EMMA CASTELNUOVO

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES*

Je dois vous avouer que lorsqu'on m'a invitée à parler de l'enseignement des mathématiques, j'ai accepté avec enthousiasme car l'idée de cette recontre m'a paru très sympathique. Mais, ensuite, en réfléchissant, je me suis rendu compte que j'avais accepté avec une certaine légèreté – en effet le thème est très étendu et complexe. J'ai pensé alors que peut-être il serait bon de mettre en lumière cette étendue et cette complexité: il n'y aurait qu'à regarder loin dans l'histoire, et, en remontant à vol d'oiseau le long des siècles, chercher à voir l'influence qu'a eue, sur cet enseignement, tel ou tel mathématicien, et la société toute entière.

Les plus anciens documents 'sociaux' d'une transmission de notions mathématiques sont des tablettes babyloniennes de 2000–1800 a.C., et des papyrus égyptiens un peu plus récents, documents, les uns et les autres, sans aucune signature, tous donnant des règles, indiquant des processus à des élèves, à des citoyens qui – on est conduit à le penser – en avaient besoin. Voici un problème écrit sur une tablette babylonienne: "Une canne est appuyée à un mur; elle est longue de 30 unités. En haut elle glisse de 6. De combien la canne s'éloigne-t-elle de la base du mur?" Et voici la réponse, sans aucune explication, ni soutenue par aucun dessin: "tu dois faire le carré de 30 et de ce résultat soustraire le carré de la différence entre 30 et 6. Le résultat est le carré du nombre cherché".

Si cette 'page d'argile', premier document d'une application du théorème de Pythagore, s'adressait à des élèves, le but était certainement celui d''endoctriner' plutôt que d'instruire. Et d'ailleurs ces pages, comme je l'ai dit tout-à-l'heure, sont sans aucune signature: elles sont donc l'expression de la culture officielle du gouvernement centralisé de cette période là.

Mais avançons dans les siècles. Dans un dialogue de Platon, le Ménon, on trouve un remarquable exemple d'enseignement heuristique de la mathématique. L'esclave qui ne sait ni lire ni écrire (car lui-même affirme "j'appartiens à une famille d'esclaves") est à même de résoudre le problème de la duplication du carré. Et la démonstration avance petit à petit dans un serein dialogue entre maître (Socrate) et élève (l'esclave). C'est vrai: il y a un seul maître avec un seul élève, mais il ne s'agit pas de l'Emile de Rousseau; chez Platon l'élève représente une partie de la société, la partie la plus misérable, et les paroles du maître pourraient bien s'adresser non pas à un seul élève mais à toute une classe.

Educational Studies in Mathematics 8 (1977), 41–50.

Un siècle après, toujours en Grèce, Euclide écrit un traité de géométrie, 'les Eléments', ouvrage dont nous savons que la géométrie est construite sur des bases axiomatiques. C'est un ouvrage qui a eu, au bout de siècles, une énorme influence sur la construction mathématique, sur la place de la mathématique dans la philosophie des sciences, mais qui a eu, aussi, autant d'influence, et souvent néfaste, sur l'enseignement des mathématiques. Comme le dit Felix Klein, Euclide n'avait pas écrit son livre pour l'introduire dans les classes des enfants. Mais voilà ce qui est arrivé: pendant des siècles, ce qu'on appelle aujourd'hui l'instruction secondaire a été reléguée ou dans les monastères ou dans quelques écoles pour une minorité d'élèves privilégiés ou, plus souvent, confiée au maître, au précepteur de famille. Les études supérieures étaient suivies par une minorité encore plus restreinte dans quelques universités ou académies. L'enseignement des mathématiques et, en particulier, l'étude des Eléments d'Euclide, s'adressait donc à une fort petite élite. Et nous savons que même ces jeunes 'un peu choisis' avaient de grandes difficultés à saisir l'esprit du traité euclidien. Nous le savons, entre autres, par A.C. Clairaut qui fut encouragé par cette incompréhension "plus que justifée", selon ses paroles, à écrire un petit livre de géométrie qui se détache nettement des Eléments d'Euclide et qui part de l'observation de la réalité.

