E. CASTELNUOVO, D. ET C. GORI-GIORGI

CONIQUES ET GRAVITATION UNIVERSELLE

Résumé. On part de considérations élémentaires de géométrie et de physique pour introduire les lois de la gravitation universelle et de la constance de la vitesse aréolaire. En se basant sur ces lois on dessine, par approximation, quelques orbites, et on découvre graphiquement qu'il s'agit d'ellipses. La construction qu'on a suivi conduit à trouver l'équation pédale de l'ellipse; or, on peut interpréter cette équation, qui traduit une propriété géométrique, d'un point de vue physique: on obtient ainsi la loi de la conservation de l'énergie. Cette loi fait découvrir que les orbites peuvent aussi être des paraboles et des hyperboles.
On est à même d'aborder les problèmes suivants:
- envoyer un satellite artificiel sur une orbite préétablie (sondes spatiales);
- déplacer un satellite d'un point à un autre de l'espace (rendez-vous spatial);
- envoyer un satellite dans une orbite syncrone (satellites télévisés).

Le sujet a été développé dans un lycée de Rome (élèves de 16–17 ans).

0. INTRODUCTION

Le sujet 'gravitation universelle' est développé à un niveau universitaire en se basant sur la représentation du mouvement en coordonnées polaires, sur l'accelération radiale et transverse et sur l'équation différentielle de Binet. C'est à partir de cette équation qu'on découvre que les orbites d'un corps céleste sont des coniques. Il est évident que cette manière de traiter ne se prête pas à un niveau pré-universitaire.

Dans l'enseignement secondaire on se borne à l'étude des orbites circulaires. On détermine celles-ci en comparant la force d'attraction newtonienne avec la force centrifuge, et, par ce moyen, on arrive à déterminer les orbites sans avoir recours au calcul différentiel.

Mais les orbites circulaires ne permettent pas d'envisager les cas dans lesquels on s'approche ou on s'éloigne du corps autour duquel on se meut, c'est-à-dire elles ne permettent pas l'étude des voyages spatiaux. Le développement est donc très pauvre et sans grand intérêt pour les élèves. D'autre part, c'est justement l'astronautique qui fascine la jeunesse. Nous avons alors cherché à développer le sujet dans toute sa richesse sans avoir recours aux équations différentielles mais seulement à la géométrie et à la physique élémentaire. Dans ce but on a profité de la construction des orbites par approximation. On a ainsi découvert des propriétés qui, généralisées, ont ouvert la voie à la résolution analytique du problème.

Pourtant, si d'un côté la méthode utilisée n'est pas toujours purement

Educational Studies in Mathematics **10** (1979) 323–359. 0013–1954/79/0103–0323$03.70

déductive, d'un autre côté on introduit les élèves à une voie de recherche de la réalité, celle basée sur les méthodes numériques, qui aujourd'hui, avec la diffusion des ordinateurs, est toujours plus suivie.

Ce sujet a été développé par Daniela dans son Lycée de Rome (élèves de 16–17 ans) et les élèves l'ont accueilli avec un véritable enthousiasme.

Le langage utilisé dans ces pages est vivant et 'dialogué' car on a voulu montrer exactement la ligne suivie en classe. Ici et là on a suggéré des 'voies alternatives' que les collègues peuvent choisir selon leur sensibilité didactique et selon la culture de leurs élèves.

1. A LA DÉCOUVERTE DE LA LOI D'ATTRACTION UNIVERSELLE

Je lance un objet; il retombe. Je sais bien que cela tient au fait que la terre l'attire.

On lance un satellite; quelques fois il retombe, d'autres fois non. Pourquoi? Et pourtant il y a toujours une force qui l'attire vers la terre. Avant de repondre au 'pourquoi?' cherchons à comprendre quel est le genre de force exercée par l'attraction.

Réflechissons: la terre rayonne une force F tout autour, juste comme le fait une lampe avec la lumière. Dans le cas de la lampe, la lumière devient de plus en plus faible au fur et à mesure qu'on s'éloigne car la même lumière, à une distance plus grande, doit se répandre sur une surface sphérique plus grande. Et, comme la surface d'une sphère de rayon r est donnée par

$$S = 4\pi r^2,$$

on comprend que si r est double, la surface devient 4 fois plus grande, si r triple, la surface devient 9 fois plus grande, ... Mais alors, la même lumière, si elle doit se répandre sur une surface 4 ou 9 ou . . . fois plus grande, aura en chaque point une intensité 4 ou 9 ou . . . fois plus petite. L'intensité d'illumination d'une surface est, donc, inversement proportionnelle au carré de la distance que la surface a de la lampe.

On comprend aussi que si la puissance de la lampe est double, l'illumination deviendra partout double, et, en général, si la lampe est M fois plus puissante, l'illumination deviendra M fois plus grande. La même chose arrive pour la force F d'attraction: F est inversement proportionnelle au carré de la distance r, tandis qu'elle est directement proportionnelle à la masse M du corps qui exerce l'attraction.

On peut donc écrire la loi:

$$F = h\frac{M}{r^2},$$

où h est un coefficient qui tient à la masse m du corps attiré. On trouve expérimentalement que

$$h = 6 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$$

dans le système de mesure MKS.

La loi

$$F = 6 \times 10^{-11}\,\frac{Mm}{r^2}$$

a été découverte par Isaac Newton en 1686. Cette loi est valable non pas seulement pour les satellites attirés par la terre, mais aussi pour les planètes attirées par le soleil et, en général, pour n'importe quel corps attiré par un autre.[1]

2. UNE AIRE QUI NE CHANGE PAS: L'INVARIANCE DE LA VITESSE ARÉOLAIRE[2]

On a trouvé la loi qui donne l'intensité de la force d'attraction exercée par la terre. Cette force – il est évident – sera dirigée vers le centre de la terre, c'est-à-dire vers un point. C'est justement de ce fait que descend une propriété pas facile à prévoir. On va la découvrir: imaginons un satellite qui entre en orbite autour de la terre; lorsqu'il se trouve dans la position P (Figure 1), à une distance r de la terre T, il aura une certaine vitesse v_1: par exemple il parcourra le segment PQ dans 1 seconde. S'il n'y avait pas la force d'attraction vers la terre,[3] le satellite parcourrait dans la 2ème seconde un segment $QR = PQ$, et ainsi de suite en s'éloignant de la terre. Mais, à chaque instant – nous le savons bien – il y a la force d'attraction vers T. Notre satellite, lorsqu'il se trouve dans la position Q, est donc soumis à deux forces: l'une le conduirait, par inertie, dans la position R; l'autre, dans la position Z. Il s'agit de composer ces deux

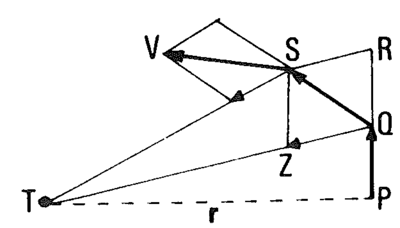

Fig. 1.

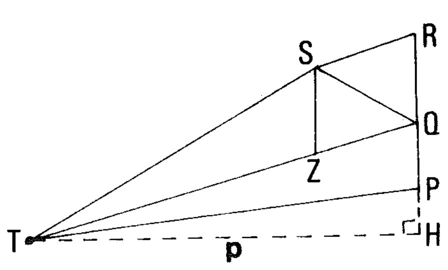

Fig. 2.

segments par la règle du parallélogramme: on obtient le segment $QS = v_2$. Donc, notre satellite, après la 2ème seconde, est arrivé dans la position S.

Et ensuite? Ensuite le discours continue: s'il n'y avait pas l'attraction terrestre, dans la 3ème seconde il se déplacerait d'une longueur égale à QS sans changer de direction; mais, il est attiré de la terre et alors 'il courbe' et il se porte en V avec $SV = v_3$; et cela va continuer.

Il est bon, maintenant, de refaire le dessin et de bien l'observer (Figure 2). On découvre que les triangles TPQ et TQS ont *la même aire* car:

(1) TPQ a comme base PQ et comme hauteur TH
TQR a comme base $QR = PQ$ et comme hauteur TH
et donc TPQ est équivalent à TQR.

(2) TQS et TQR ont la même base TQ et les sommets opposés se trouvent sur une droite parallèle à la base, et pourtant ils ont la même hauteur. Donc TQS est équivalent à TQR.

En conclusion, les triangles TPQ, TQS sont équivalents.

