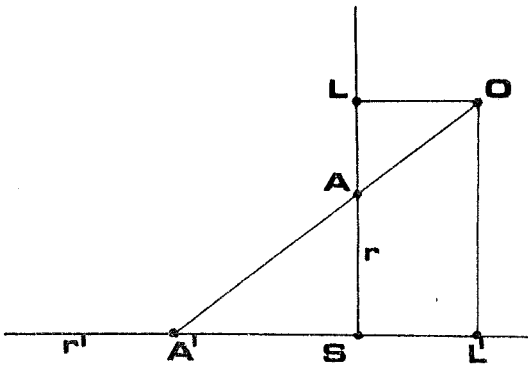


Fig. 5.

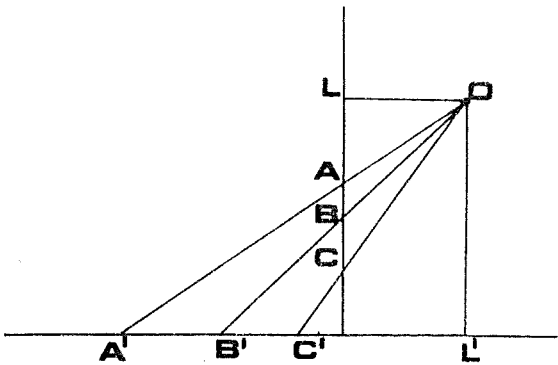


Fig. 6.

$$BL \cdot B'L' = d \cdot d'$$

$$CL \cdot C'L' = d \cdot d',$$

d'où:

$$AL \cdot A'L' = BL \cdot B'L',$$

c'est-à-dire:

$$(1) \quad \frac{BL}{AL} = \frac{A'L'}{B'L'}$$

Mais les élèves voulaient savoir ce qu'il advient du rapport de deux segments, par exemple si, et par quelle loi, le rapport AC/AB est lié au rapport $A'C'/A'B'$.

Or, ces rapports, on peut facilement les calculer à partir de (1) et des formules analogues. On a:

$$\frac{BL - AL}{AL} = \frac{A'L' - B'L'}{B'L'}$$

c'est-à-dire:

$$\frac{AB}{AL} = \frac{A'B'}{B'L'}$$

d'où:

$$(2) \quad A'B' = AB \cdot \frac{B'L'}{AL}$$

On remarque tout de suite que la valeur du rapport $A'B'/AB$ tient à la position des points à l'égard de L et L' .

De même, on aura:

$$\frac{AC}{AL} = \frac{A'C'}{C'L'}$$

d'où:

$$(3) \quad A'C' = AC \cdot \frac{C'L'}{AL}$$

Et finalement, de (2) et (3):

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{C'L'}{B'L'}$$

Cette égalité nous dit que dans une projection le rapport AC/AB ne reste pas constant, comme cela se produit dans une affinité, mais il est multiplié par le facteur $K = (C'L'/B'L')$, et ce facteur ne dépend pas de la position du point A .

On a donc:

$$(4) \quad \frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB} \cdot K.$$

Si au lieu de A nous prenons un point D , une fois fixés B et C , on aura :

$$(5) \quad \frac{D'C'}{D'B'} = \frac{DC}{DB} \cdot K.$$

Si on divise alors (4) par (5) on a :

$$\frac{A'C'}{A'B'} : \frac{D'C'}{D'B'} = \frac{AC}{AB} : \frac{DC}{DB}.$$

Voilà : nous sommes arrivés à un rapport ne dépend pas de la position des points A, B, C, D à l'égard des points-limite L et L' , mais *seulement* de leurs distances mutuelles. Il ne s'agit pas d'un rapport de segments, mais du rapport des rapports de segments correspondants. Ce double rapport s'appelle *birapport*.

Il faut remarquer qu'on ne pouvait pas du tout prévoir ce résultat. C'est justement pour cette raison que les élèves en sont frappés : ils reconnaissent la force de la mathématique au delà de l'intuition et de l'expérience.

III. LES ÉQUATIONS DE LA PROJECTIVÉ ENTRE DEUX PLANS

Le découverte du birapport nous permet d'étudier le lien entre une 'barre' et son ombre, mais nous ne sommes pas encore à même de construire l'ombre d'un quadrillage ou de n'importe quelle figure plane.

Pour y 'voir clair', faisons l'expérience décrite dans la Figure 7 : il y a une lampe O , une vitre (plan π) sur lequel on peut dessiner n'importe quelle figure, et la table (plan π') sur laquelle la lampe projette l'ombre de la figure. Les deux plans π et π' se coupent selon la droite a . On voit sur le dessin qu'à un point A de π correspond un point A' de π' .