On est au milieu du 18ème siècle.

Lorsque, après cinquante ou cent ans, la société donne une structure à l'enseignement secondaire, il arrive que dans tous les pays les Eléments d'Euclide ou une reduction ou une adaptation de ce traité entrent dans toutes les écoles secondaires. Et les enfants du monde entier commencent à ne pas comprendre la mathématique. Cette incompréhension a un reflet social: il arrive en effet que les enfants, une fois terminée l'école primaire, soient envoyés vers des écoles différentes, en particulier à cause de la mathématique: les parents qui n'avaient pas la possibilité de faire aider leurs enfants par un professeur privé de mathématique, en plus de l'école, les ont inscrits dans des collèges techniques, où l'enseignement de la mathématique, tout en s'inspirant d'Euclide, est moins rigoureux.

Et générations et générations se ressentent de cette imposition, de cette contrainte à leur développement naturel, de ce complexe de culpabilité de ne pas comprendre; et souvent, même aujourd'hui, les psychanalistes découvrent dans le fond de l'âme humaine la terreur de la mathématique. Car on doit se rendre compte que le contenu – une mathématique axiomatisée – oblige le maître à suivre une méthode d'enseignement autoritaire, car il n'est pas possible qu'un enfant puisse participer à la construction d'une science dont l'abstraction dépasse les limites de sa compréhension. La mathématique est donc présentée toute faite, sous son aspect le plus pur.

Les années s'écoulent, et même les oeuvres d'un Comenius ou d'un Pestalozzi, et plus récemment d'un Decroly, accusant l'école et, avec l'école, toute la société de transmettre des notions plutôt que de former l'esprit scientifique, n'ont pas eu une grande influence sur l'enseignement des mathématiques. Car, *contenus et méthodes de cet enseignement devaient être discutés par les mathématiciens mêmes.*

Un espoir avait jailli avec l'oeuvre de Felix Klein: la géométrie des transformations soutenue dans son programme d'Erlangen, en 1872, enlevait tout absolutisme à la géométrie euclidienne, qui devait être envisagée comme un cas particulier d'autres géométries, caractérisées, chacune, par une structure de groupe, et obtenue l'une à partir de l'autre par restriction ou abstraction. Embrasser ce programme signifiait donner à l'enseignement mathématique un esprit dynamique. Mais, sauf en Allemagne, où les idées pédagogiques de Klein ont eu une certaine influence, l'enseignement mathématique ne s'en est pas du tout ressenti.

Et la constitution en 1908 de la Commission Internationale pour l'Enseignement de la Mathématique, dirigée par de grands mathématiciens non plus n'a été capable de 'secouer' le système.

Mais la société presse: nouvelles couches sociales et nouvelles générations d'enfants continuent à ne pas comprendre.

En 1950 un groupe de mathématiciens se lie avec des psychologues et des pédagogues dans le but d'envisager le problème d'un point de vue plus large: on veut l'étudier à l'aide des études modernes sur le développement des structures mentales chez l'enfant et chez l'adolescent. L'influence de cette nouvelle Commission (la Commission pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques) a été et est toujours remarquable mais son rayon d'action est encore assez restreint.

Des efforts plus 'bureaucratiques' ont été faits, toujours dans ces dernières vingt années, par l'OCSE (Organisation de Coordination Scientifique Economique) et par l'UNESCO, qui ont intéressé les Ministères de l'Education Nationale de chaque pays au moyen de Congrès et de publications. Dans l'un de ces congrès, en 1959 à Royaumont (France), s'éleva la voix puissante de Dieudonné avec son "à bas les triangles! à bas Euclide!" L'influence de ce grand mathématicien sur le plan didactique a été énorme: 'à bas Euclide' signifie se libérer de l'axiomatique euclidienne; mais, comment la remplacer? par quoi? Certainement par une autre axiomatique, disent la plupart des mathématiciens: l'axiomatique de Bourbaki.