Or, la chose importante est qu'il n'y a pas seulement ces deux triangles qui ont la même aire, car le même raisonnement est valable pour les triangles successifs (Figure 3). Voici ce qui arrive:

$$\text{aire } TPQ = \text{aire } TQS = \text{aire } TSV = \ldots$$

c'est-à-dire

$$1/2\, p_1 v_1 = 1/2\, p_2 v_2 = 1/2\, p_3 v_3 = \ldots .$$

où $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sont les distances de T des directions $v_1, v_2, v_3, \ldots$.
On découvre que, toujours:

$$p \cdot v = k \quad \text{(constante).}$$

C'est la loi de *l'invariance des aires*, découverte par Johannes Kepler en 1602. Cette loi est une conséquence du fait que la force d'attraction est toujours dirigée vers le même point (force centrale), tandis qu'elle est indépendente de

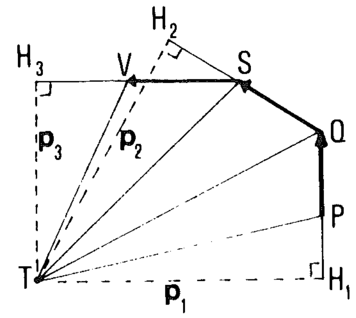

Fig. 3.

l'intensité de la force. C'est justement cette loi qui nous fait comprendre le 'jeu' entre la vitesse du satellite et sa distance du centre de la terre: en effet, lorsque le satellite se trouve près de la terre, c'est-à-dire lorsque p est petit, v doit être grand. On comprend alors que le satellite va d'autant plus vite que sa distance à la terre est plus petite. C'est cette vitesse énorme qui lui permet de vaincre l'attraction terrestre et de ne pas tomber: le satellite entre en orbite et continue à tourner autour de la terre.

Nous avons donc trouvé une première réponse à la question "pourquoi se fait-il que, quelques fois, un corps ne retombe pas sur la terre?"

La réponse est: "si la vitesse est assez grande, le satellite est à même de vaincre l'attraction terrestre".

Mais, quelle est la valeur de cette vitesse? Quels raisonnements et quels calculs doit-on faire afin qu'un satellite puisse entrer dans telle ou telle orbite? Pour résoudre ce problème d'astronautique on doit, comme première chose, découvrir la forme des orbites.

3. QUELQUES IDÉES SUR LA FORME DE L'ORBITE

Afin d'avoir une idée sur la forme de l'orbite on continue le dessin de la Figure 3: il faut appliquer avec précision à chaque triangle les deux lois

$$pv = k,$$

$$F = h\frac{M}{r^2}.$$

Dans le dessin de la Figure 4 les segments PQ, QR, . . . représentent l'espace parcouru par le satellite dans une seconde. Il est évident que si on part de l'espace parcouru dans 1/10 de seconde les segments seront plus courts et on

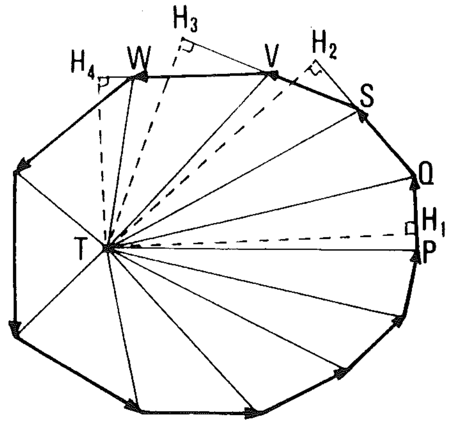

Fig. 4.

commencera à 'voir' plus clairement la forme de l'orbite (Figure 5): c'est une courbe qui paraît enveloppée par ses tangentes.

On voit tout de suite que la courbe n'est pas un cercle. Mais, si dans notre dessin on indique les points $H_1, H_2, \ldots$, pieds des perpendiculaires baissées de T aux tangentes, on dirait que ces points se trouvent sur un cercle (Figure 6). Est-ce vrai? On va refaire la construction en partant d'une situation différente soit pour la distance de la terre soit pour la vitesse (Figure 7). Aussi dans ce cas les points H semblent se trouver sur un cercle. On peut démontrer que cette propriété, qui traduit géométriquement le fait que la force d'attraction est inversement proportionnelle à r^2, est générale mais la démonstration est assez difficile.[4]

4. L'ORBITE EST UNE ELLIPSE

On a développé l'étude de l'orbite par étapes, et, à la fin, on a découvert que l'orbite est une ellipse.

4.1. *Construction de l'orbite comme enveloppe*

Le dessin du n° précédent suggère une construction tout à fait simple de l'orbite.

On dessine un cercle (Figure 8) et on fixe un point T à l'intérieur du cercle dans une position quelconque. Si on dispose une équerre de façon que l'un des côtés de l'angle droit passe toujours par le point T et que le sommet de l'angle droit glisse sur la circonférence, alors l'autre côté de l'angle droit détermine la direction de la vitesse et, donc, est une tangente à l'orbite.

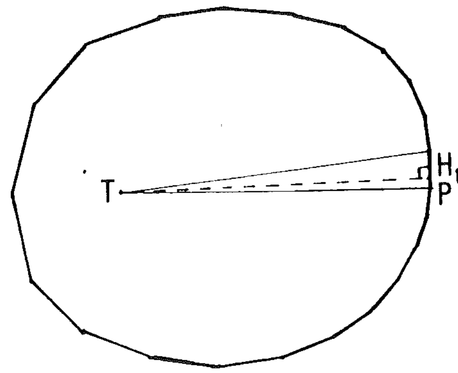

Fig. 5.

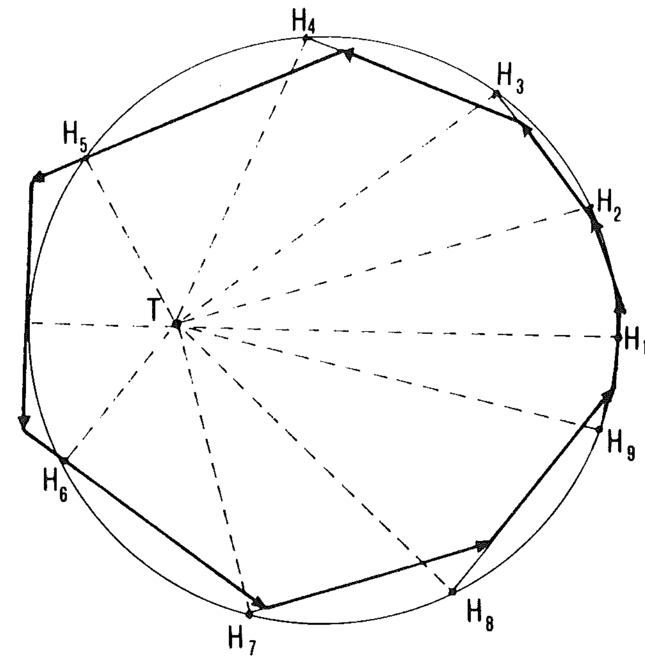

Fig. 6.

Pour chaque position du sommet de l'équerre (la position $H_1, H_2, \ldots$) on aura une tangente à l'orbite. On voit 'naître' la courbe non pas comme lieu de points mais comme enveloppe des ses tangentes.