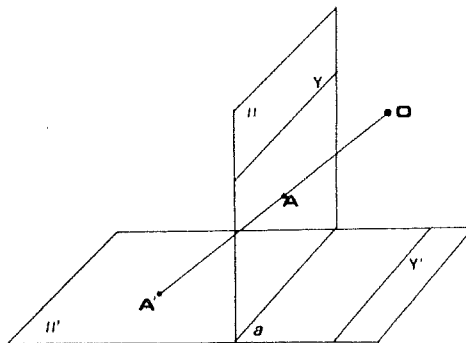


FIG. 7

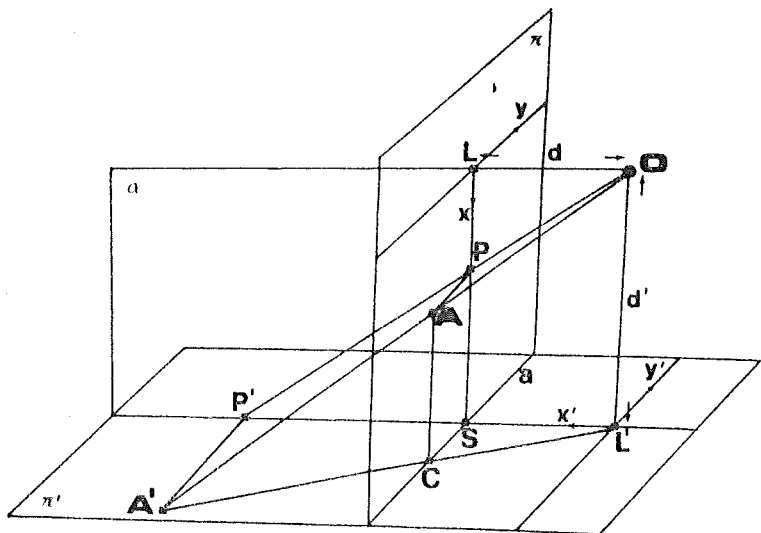


Fig. 8.

On remarque qu'il y a deux droites particulières; la droite y de π qui ne peut pas donner une ombre sur π' , et la y' de π' qui n'est l'ombre d'aucune droite de π . y et y' s'appellent droites-limite. Faisons maintenant un dessin 'plus détaillé' (Figure 8).

On se propose de trouver le lien qui existe entre le point A et son ombre A' . On établit un système de référence sur π et π' : on choisit les droites y et y' comme axes des ordonnées, et comme axes des abscisses on prend les droites x et x' intersections de π et π' avec le plan α perpendiculaire à ces deux plans. Il est évident que x' est l'ombre de x .

De cette façon, les origines L et L' sont déterminées; on a indiqué par d et d' leur distances à O .

Une fois fixé le système de référence, nous allons chercher les relations entre les coordonnées x, y du point A et celles x', y' de son ombre A' :

Abscisse x' : soit P la projection orthogonale de A sur l'axe x . On projette P à partir de O sur π' et on a, sur l'axe x' , le point P' . D'après ce qu'on a découvert sur les points-limite on aura

$$PL \cdot P'L' = d \cdot d',$$

c'est-à-dire

$$x \cdot x' = d \cdot d'$$

et donc

$$x' = \frac{d \cdot d'}{x}.$$

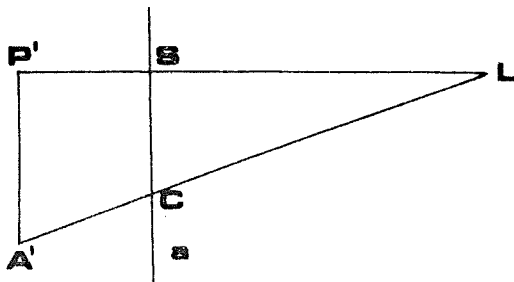


Fig. 9.

Ordonnée y' : Pour avoir y' , il suffit de remarquer que les triangles de π' $L'P'A'$ et $L'SC$ (Figure 9) sont homothétiques. On a

$$\frac{P'A'}{SC} = \frac{P'L'}{SL'}$$

c'est-à-dire

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{d}$$

et donc

$$y' = \frac{y \cdot x'}{d}$$

Ecrivant à la place de x' la valeur qu'on vient de trouver, on a

$$y' = d' \frac{y}{x}$$

On découvre ainsi que les équations exprimant notre projection sont:

$$(6) \quad \begin{cases} x' = d \cdot d' \cdot \frac{1}{x} \\ y' = d' \cdot \frac{y}{x} \end{cases}$$

On n'a pas besoin de dire que ces équations nous permettent aussi de construire 'l'ombre' d'un point de π sur π' dans le cas où le point est 'au dessus' de la droite y , bien que l'ombre d'un tel point n'existe pas du point de vue physique.