A la place d'une méthode qui laisse l'enfant dans une position passive va s'installer une méthode qui n'est pas moins autoritaire. Dans beaucoup d'écoles de beaucoup de pays fait son entrée officielle la mathématique nouvelle, la soi-disant mathématique moderne, la théorie de ensembles, ou, mieux, 'l'ensemblisme à tout prix'. Et voilà ce qui arrive: les enfants de 12 à 13 ans ne se demandent plus pourquoi ils doivent faire des démonstrations si compliquées pour prouver, à la manière d'Euclide, des propriétés qui leur apparaissent évidentes, car 'on les voit'; ils se demandent plutôt pourquoi ils doivent fermer leurs yeux et imaginer une droite comme un ensemble de points renfermés dans un diagramme de Venn pour avoir une idée claire de la position de deux droites du plan. Ils se demandent aussi pourquoi il leur est défendu d'ouvrir ou fermer une porte pour étudier les rotations et pourquoi ils doivent au contraire songer à une correspondence de points. Bref, *ils se demandent pourquoi la mathématique doit être si loin de la réalité.*

La réalité. Quel est son rôle dans l'enseignement de la mathématique? Nous avons déjà dit qu'au milieu du 18ème siècle A.C. Clairaut s'était dressé contre l'idée de faire étudier aux débutants les Eléments d'Euclide. "Il faut partir de la réalité", avait-il dit; "le monde qui entoure l'enfant lui donnera la motivation pour construire les mathématiques.," C'es justement de cette façon que l'élève pourra jouer un rôle actif dans l'étude des mathématiques, en étant lui-même leur constructeur.

Il faut partir de la réalité. Mais, qu'est-ce que cela signifie? De quelle façon peut-on mathématiser la réalité? Comment l'enfant pourra-t-il saisir le passage de l'observation à mathématisation?

J'aimerais vous en donner seulement une idée, et il me semble que le mieux est de présenter un on deux exemples. Pour être plus claire je vous montrerai quelques photos.

Voilà un exemple issu d'un phénomènone naturel: *espace affin et espace projectif.*

La géométrie affine offre un exemple de la manière dont on peut développer toute une théorie en se basant sur un petit nombre d'axiomes; cette étude se présente avec une grande élégance. Mais, on doit toujours se rappeler que nous ne devons pas donner aux enfants une théorie toute faite dans sa pureté finale. Ce ne serait pas un cadeau productif. D'autre part, c'est justement le sujet des transformations affines qui nous suggère de partir du réel physique, qui nous invite à observer et, successivement, à mathématiser.

Regardez l'ombre d'une grille exposée aux rayons du soleil ou à la lumière d'une lampe ponctuelle (Figure 1). On observe: les effets d'ombre sont différents. Les enfants vous diront qu'ils n'avaient jamais remarqué cette différence, qu'ils n'avaient jamais remarqué le parallélisme, jamais vu qu'une rangée d'arbres donne des ombres parallèles (Figure 2); et ils vous dirons aussi que l'ombre de la grille donnée par la lampe les fait penser à la perspective.

C'est curieux: également les artistes ne remarquèrent l'invariance du parallélisme sous l'action des rayons du soleil qu'*après* avoir découvert les lois de la perspective. La gravure de A. Dürer "Saint-Jérôme dans sa cellule" (Figure 3)

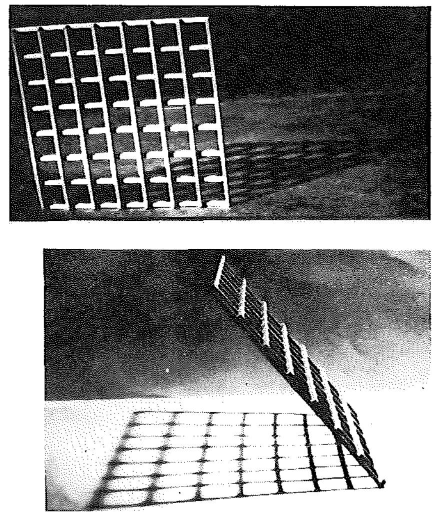

Fig. 1.