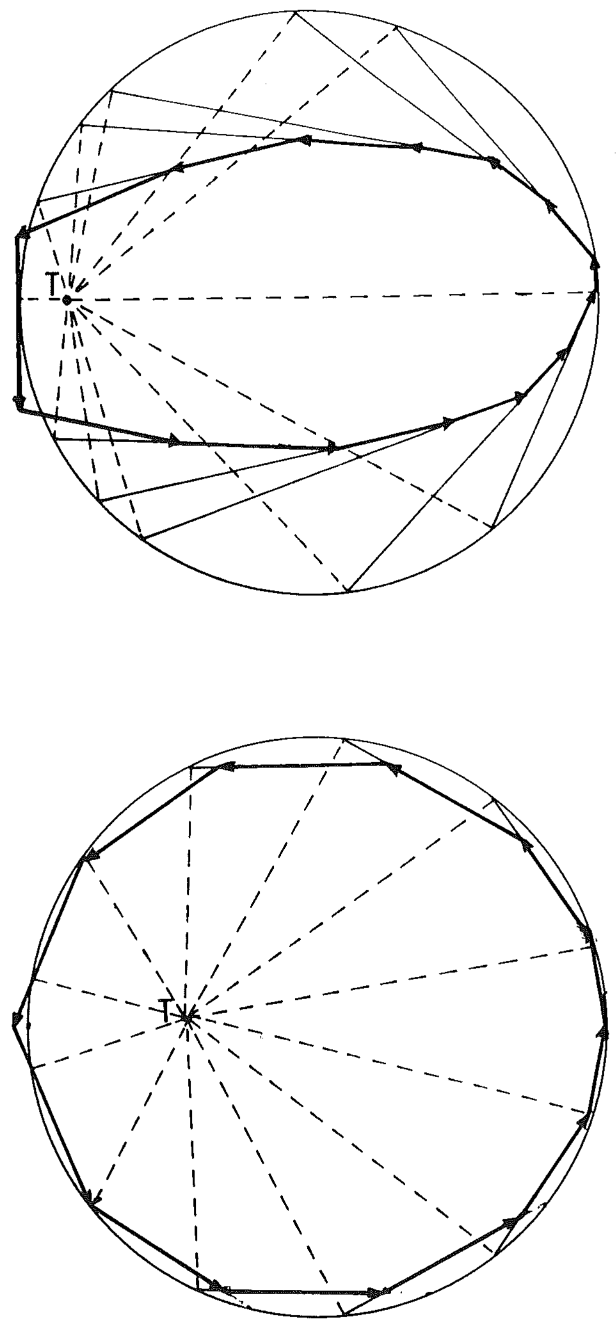

Fig. 7.

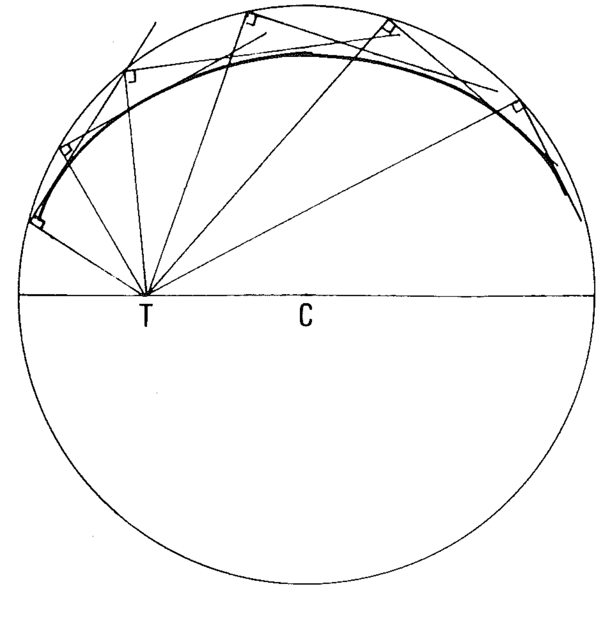

Fig. 8.

4.2. *Une propriété des angles*

Examinons la courbe-enveloppe que nous venons de dessiner (Figure 9). Soient H, H' deux points du cercle, très près l'un de l'autre, et P le point d'intersection des tangentes en H et H', dessinées à l'aide de l'équerre. On voit tout de suite que les quatre points $THH'P$ se trouvent sur la circonférence de diamètre TP. Donc la droite HH' est corde des deux circonférences, l'une de diamètre TP et l'autre de diamètre AA'.

De la propriété des angles inscrits dans un cercle (on parle du cercle de diamètre TP) résulte que:

$$\alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta'.$$

Or

$$\gamma = \alpha' + \beta'$$

étant un angle extérieur du triangle THH', et donc

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Ce résultat devient significatif si on pense que H' se déplace vers H le long de la grande circonférence. Voici ce qui arrive: la droite HH' va être tangente à la grande circonférence en H, P devient un point de la courbe, l'angle β va disparaître, et par conséquent on a:

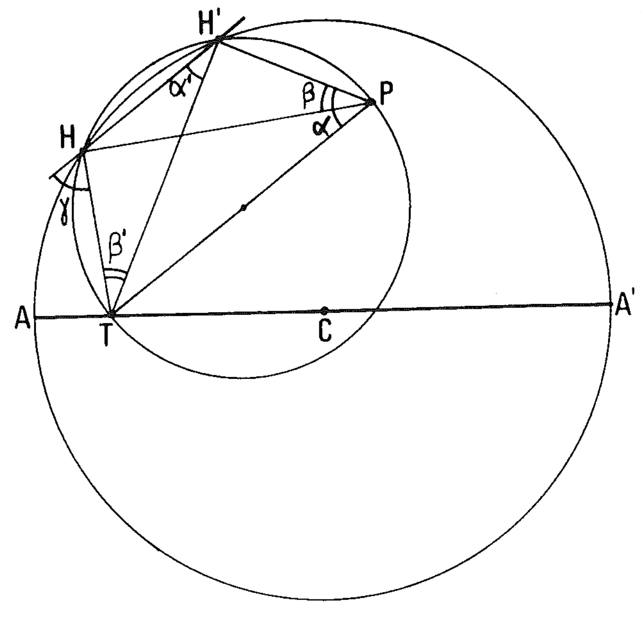

Fig. 9.

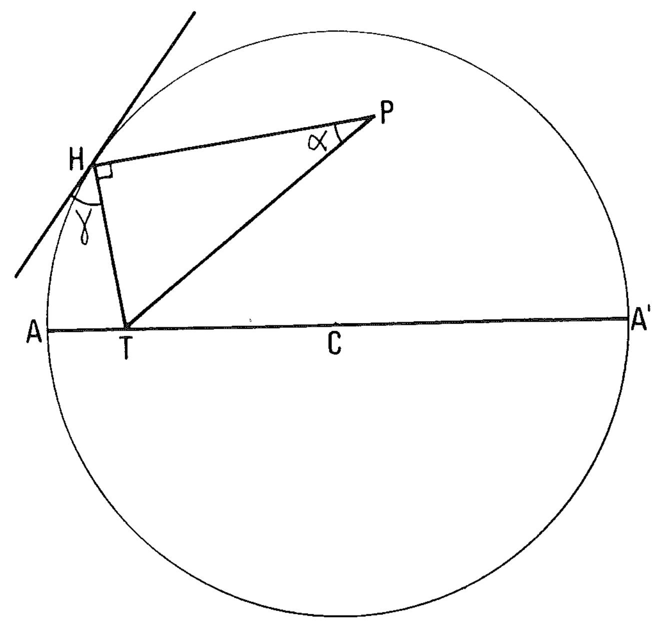

Fig. 10.

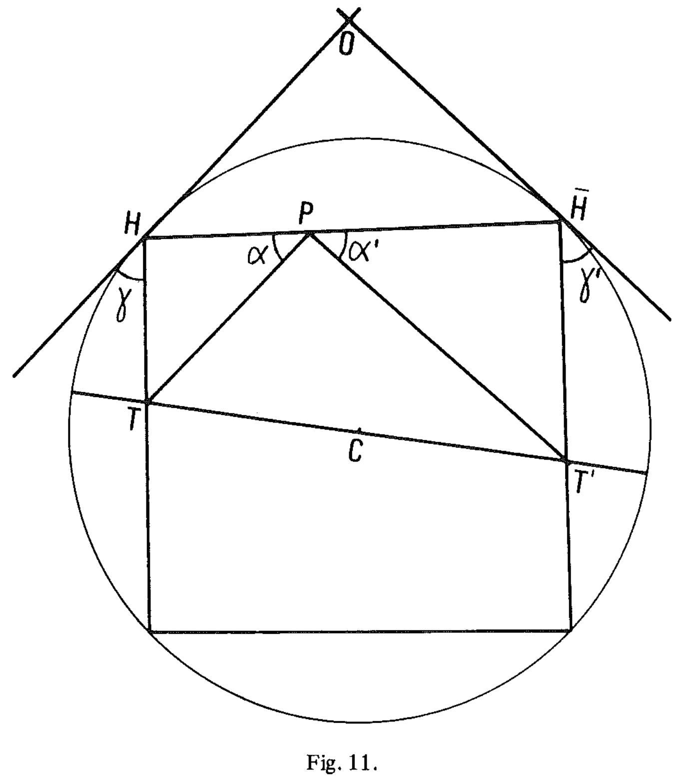

Fig. 11.

$$\gamma = \alpha.$$

Le fait que les angles γ et α sont égaux (Figure 10) ne dit pas grande chose. Mais on est conduit à faire une découverte si on prolonge la droite HP jusqu'à rencontrer en $\bar{H}$ la circonférence (Figure 11). Il suffit de dessiner la tangente à la circonférence en H, de joindre $\bar{H}$ avec le point T' symétrique de T par rapport au centre C du cercle, et de raisonner comme tout-à-l'heure; on aura

$$\alpha' = \gamma'.$$

Or, comme il s'agit des deux tangentes conduites par un point O au cercle, on a

$$\gamma = \gamma',$$

et donc

$$\alpha = \alpha'.$$

Cette propriété des angles est valable pour une position quelconque du point P sur l'orbite (Figure 12). On peut l'exprimer comme ceci: la tangente à l'orbite en un point P forme des angles égaux avec les droites PT et PT'. On verra dans le no. suivant la signification physique de cette propriété.