IV. QUELQUES OBSERVATIONS À PROPOS DES ÉQUATIONS

Il suffit d'examiner les équations (6) pour découvrir que:

(1) A toute droite de π parallèle à y , c'est-à-dire d'équation $x = k$,

correspond, sur π' , unde droite parallèle à y' (qui aura l'équation $x = d \cdot d'/k$). Par suite: aux droites de π parallèles à la droite a correspondent, sur π' , des droites encore parallèles à la droite a ; tout cela confirme l'expérience (Figure 2).

De plus: l'équation $y' = (d'/k)y$ nous assure que la correspondance entre une parallèle à la droite a et son ombre est une similitude.

(2) Pour chaque valeur de y , par exemple $y = h$, on a

$$\begin{cases} x' = d \cdot d' \frac{1}{x} \\ y' = d' \cdot h \frac{1}{x} \end{cases}$$

d'où

$$\frac{y'}{x'} = \frac{h}{d}.$$

On découvre ainsi qu' au faisceau de droites de π parallèles à l'axe des x correspond, sur π' , un faisceau de droites passant par l'origine L' .

(3) Des équations (6) on peut tirer x et y ; on a

$$(7) \quad \begin{cases} x = d \cdot d' \frac{1}{x'} \\ y = d \frac{y'}{x'}. \end{cases}$$

Les équations (7) sont du même genre que les équations (6); cela veut dire que si une figure F de π se transforme en une figure F' de π' , alors F' , dessinée sur π , va se transformer en la figure F sur π' (Figure 10).

V. PROJECTION DE CONIQUES

Les élèves savaient bien comment un cercle est transformé par affinité; il y a deux 'concrets' qu'ils ne peuvent pas oublier: l'observation de l'ombre elliptique d'un panneau circulaire frappé par les rayons du soleil, et la transformation en ellipse d'un cercle dessiné sur une toile élastique qu'on peut 'étirer'. Il est donc naturel de se demander comment se transforme un cercle par projection. On dessine un cercle sur le plan π dans n'importe quelle position mais toujours avec son centre sur l'axe des x . On voit très bien que le cercle va se transformer en une conique, section du cône de sommet O par le plan π' ; on aura: une ellipse si le point L se trouve à l'extérieur du cercle (Figure 11); une parabole si le cercle passe par L (Figure 12); la conique va 's'ouvrir' au point correspondant

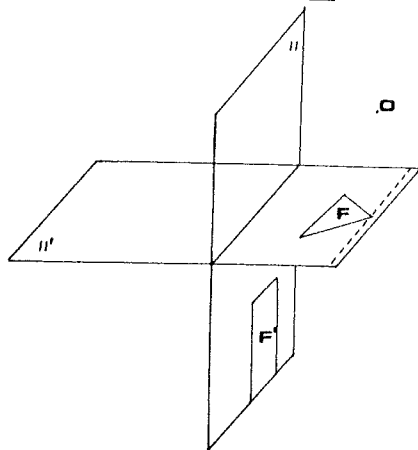
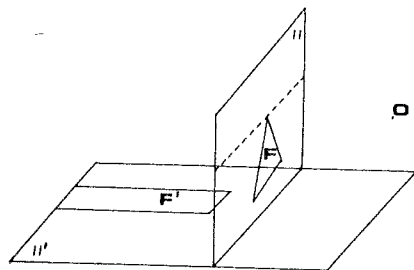


Fig. 10.

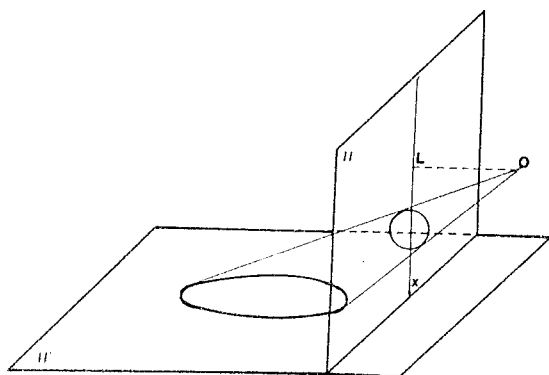


Fig. 11.