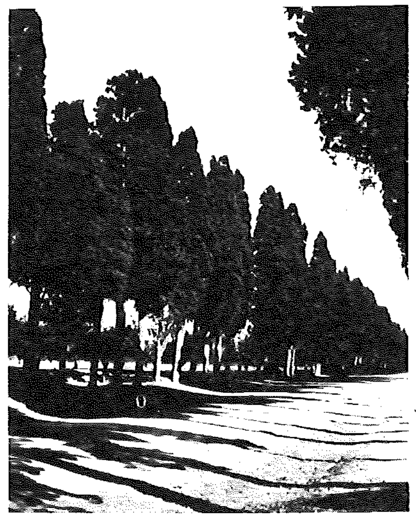

Fig. 2.

est un des premiers tableaux où est mise en évidence l'ombre donnée par le soleil: on remarque sur le mur l'ombre d'une fenêtre rectangulaire.

Jusqu'ici c'est de l'observation, une observation qui se développe dans un dialogue fort intéressant même avec des élèves très jeunes.

Mais on peut avancer, toujours en partant du concret. Une toile élastique,

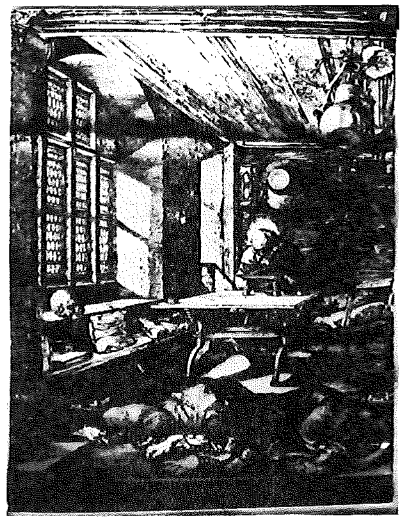

Fig. 3.

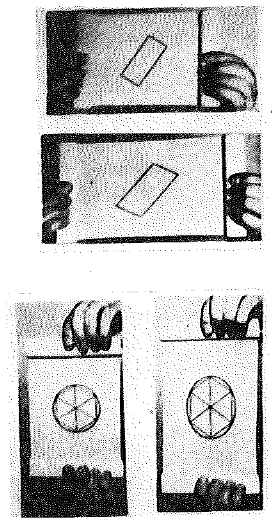

Fig. 4.

étirée, nous montre qu'un rectangle se transforme en un parallélogramme (Figure 4): le parallélisme est invariant; il s'agit, encore une fois, d'une transformation affine. Et cette expérience conduit, toute seule, à une expression verbale qui se traduit facilement en symboles. En effet, si $P(x, y)$ est une point d'un plan cartésien dessiné sur la toile, et si on étire la toile dans la

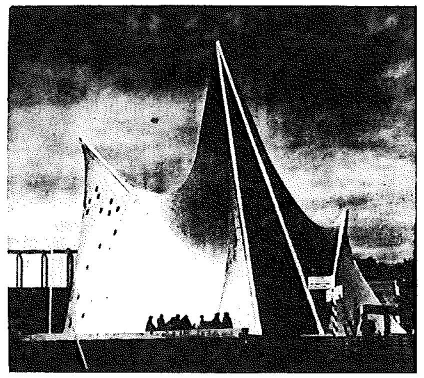

Fig. 5.

direction de l'axe x par la 'force m' et dans la direction de l'axe y par la 'force n', les coordonées x, y de P se transformeront en x', y', telles que

$$\begin{cases} x' = mx \\ y' = ny. \end{cases}$$

Les équations de l'affinité naissent donc du concret, et, justement à cause de leur origine, deviennent elles-mêmes quelque chose de concret, quelque chose de si maniable que, à partir de celles-ci, les élèves ont la possibilité de découvrir, analytiquement, d'autres propriétés.