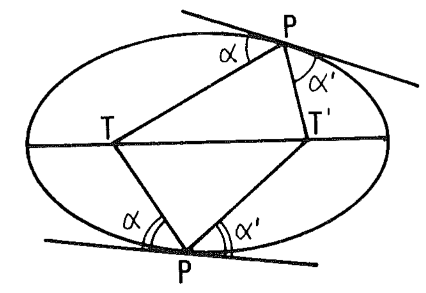

Fig. 12.

4.3. *Une propriété des distances*

Il est clair que, pour chaque position de P sur l'orbite, changent les distances $PT = r$ et $PT' = r'$ (Figure 13). On voit que si r augmente, r' diminue, et vice versa. On se demande: y-a-t-il 'une loi de compensation' qui lie ces distances? Suivons la méthode de la découverte: commençons par quelques cas particuliers:

– *P se trouve en A* (Figure 14).

On a
$$\alpha = \alpha' = 90°,$$
et
$$r + r' = AT + AT' = AA' = 2a,$$

a étant la longueur du rayon du cercle.

– *P se trouve sur la droite perpendiculaire à AA' qui passe par C* (Figure 15).

On a
$$r + r' = 2r = 2CH = 2a.$$

Dans ces deux cas particuliers on est arrivés à la même conclusion:

$$r + r' = 2a.$$

Est-ce que cette propriété sera toujours valable?

Il faudra considerer P dans une position quelconque. Comme on veut calculer $r + r'$, il est bon de dessiner les segments PT et PT' l'un comme prolongement de l'autre. On procède comme dans la Figure 16: on prolonge $T'P$ et TH jusqu'au point d'intersection K; on découvre alors que les triangles PKH et PTH sont égaux. Donc:

$$PK = PT.$$

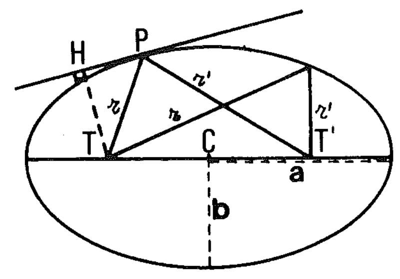

Fig. 13.

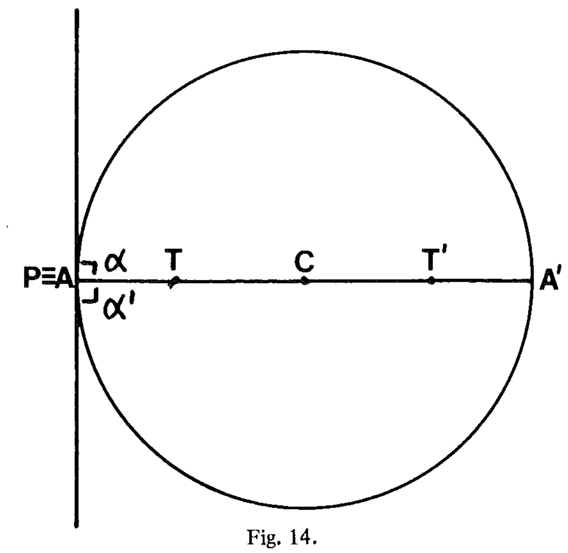

Fig. 14.

Par conséquence:

$$r + r' = PT + PT' = PK + PT' = T'K.$$

Or, le segment $T'K$ est long exactement comme un diamètre, et voilà pourquoi (Figure 17): si on trace le diamètre HH' on s'aperçoit que le quadrilatère $HH'T'K$ est un parallélogramme car les côtés $HK, H'T'$ sont égaux et parallèles (les triangles THC et $T'CH'$ sont égaux). Donc, pour une position quelconque du point P sur l'orbite, on a toujours:

$$r + r' = 2a,$$

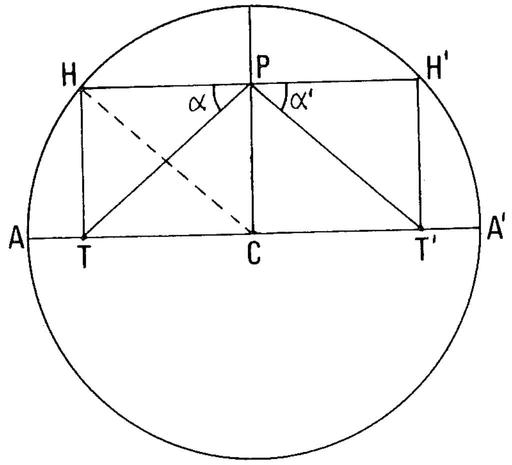

Fig. 15.

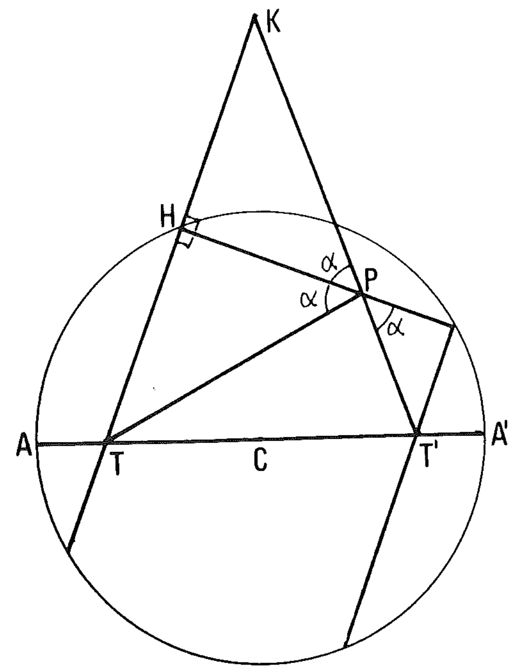

Fig. 16.

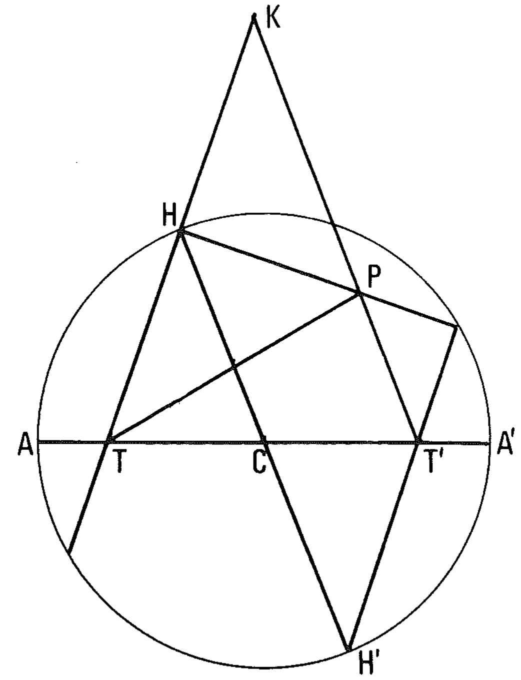

Fig. 17.

c'est-à-dire: *la somme des distances d'un point de la courbe de deux points fixes T, T' est constante.*

Mais alors il s'agit d'une *ellipse*, courbe que les élèves connaissent déjà, soit d'un point de vue mathématique, soit d'un point de vue physique. Notre orbite est donc une ellipse de foyers T, T'.

5. L'AIRE DE L'ELLIPSE[5]

Il nous fallait, pour le développement de notre théorie, connaître la formule de l'aire de l'ellipse.

Les élèves savaient déjà, par des expériences et par la voie analytique, que l'ellipse est la transformée du cercle par une affinité. Or, comme on peut réaliser une transformation affine en 'étirant' une toile élastique, le cercle dessiné sur cette toile se transforme an ellipse (Figure 18) et le carré de côté $2r$, circonscrit au cercle, se transforme en un rectangle de dimension $2a$ et $2b$ circonscrit à l'ellipse.