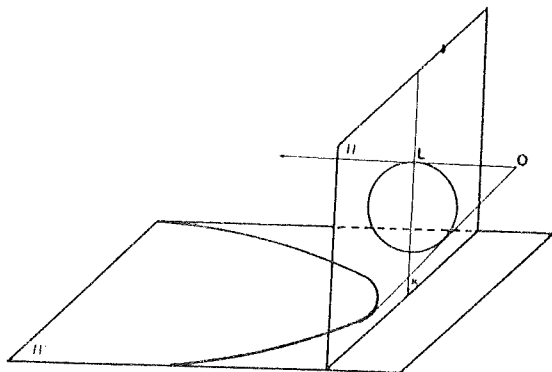


Fig. 12.

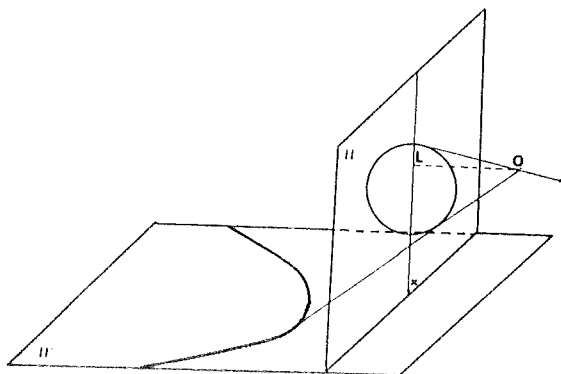


Fig. 13.

a L ; une hyperbole si L se trouve à l'intérieur du cercle (Figure 13): une branche de la courbe est d'un côté de l'axe des y' et une branche de l'autre côté.

Il est clair que le même discours est valable si au lieu du cercle on a une ellipse.

Or, pour l'observation (3) du No. 4, on pourra dire que à une ellipse, à une parabole ou à une hyperbole dessinées sur π , va correspondre une ellipse sur π' .

Mais, il est difficile de prévoir si une parabole peut se transformer en une hyperbole, ou vice versa. Etant donné que 'le concret' ne donne pas de réponse, on a recours aux équations. On peut toujours choisir $d = d' = 1$; on a les équations

$$(8) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{x'} \\ y = \frac{y'}{x'} \end{cases}$$

Si on prend la parabole d'équation

$$y = x^2,$$

et si on la soumet à la transformation (8), on a :

$$\frac{y'}{x'} = \frac{1}{x'^2}$$

d'où

$$x' \cdot y' = 1.$$

On découvre ainsi que notre parabole se transforme en hyperbole.
Vice versa, il est évident que l'hyperbole d'équation

$$x \cdot y = 1$$

se transforme en la parabole

$$y' = x'^2.$$

Les enfants sont très frappés par le fait que l'outil analytique permet de dépasser l'expérience concrète, et par la conclusion que toute conique peut être transformée par projection en une autre conique.

VI. LE DESSIN EN PERSPECTIVE PAR LES ÉQUATIONS

pour dessiner les objets tels qu'on les voit, c'est-à-dire pour les dessiner en perspective, A. Dürer suggérait la méthode illustrée par la Figure 14. On sait que cette méthode - dessin sur une vitre - n'est pas indispensable; on a des règles de dessin en perspective, mais l'application de ces règles est souvent complexe.

Réfléchissons sur la méthode de Dürer: il est clair que cette méthode revient à la projection, sur le plan de la vitre, d'un objet réel placé sur le plan de projection faite à partir de l'oeil O de l'artiste. Par conséquent, on peut résoudre le problème sans se servir de vitre, mais en utilisant les

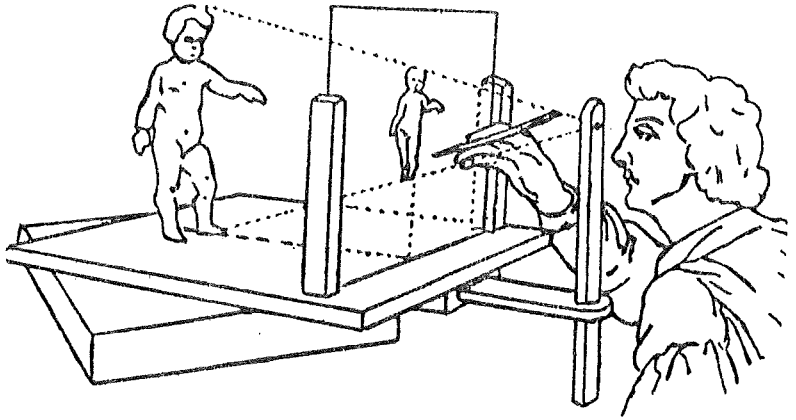


Fig. 14.

$$(7) \quad \begin{cases} x = d \cdot d' \frac{1}{x'} \\ y = d \frac{y'}{x'} \end{cases}$$

On va faire un exemple pour montrer comment 'dessiner par équations'.

Un architecte a conçu un clocher en forme de parallélépipède, haut de 40 mètres, à base carrée, avec un toit en pyramide, haut de 10 mètres.