On a ainsi donné au chapitre des transformations affines un développement tout à fait différent de celui qui s'est passé dans l'histoire.

Et l'espace projectif? Quelles sont les propriétés invariantes pour ces transformations? Il y a toujours des enfants qui posent cette question. Et voilà, pour nous maîtres, un problème didactique encore ouvert: le birapport a été introduit par Pappus d'un point de vue loin de la réalité. Serait-il possible de le faire jaillir à partir de l'observation et de la manipulation d'un concret? Serait-il possible de reconstruire l'histoire en s'éloignant de l'histoire?**

Et encore un exemple, issu, cette fois, non pas de la réalité de la nature, mais de la réalité de la technique: je veux dire quelque chose à propos de *l'architecture moderne.*

Il n'y a pas d'enfant qui ne soit frappé par une élégante solution technique. Une construction hardie comme le Pavillon de Philips à l'Exposition de Bruxelles (Figure 5), une des merveilles de Le Courbusier, attire tout le monde. Mais on est encore plus fasciné lorsqu'on connaît la mathématique qui est en-dessous. Il s'agit d'une quadrique: le paraboloïde hyperbolique.

Ainsi motivé, on est facilement conduit à étudier les quadriques. Il est certain que, avec de très jeunes élèves, on ne peut pas suivre la théorie classique; il faut construire un chapitre qui part du concret.

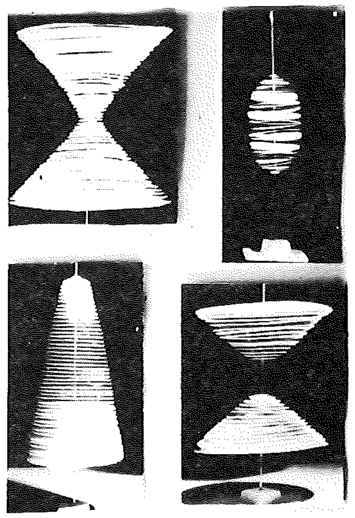

Fig. 6.

On présente tout d'abord les quadriques de révolution obtenues par une rotation de quelque conique; ce sont: l'ellipsoïde, le paraboloïde eliptique, et les deux hyperboloïdes (à 1 et à 2 nappes) (Figure 6).

De ces surfaces on passe à des quadriques générales (non pas de révolution) par une transformation affine. Mais à cette classification échappe justement la quadrique qui nous intéresse: le paraboloïde hyperbolique ou à 'la selle'. On peut l'obtenir d'une façon tout à fait différente, mais assez élémentaire en s'appuyant sur la notion de barycentre: il suffit de connaître la loi d'équilibre du levier. Voici la construction: déterminer le barycentre de quatre masses disposées aux sommets d'un quadrilatètre gauche, soumises à la condition que le rapport de deux de ces masses quelconques soit égal à celui des deux autres. La construction pratique peut se faire en même temps que l'étude théorique, on voit ainsi 'naître' cette surface avec son double système de droites: le point d'intersection de deux droites de systèmes différents est un barycentre (Figure 7). De ce fait vient la particulière résistence de cette quadrique.

Regardez la simple construction d'un toit, et, encore une fois, le Pavillon de Le Courbusier (Figure 8).

Je n'ai donné que deux exemples, mais on peut facilement comprendre que le réel, physique ou social, nous offre une quantité de situations intéressantes et motivantes: de la génétique, qui porte à des questions de probabilité, jusqu'à l'économie, avec tous les problèmes de programmation, pour ne citer que les études les plus récentes.