Or, comme une propriété de l'affinité est l'invariance du rapport des aires des figures correspondantes, on pourra écrire:

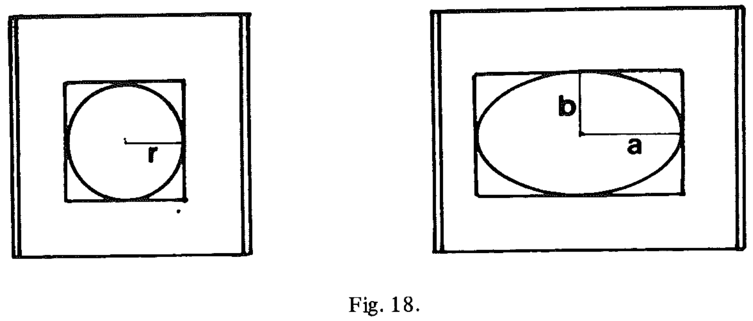

Fig. 18.

$$A_{\text{cercle}}:A_{\text{ellipse}} = A_{\text{carré}}:A_{\text{rectangle}},$$

c'est-à-dire

$$\pi r^2 : x = 2r \cdot 2r : 2a \cdot 2b,$$

d'où

$$x = \pi ab$$

Voici la formule de l'aire de l'ellipse de demi-axes a, b.

6. A LA RECHERCHE D'UN LIEN ENTRE GÉOMÉTRIE ET PHYSIQUE

Nous avons découvert que l'orbite est une ellipse et, donc, elle peut être caractérisée par ses demi-axes a, b. D'autre part, une fois qu'on donne l'orbite, pour chacun de ses points, r et p sont déterminés. Donc il doit y avoir un lien entre a, b, p, r. On va chercher ce lien. Reprenons le dessin du cercle 'des points H' et de l'ellipse (Figure 19).

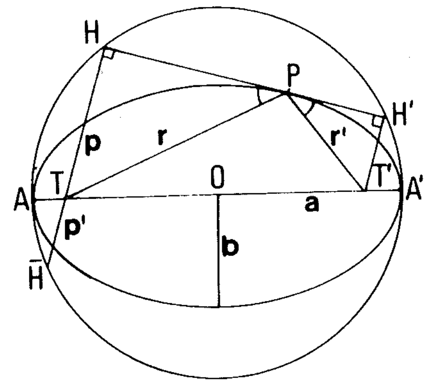

Fig. 19

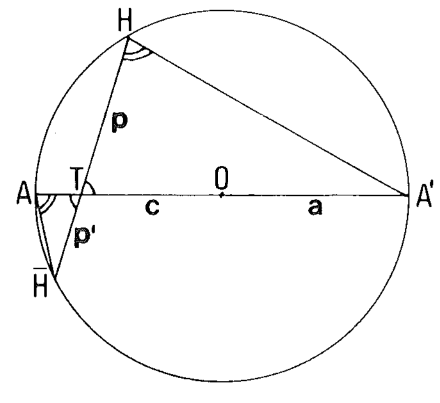

Fig. 20.

On a indiqué les distances

$$PT = r, \quad PT' = r', \quad TH = p, \quad T'H' = p'.$$

Nous savons que p est lié à v par

$$pv = k,$$

et celle-ci est déjà une première relation.

C'est toujours la Figure 19 et aussi la Figure 20 qui nous conduisent à des relations qui lient p, p', r, r', a, b.

On a de la Figure 19:

$$p : r = p' : r' \quad \text{(les triangles } THP, T'H'P \text{ sont semblables)},$$

d'où

$$(1) \qquad pr' = p'r.$$

Et, de la Figure 20 on a:

$$p : AT = TA' : p' \quad \text{(les triangles } AT\bar{H}, HTA' \text{ sont semblables)}$$

qu'on peut écrire, notant par 2c la distance focale,

$$p : (a - c) = (a + c) : p',$$

c'est-à-dire

$$pp' = (a + c)(a - c) = a^2 - c^2$$

et aussi

$$(2) \qquad pp' = b^2.$$

En plus, on doit se rappeler que

$$(3) \qquad r + r' = 2a.$$

En conclusion, on a trouvé les relations suivantes:

$$(1) \qquad pr' = p'r,$$

$$(2) \qquad pp' = b^2,$$

$$(3) \qquad r + r' = 2a.$$

Or, nous avons besoin d'une relation entre a, b, p, r: on doit donc chercher à éliminer p', r'.

De la (3) on tire

$$r' = 2a - r.$$

De la (2)

$$p' = \frac{b^2}{p}.$$

En substituant ces valeurs dans la (1) on a:

$$(4) \qquad \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{p^2} = 1.$$

Nous sommes arrivés à une relation entre des grandeurs géométriques. Mais la loi

$$pv = k \qquad \text{d'où} \qquad p = \frac{k}{v}$$

transforme la (4) dans une relation qui lie les grandeurs géométriques a, b, r à la grandeur physique v. On arrive à l'équation pédale de l'ellipse

$$(5) \qquad \frac{1}{r} - \frac{b^2}{2ak^2} v^2 = \frac{1}{2a}.$$

7. UNE LOI DE KEPLER

L'équation que nous venons d'établir n'est – il faut bien le reconnaître – ni simple ni expressive. Ce qui est vraiment 'peu parlant' est le coefficient $b^2/2ak^2$. Il s'agit sans doute d'une constante, une fois que l'ellipse est fixée.

Or, ce coefficient, si peu élégant, on peut l'écrire sous une forme plus expressive. Voila pourquoi: on sait que

$$k = pv,$$

mais dans notre situation on peut regarder v constante et donc

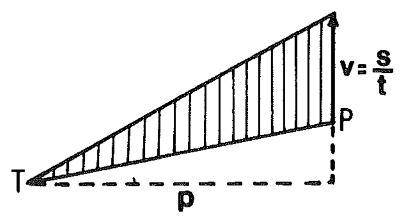

Fig. 21.

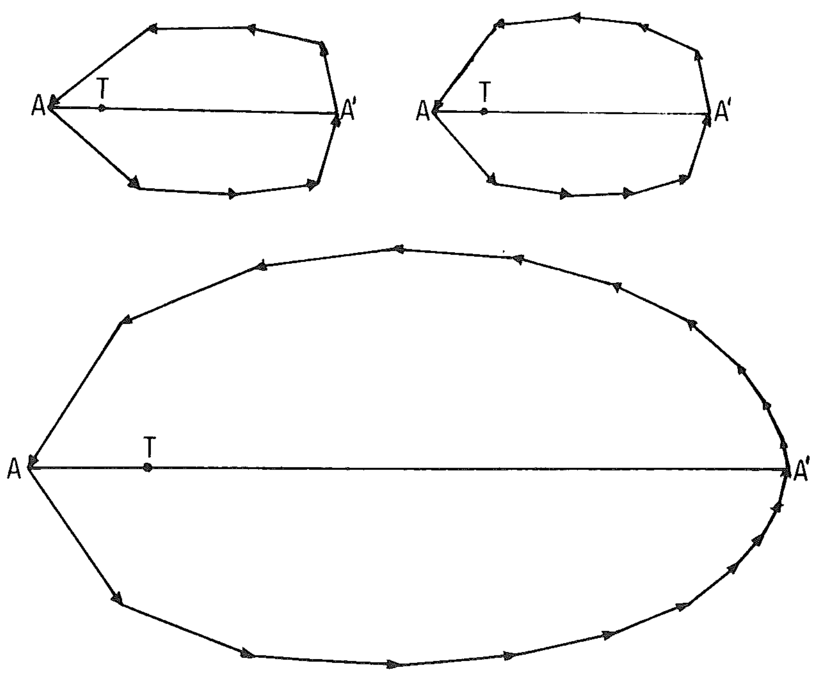

Fig. 22.

$$v = s/t.$$

On aura donc

$$k = ps/t.$$

On découvre de cette façon que k répresente le rapport entre le double de l'aire balayée par le rayon qui joint T à un point P qui court le long de l'ellipse et le temps employé (Figure 21). Or, dans le temps T nécessaire pour parcourir toute l'orbite, sera balayée l'aire de toute l'ellipse, aire qui a la valeur πab. On aura donc

$$k = \frac{2\pi ab}{T}.$$

Voici donc comment on peut écrire notre coefficient:

$$\frac{b^2}{2ak^2} = \frac{b^2T^2}{8a\pi^2a^2b^2} = \frac{1}{8\pi^2}\frac{T^2}{a^3}.$$

Maintenant le coefficient est exprimé par deux éléments significatifs: T qui est 'l'an du satellite' en orbite et a qui est le grand demi-axe de l'orbite elliptique.