Il se propose de dessiner le clocher de façon que l'impression donnée par le dessin observé à 1 mètre de distance soit exactement celle qu'on aurait en regardant le clocher réel du sommet d'une colline haute de 60 mètres. Alors, l'oeil O se trouve à une distance $d = 1$ du papier à dessin (plan π) et à une distance $d' = 60$ du sol (plan π'). Les sommets de la base carrée du clocher ont les coordonnées (Figure 15)

$$A'(90, 40), B'(80, 50), C'(90, 60), D'(100, 50),$$

dans un système de référence comme celui de la Figure 8.

Appliquant les équations

$$\begin{cases} x = \frac{60}{x'} \\ y = \frac{y'}{x'} \end{cases}$$

on a les coordonnées des points transformés

$$A\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right), B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right), C\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right), D\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

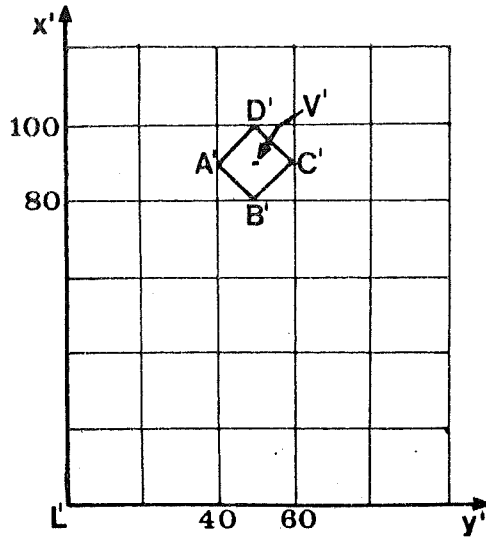


Fig. 15.

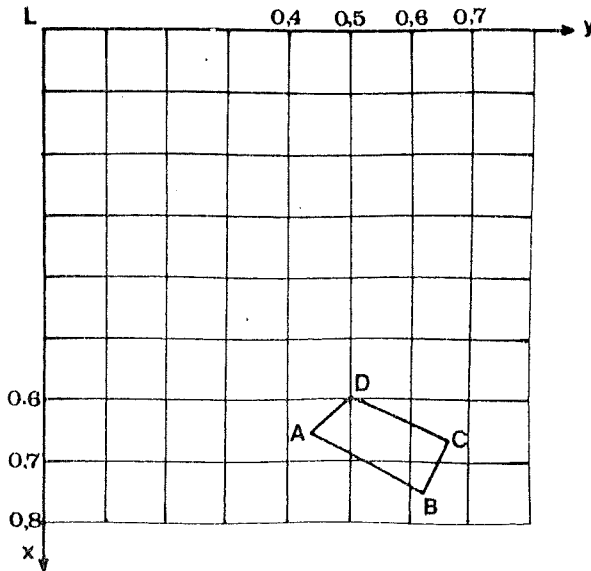


Fig. 16.

et on peut donc faire le dessin de la base du clocher (Figure 16) sur le plan π .

Pour dessiner la base supérieure du parallélépipède, il faut se rappeler que sa hauteur est de 40 mètres. Alors, le plan de la base supérieure (soit π') est de 20 mètres (c'est-à-dire 60-40) au dessous du point O d'observation. On a donc

$d' = 20$, et, cette fois, les équations sont les suivantes:

$$\begin{cases} x = \frac{20}{x'} \\ y = \frac{y'}{x'} \end{cases}$$

On obtient les coordonnées de la base supérieure:

$$\bar{A}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right), \bar{B}\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right), \bar{C}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \bar{D}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Finalement, comme la hauteur totale du clocher est de 50 mètres, son sommet se trouve 10 mètres au dessous de l'observateur, et on aura le transformé du sommet du toit pyramidal par l'application des équations

$$\begin{cases} x = \frac{10}{x'} \\ y = \frac{y'}{x'} \end{cases}$$

Comme le sommet V' avait les coordonnées $x' = 90$ et $y' = 50$ (regarder la Figure 15), on obtiendra:

$$V\left(\frac{1}{9}, \frac{5}{9}\right).$$

On est maintenant à même de compléter notre dessin (Figure 17).