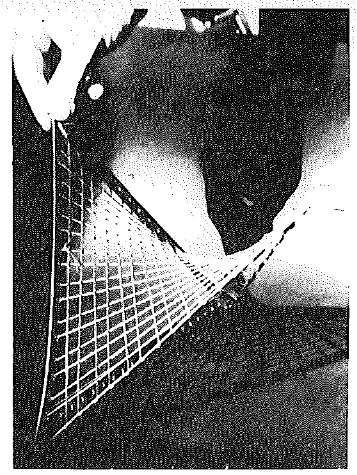

Fig. 7.

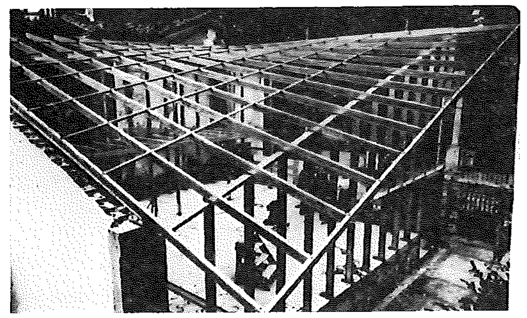

Fig. 8.

Il est évident qu'on doit chercher à mettre en relief les liens entre l'un et l'autre sujet, liens qui peuvent avoir un caractère réel ou théorique et, dans ce dernier cas, les élèves pourront se rendre compte de la force de la mathématique sous-jacente qui règle par les mêmes lois ou les mêmes structures le développement de sujets parfois très différents l'un de l'autre.

Je crois qu'aujourd'hui personne ne pourra dire que, par un tel enseignement, on baisse la mathématique. On perd peut-être la pureté, entendue dans le sens le plus étroit, mais on donne aux élèves une idée de ce qu'est la mathématique, de ses rapports avec chaque branche du savoir, de la puissance unificatrice de ses méthodes. Et on leur donne surtout le sens de la liberté scientifique: tous les élèves doivent être à même non seulement de comprendre mais aussi de participer à la construction de la mathématique. Tous les élèves doivent éprouver l'ardeur de la recherche et la joie de la découverte.

Dans cette perspective je vois aujourd'hui le futur de l'enseignement de la mathématique: un enseignement qui prend sa force du réel, du concret, de la vie, et donc toujours ouvert et toujours renouvelé. Un enseignement tourné vers l'avenir, mais auquel on ne doit pas donner l'appellatif de 'mathématique nouvelle', car il n'y a pas de fracture, il n'y a pas une césure abrupte avec la mathématique classique. Au contraire, il faut mettre en relief toute la continuité merveilleuse de l'histoire de la mathématique. Un enseignement qui ne doit jamais dédaigner de retomber dans le concret, dans les applications pour prendre conscience de sa puissance.

Et, pour terminer, un mot aux jeunes, aux étudiants en mathématique, à ceux qui se préparent à devenir demain professeurs dans une école secondaire.

J'espère avoir mis en lumière que l'enseignant de mathématique a aujourd'hui, beaucoup plus qu'hier, des perspectives intéressantes de travail: il peut développer des chapitres classiques en leur donnant une ligne tout à fait différente; il peut introduire dans le programme des arguments destinés, jusqu'à maintenant, aux seuls universitaires, en exaltant les applications pratiques et en donnant à la théorie une base concrète; il peut donner une interprétation différente à une théorie. Il peut, enfin, créer tout un tissu systématique qui relie les divers sujets. Tout ceci, l'enseignant pourra le faire s'il a confiance dans l'intelligence de ses élèves: son travail didactique sera, alors, un véritable travail scientifique.

NOTES

* Conférence à la fête du 70ème anniversaire de Hans Freudenthal, le 17 septembre 1975.

** Voir *Educational Studies in Mathematics* 7, No. 4 (1976).