Mais, quelle est la valeur de ce coefficient? On va la calculer pour les orbites de la Figure 22, determinant T et a à partir du dessin: la determination de T est facile car chaque petit segment $AB, BC, \ldots$ est parcouru dans 1 seconde; il n'y a alors qu'à compter le nombre des petits segments dans chaque orbite.

La mesure de a est donnée pour chaque ellipse.

Et voila ce qui resulte:

Orbite	a	T	T^2/a^3
1	$16{,}8 \times 10^7$ m	8 jours $\cong$ $6{,}9 \times 10^5$ s	10^{-13}
2	$19{,}5 \times 10^7$ m	10 jours $\cong$ $8{,}6 \times 10^5$ s	10^{-13}
3	$30{,}9 \times 10^7$ m	20 jours $\cong$ $17{,}2 \times 10^5$ s	10^{-13}

On découvre, d'une façon expérimentale, un fait qui était vraiment imprévisible: dans les trois cas le rapport T^2/a^3 a toujours la même valeur, il est approximativement égal à 10^{-13}.

Cette propriété est générale: on démontre que pour toute orbite elliptique autour de la terre le rapport T^2/a^3 est toujours égal à 10^{-13}.

Cette loi a été découverte expérimentalment par Kepler en 1612, sur la base d'observations faites à propos des planètes du soleil qui étaient connues à cette époque (elles étaient 5). C'est Newton qui a découvert la loi théoriquement en 1666 à l'âge de 24 ans.

La valeur trouvée par Kepler était differente de la nôtre: en effet, pour les orbites autour du soleil, ce rapport vaut 3×10^{-19}. Ce rapport change avec la masse M du corps céleste autour duquel on tourne.

On trouve

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{6 \times 10^{-11}M}.$$

Le nombre 6×10^{-11} (qu'on avait déjà rencontré au no. 1) est appelé *constante de gravitation universelle*, et généralement désigné par G.

On a écrit ci-dessous la valeur de la masse de quelque corps céleste, et, en correspondence, la valeur de ce rapport.

Corps	Masse	T^2/a^3
Terre	6×10^{24} Kg	10^{-13}
Soleil	$1{,}98 \times 10^{30}$ Kg	3×10^{-19}
Lune	$7{,}34 \times 10^{22}$ Kg	9×10^{-12}

Sur la base de ce que nous venons de découvrir on peut écrire d'une autre façon la loi (3) du no. 6:

$$\frac{1}{r} - \frac{T^2}{2\pi^2a^3}v^2 = \frac{1}{2a}$$

et aussi sous la forme plus simple

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{2GM}v^2 = \frac{1}{2a}.$$

Dans les numéros suivants vous vous rendrez compte de l'importance de cette loi.

8. UN PROBLÈME ASTRONAUTIQUE

Reprenons la loi

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{2GM}v^2 = \frac{1}{2a}.$$

Vous allez voir: elle est formidable! Elle permet, en effet, de résoudre bien des problèmes astronautiques.

On commence par le problème suivant: on veut qu'un satellite parcoure une orbite elliptique determinée. La situation est representée en Figure 23: T est la terre, et, comme on connaît l'orbite, on sait la longueur $2a$.

On lance le satellite de la terre de façon qu'il arrive à un point P de l'orbite, à une distance r de la terre.

Notre loi dit que si on veut que le satellite parcoure cette orbite nous devons imprimer au satellite, lorsqu'il se trouve en P, une vitesse v telle que

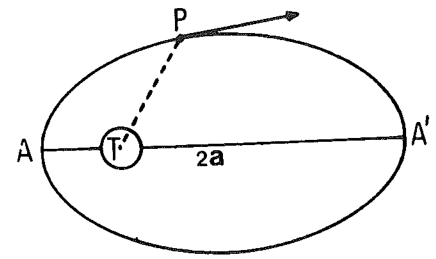

Fig. 23.

$$\frac{1}{2GM}v^2 = \frac{1}{r} - \frac{1}{2a}.$$

La vitesse est donc donnée par

$$v = \sqrt{\left[2MG\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)\right]}$$

et aura comme direction celle de la tangente à l'orbite dans le point P. A partir de ce moment on éteint les moteurs et on pourra être sûr que le satellite parcourra l'orbite donnée. Sûr? oui, car le satellite est commandé par notre formule. Mais on ne voyagera pas toujours avec la même vitesse puisque v change lorsque r change.

On se demande: qu'arrive-t-il si pour une raison quelconque, par exemple une panne ou une erreur de manoeuvre, la vitesse imprimée résulte différente de celle calculée par la formule?

Il est évident que l'orbite va changer; il s'agira toujours d'une ellipse avec un foyer dans le centre de la terre et qui passe par P avec une tangente déterminée, mais l'axe $2a$ sera different: c'est toujours notre loi

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2GM}v^2,$$

qui permet de le calculer.

On a:

$$a = \frac{rGM}{2GM - rv^2}.$$

A partir de la formule on voit que si la vitesse initiale v est plus petite, a est aussi plus petit, et, au dessous d'une certaine valeur, l'orbite rencontre la terre (Figure 24): dans ce cas le satellite retombe. Une fois déterminé le grand-axe, il est possible de dessiner l'ellipse car on connaît déjà le foyer T: il suffira de

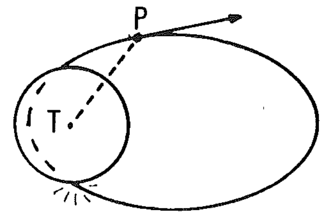

Fig. 24.

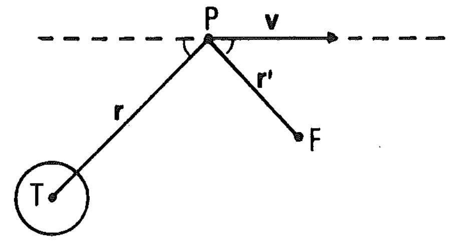

Fig. 25.

trouver l'autre foyer F. Et celui-ci, par la propriété de l'égalité des angles d'incidence et de reflexion (Figure 25), se trouvera sur le rayon réfléchi en P à une distance r' telle que

$$r + r' = 2a, \quad \text{c'est-à-dire} \quad r' = 2a - r.$$

9. LA VITESSE DE FUITE: ON CHANGE DE GENRE D'ORBITE

Nous imaginons, maintenant, que la vitesse devienne de plus en plus grande; $2a$, aussi, deviendra toujours plus grand. L'orbite se transforme petit à petit en devenant toujours 'plus longue': un foyer (la terre) conserve sa position, tandis que l'autre foyer, F, s'éloigne de P le long de la droite PF (Figure 26).

On se demande: si on voulait s'éloigner toujours plus, si on voulait sortir du système solaire, devrait-on imprimer une vitesse initiale infiniment grande?

Pour avoir la reponse il n'y a qu'à consulter, encore une fois, notre formule:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{2GM}v^2 = \frac{1}{2a}.$$

Si on veut que $2a$ devienne toujours plus grand, cela signifie que $1/2a$ doit tendre à zéro. Par conséquence on aura

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{2GM}v^2 \longrightarrow 0$$

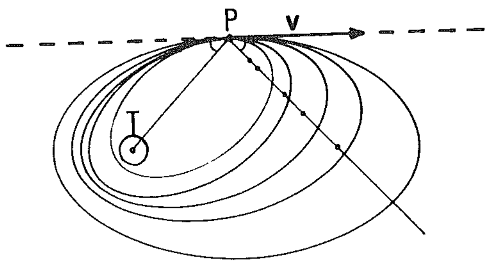

Fig. 26.

et donc

$$v^2 \longrightarrow \frac{2GM}{r}.$$

Ce résultat nous dit une chose surprenante: on peut arriver infiniment loin imprimant une vitesse initiale v qui n'est pas sûrement infinie, car sa valeur est

$$\frac{2GM}{r},$$

et G – il faut le rappeler – est très petit.

Un exemple numerique donne une idée de la grandeur de cette vitesse: si le corps qu'on veut lancer se trouve près de la surface terrestre, par exemple sur un avion à 10 km de la terre, on aura (dans le système MKS):

$$r \cong 6 \times 10^6 \,\mathrm{m}, \quad M = 6 \times 10^{24} \,\mathrm{kg}, \quad G = 6 \times 10^{-11}$$

et donc

$$v^2 \cong \frac{2MG}{r} = \frac{2 \times 6 \times 10^{24} \times 6}{10^6 \times 6 \times 10^{11}} = 12 \times 10^7$$

et alors

$$v \cong 11 \times 10^3 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

c'est-à-dire

$$v \cong 11 \,\mathrm{km\,s^{-1}}$$

Il s'agit sûrement d'une vitesse très grande, mais pas impossible si on pense qu'on bon fusil peut lancer une balle avec la vitesse de $2 \,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

La vitesse qui permet à un corps d'échapper à l'attraction terrestre s'appelle *vitesse de fuite*. En correspondence avec cette vitesse l'orbite 's'ouvre': on n'a plus une ellipse mais une *parabole*.