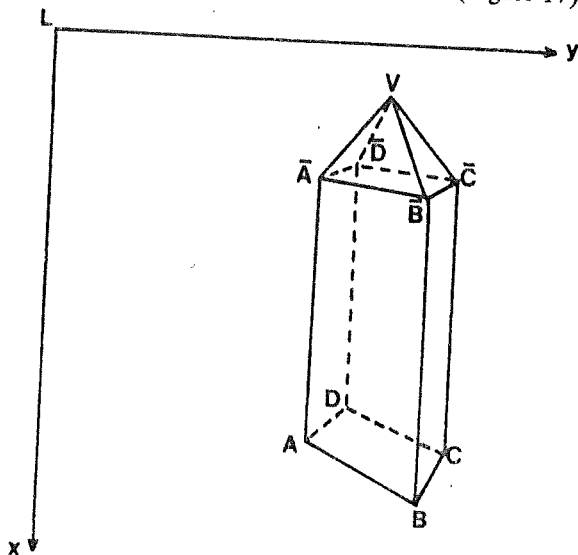


Fig. 17.

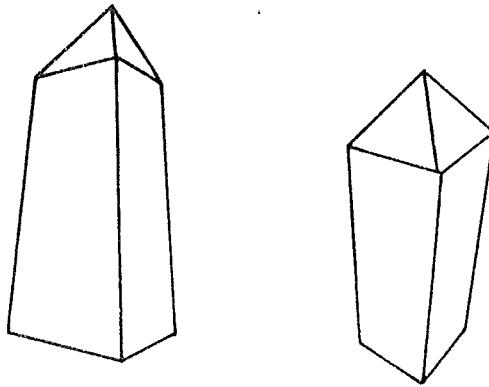


Fig. 18.

Il est clair que le processus que nous venons de suivre permet de construire le dessin du clocher de n'importe quel point de vue, et, donc, de donner une idée de l'effet visuel pour différentes positions de l'observateur (Figure 18).

VII. PHOTOGRAPHIE ET PROJECTION

La géométrie projective a bien des applications dans la technique photographique. En effet, la photographie n'est rien d'autre qu'une projection du plan de l'objet sur le plan de la plaque sensible, projection qui a comme centre l'objectif O . Le point O se trouve dans ce cas à l'intérieur des segments qui joignent les points correspondants (Figures 19 et 20). Il est donc évident que les

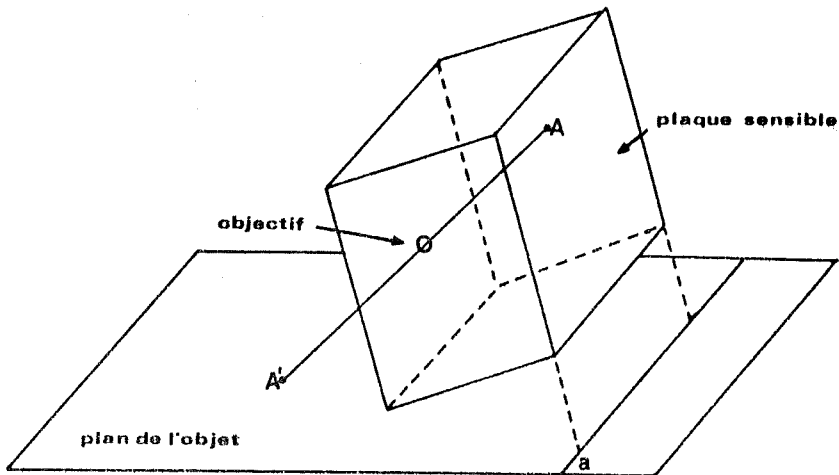


Fig. 19.

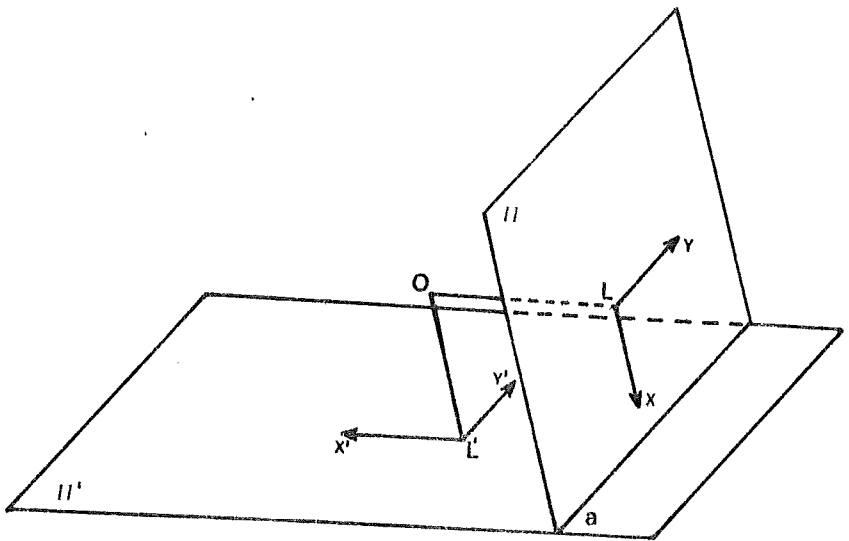


Fig. 20.