On comprend que la vitesse de fuite est caractéristique du corps céleste, car elle tient à la masse M.

Voici une table de valeurs de vitesse de fuite, relative à quelques planètes:

$$\text{Terre} \cong 11 \,\mathrm{km\,s^{-1}}, \quad \text{Lune} \cong 2{,}25 \,\mathrm{km\,s^{-1}}, \quad \text{Jupiter} \cong 56 \,\mathrm{km\,s^{-1}}.$$

10. LA PARABOLE COMME ENVELOPPE

La façon par laquelle on a obtenu la parabole à partir de l'ellipse avec le grand-axe toujours plus grand nous suggère une très simple construction de cette courbe.

Réflechissons à la construction de l'ellipse comme enveloppe: on avait dessiné un cercle (Figure 27), fixé un point T dans une position quelconque du diamètre AA', et, utilisant une équerre dont un côté de l'angle droit passe toujours pour T, on l'avait disposée de façon que le sommet de l'angle droit courait sur la circonférence; alors la position de l'autre côté donnait une tangente à l'ellipse. Or, de cette construction, on 'glisse' sur la construction de la parabole si nous gardons T et A dans la même position, tandis que faisons augmenter toujours plus l'axe $2a$, c'est-à-dire si nous éloignons A' de A. Regardons la Figure 28; le cercle devient de plus en plus grand et il tend vers la droite r passant par A. Et voici ce qui devient notre construction: le sommet de l'angle droit de l'équerre devra, maintenant, se déplacer sur la droite r et un de ses côtés passera toujours par T. L'autre côté de l'angle droit va, cette fois, envelopper une parabole. Par ailleurs la parabole était bien connue des élèves. Entre autre, ils connaissaient la propriété du foyer et, donc, toutes les applications aux feux de la voiture, aux antennes émettrice et réceptrice, aux radar.

11. AU DELÀ DE LA VITESSE DE FUITE

On a vu que, en correspondence de la vitesse de fuite, on a

$$1/2a = 0.$$

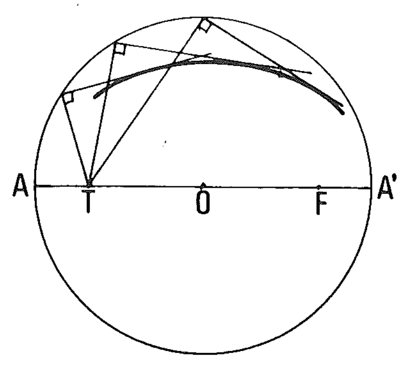

Fig. 27.

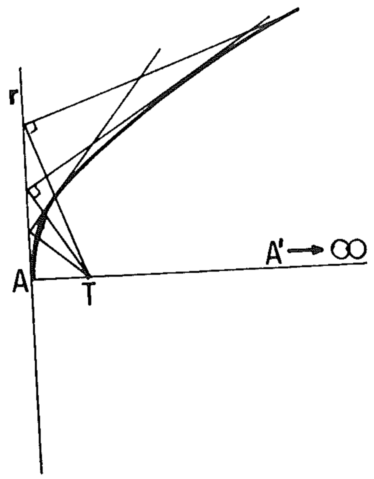

Fig. 28.

Et si on imprime au satellite une vitesse encore plus grande, que va-t-il arriver? C'est toujours notre loi

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{2MG}v^2 = \frac{1}{2a}$$

qui va repondre.

Si v est très grande, le terme $v^2/2MG$ peut résulter tellement grand qu'il dépasse $1/r$. Dans ce cas on a $1/2a < 0$ et donc $2a < 0$. Quelle signification peut avoir une distance négative? C'est le dessin qui repondra: si $2a$ est négatif, cela signifie que A' se trouve du côté opposé à T par rapport à A. La Figure 29 montre la situation.

On obtient, encore une fois, une courbe ouverte (Figure 30); elle est composée par deux branches: c'est une *hyperbole*.

L'hyperbole a aussi, comme l'ellipse, deux foyers: T, F. Ils se trouvent sur la droite AA' dans une position symétrique par rapport au centre C. Il est évident que le satellite va parcourir seulement une branche de l'hyperbole: celle qui présente la concavité vers la terre T.

Il faut dire que les élèves connaissaient déjà cette courbe qu'ils avaient rencontrée soit dans un contexte mathématique, soit dans un contexte physique.

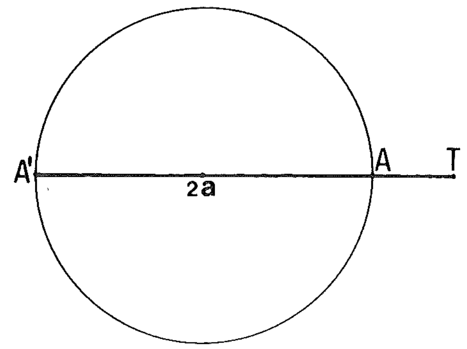

Fig. 29.

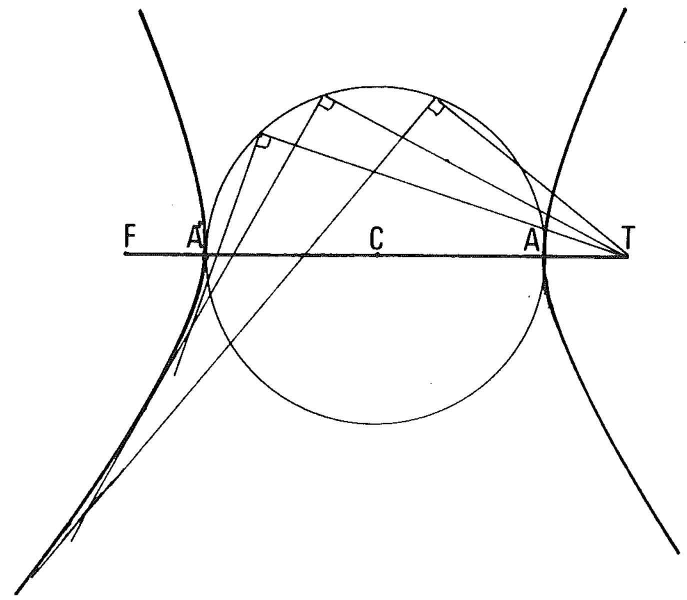

Fig. 30.

12. LES TROIS ORBITES

On a vu que l'orbite d'un satellite autour de la terre est:

– une ellipse si la vitesse initiale est plus petite que celle de fuite ($11{,}2 \text{ km s}^{-1}$),

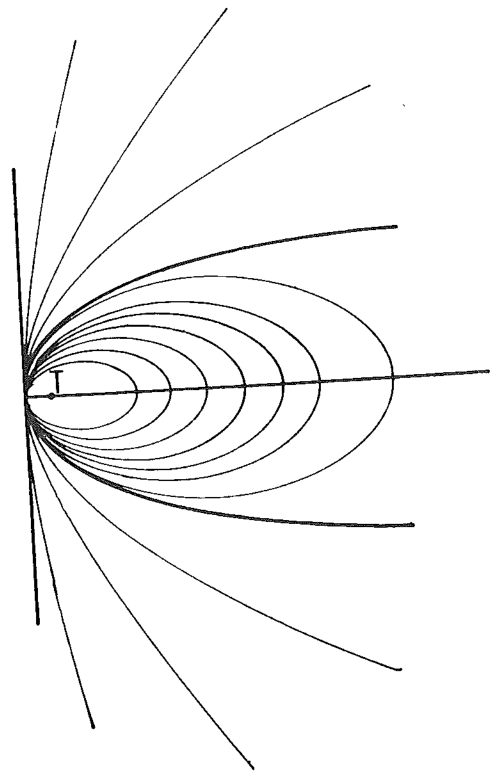

Fig. 31.

– une parabole si v est égale à la vitesse de fuite,

– une hyperbole si v dépasse la vitesse de fuite.

Il faut se rendre compte qu'il suffit d'une très petite variation de la vitesse initiale pour 'glisser' de l'ellipse à la parabole, à l'hyperbole; les trois courbes, qui sont bien differentes l'une de l'autre, ont un très fort lien physique (Figure 31).