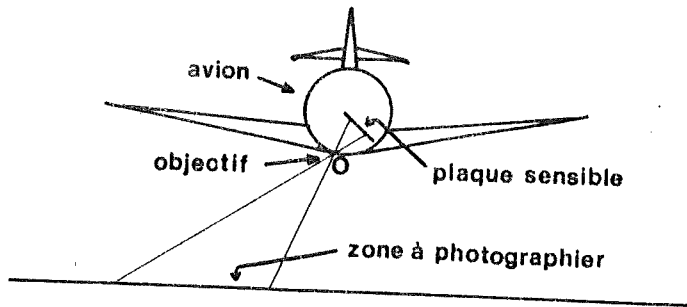


Fig. 21.

équations (7) permettent de résoudre tous les problèmes de technique photographique.

On donne un exemple concernant les levés topographiques faits, comme d'habitude, à partir de photographies prises d'avion. Si la zone à photographier ne se trouve pas juste au dessous de l'objectif (et cela peut arriver à cause de l'impossibilité de survoler un certain territoire), on obtient une photographie qui n'est pas semblable à la zone réelle (Figure 21). Il s'agit alors de tirer de cette photo 'déformée' le plan correct.

On a les données: altitude de l'avion: 70 mètres; distance de l'objectif à la plaque (distance focale): 70 centimètres; inclinaison de la plaque sur le terrain: 45° (Figure 22).

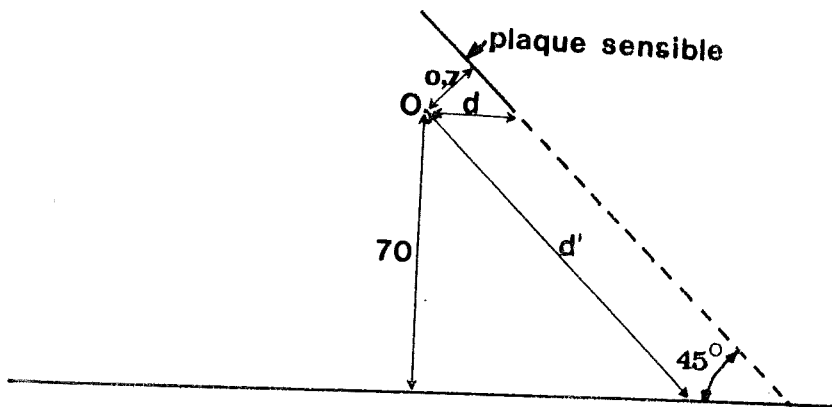


Fig. 22.

Il en résulte:

$$d = 1 \text{ mètre}, \quad d' = 100 \text{ mètres.}$$

Les équations sont donc

$$\begin{cases} x' = \frac{100}{x} \\ y' = \frac{100}{x} y. \end{cases}$$

Si, sur la plaque, la photographie de la zone est un quadrilatère de sommets (Figure 23,a)

$$A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{15}\right), C\left(\frac{5}{18}, \frac{1}{9}\right), D\left(\frac{5}{18}, \frac{5}{18}\right),$$

les coordonnées se rapportant à notre système de référence usuel, la transformation de cette image par nos équations, donnera

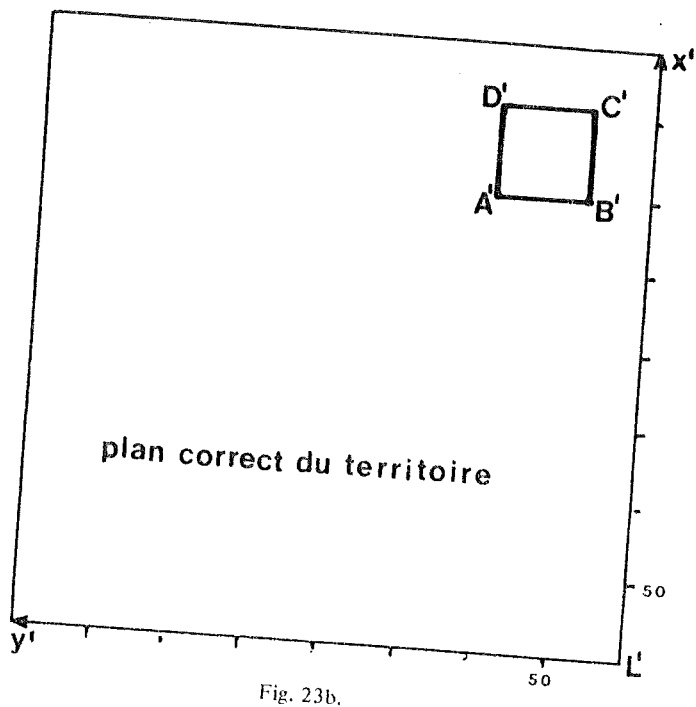
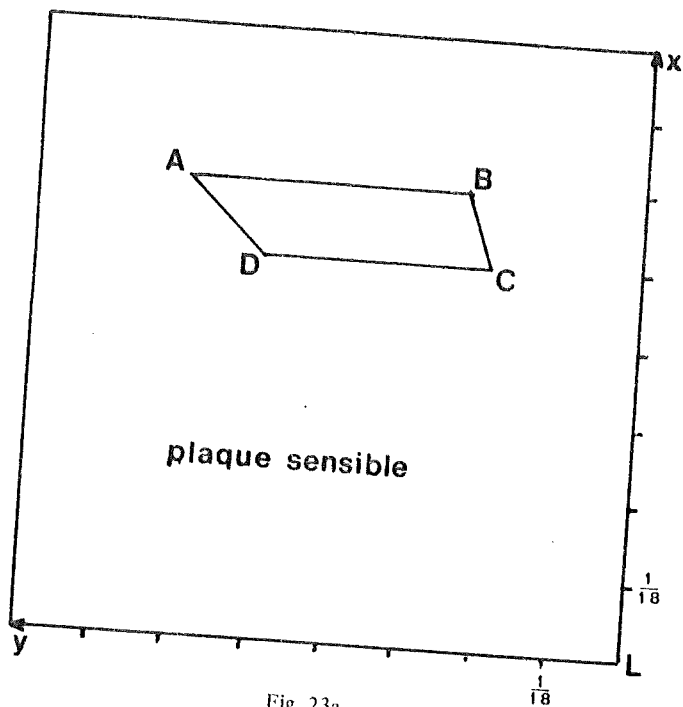
$$A'(300, 100), B'(300, 40), C'(360, 40), D'(360, 100).$$

Le quadrilatère $A'B'C'D'$ (Figure 23,b) est semblable à la zone réelle: il s'agit d'un carré.

Il est bon de remarquer que, puisqu'on a corrigé la déformation en utilisant les équations d'une projection, on pourrait obtenir le même résultat en projetant au moyen d'une lampe la plaque sur un plan convenablement placé.

VIII. CONCLUSIONS

Nous avons fait descendre à l'école les idées fondamentales de la géométrie projective de façon qu'elles soient accessibles même à des enfants de 13 ans.



C'est pour cette raison qu'on s'est borné à l'étude de projections particulières, qui sont très liées à des problèmes concrets. Mais il est possible, toujours en partant des mêmes problèmes réels, qui sont très intéressants aussi pour des élèves plus âgés, de développer l'étude que nous venons de faire, et de passer aux projections plus générales, vues comme produit de perspectives successives.

On se rend compte que cette branche de la mathématique classique-la géométrie projective-, qu'on a aujourd'hui tendance à développer de façon abstraite et formelle, se révèle extrêmement riche d'applications actuelles et motivantes.

Rome, 10 mai 1976

BIBLIOGRAPHIE

- Castelnuovo, E.: 'Les transformations affines dans le 1^{er} cycle de l'école secondaire', *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 1, No. 3, 1969.
- Castelnuovo, G.: *Geometria analitica e proiettiva*, Ed. Dante Alighieri, Roma, 1903.
- Coolidge, J.L.: *The Mathematics of Great Amateurs*, Clarendon Press, Oxford, 1949.
- Courant, R. and Robbins, H.: *What is Mathematics?*, Oxford University Press, 1941.
- Coxeter, H.S.M.: *Introduction to Geometry*, John Wiley Publishers, New York, 1961.
- de Finetti, B.: *Matematica logico-intuitiva*, Ediz. Cremonese, Roma, 1944.
- Enriques, F.: *Lezioni di geometria proiettiva*, Ediz. Zanichelli, Bologna, 1920.
- Freudenthal, H.: *Mathematics as an Educational Task*, Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1973.
- Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S.: *Anschauliche Geometrie*, Springer, Berlin, 1932.
- Libois, P.: *Espaces affins et projectifs*, Presses Universitaires, Bruxelles, 1965.
- Libois, P.: *Introduction à la géométrie*, III, chapitre 'L'espace projectif', Presses Universitaires, Bruxelles, 1964.
- Wolberg, O. A.: *Les idées fondamentales de la géométrie projective*, Editions pédagogiques de l'État, Moscou-Leningrad, 1949.