Les élèves, qui connaissaient les coniques surtout du point de vue géométrique (comme sections planes du cône), ont été frappés de découvrir un autre genre de lien.

13. AU VOLANT D'UN ASTRONEF

Maintenant nous sommes à même d'appliquer les découvertes qu'on vient de faire: on est à même de se mettre "au volant" d'un astronef!

Voici le problème: un astronef se trouve dans une position A de l'espace et nous voulons qu'il rejoigne une position B.

Il faudra imprimer à l'astronef *une certaine vitesse* et le diriger dans *une certaine direction*.

La vitesse est donnée par l'allumage des moteurs. Dès que les moteurs ont imprimé la vitesse qu'on désire, on les éteint, et l'astronef continue son voyage 'en chute libre', chose possible à cause du fait que dans l'espace il n'y a pas une atmosphère qui puisse le freiner comme il arrive pour un avion.

Le problème plus difficile est 'savoir bien viser', c'est-à-dire bien choisir la direction. Comment faire afin que l'astronef, en partant de A, arrive exactement en B, parcourant, par exemple, un arc d'ellipse dont un foyer est la terre T?

Réflechissons: si on connaît le foyer T, un point A à la distance r de T, et la valeur de la vitesse v (valeur donnée par la puissance des moteurs), on peut, au moyen de notre relation

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{2MG} v^2 = \frac{1}{2a}$$

obtenir la valeur $2a$.

De notre ellipse on sait donc qu'elle passe par A, par B, que son grand axe a la longueur $2a$ et que le foyer T se trouve à une distance r de A et à une distance r' de B (Figure 32).

Ces données nous suffisent pour localiser l'autre foyer F. En effet, comme la somme des distances d'un point de l'ellipse des deux foyers est toujours égale à $2a$, la distance FA sera

$$FA = 2a - r$$

et la distance FB sera

$$FB = 2a - r'.$$

Le point F doit satisfaire à ces deux conditions: cela signifie que F doit se

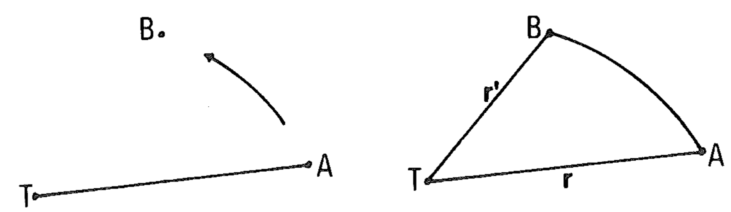

Fig. 32.

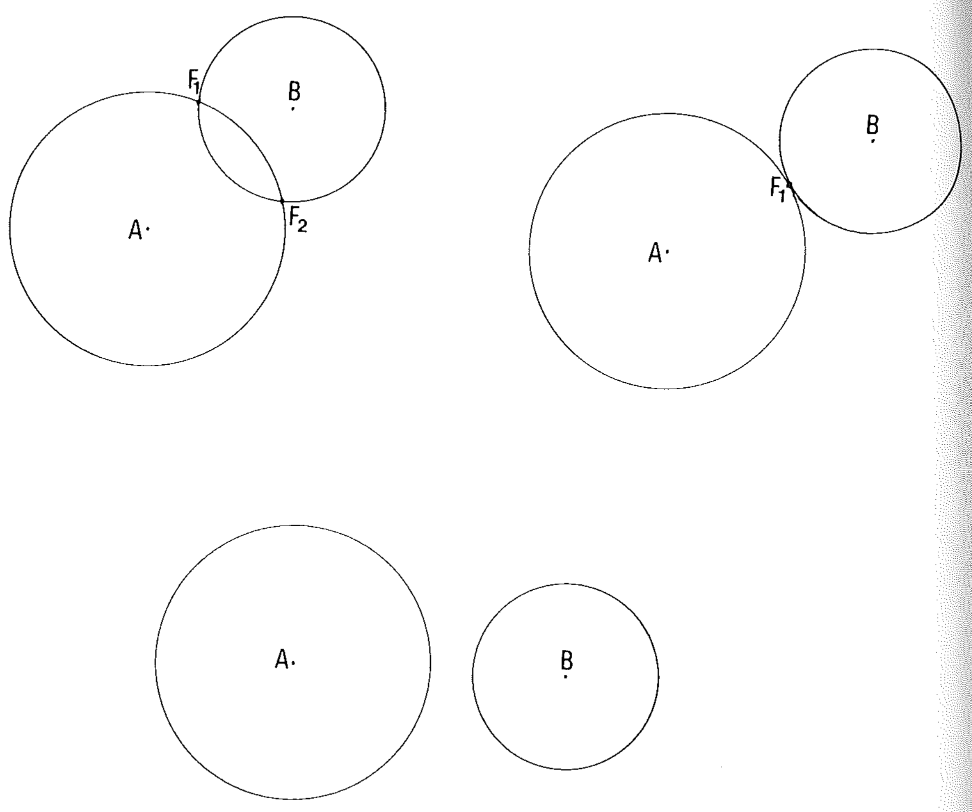

Fig. 33.

trouver sur un cercle de centre A et rayon $2a-r$ et aussi sur un cercle de centre B at rayon $2a-r'$. Ces données sont suffisantes pour faire la figure; il y a trois cas possibles (Figure 33): les cercles ont deux points d'intersection; les cercles sont tangents; les cercles ne se rencontrent pas.

Etudions le premier cas. Il y a deux possibilitiés pour le foyer F, et par conséquence il y a deux trajectoires elliptiques possibles qui permettent d'aller de A à B (Figure 34).

Choisissons par exemple comme foyer le point F_1. Il est facile de dessiner l'ellipse au moyen d'un bout de ficelle relié à T et F_1. Il est possible, aussi, de dessiner la tangente à l'ellipse en A, c'est-à-dire qu'on est à même d'avoir la direction de la vitesse, car la tangente à l'ellipse est la droite qui forme des angles égaux avec AT et AF_1 (Figure 35).

Une construction du même genre sera faite si on choisit comme foyer le point F_2.

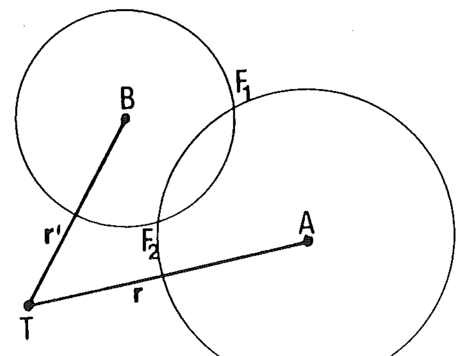

Fig. 34.

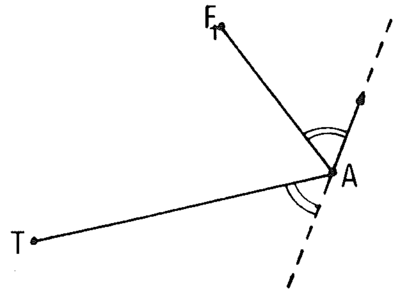

Fig. 35.

On a indiqué dans la Figure 36 les deux orbites possibles pour aller de A à B.

On se demande: quelle orbite vaut-il mieux suivre? Une chose est sûre: si on imprime la même vitesse initiale, la consommation de combustible est la même. Ce qui est différent, c'est le temps nécessaire pour aller de A à B. Le long de quelle orbite le voyage sera plus court? On est à même de répondre à cette question, car nous connaissons une formule qui lie le temps à la vitesse aréolaire: nous savons que, relativement à une orbite donnée, la vitesse aréolaire est constante et égale à pv. Donc, le temps t_1 pour aller de A à B en parcourant l'orbite noire sera

$$t_1 = \frac{\text{aire rayée}}{p_1 v},$$

tandis que si on parcourt l'orbite grise on aura un temps t_2 donné par

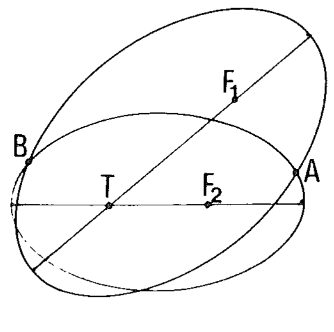

Fig. 36.

Fig. 37.

$$t_2 = \frac{\text{aire quadrillée}}{p_2 v}.$$

En mesurant les aires et en mesurant p_1 et p_2 (Figure 37) on pourra décider quelle trajectoire est la plus courte.[6]

13.1. *Quelques observations*

On a considéré, pour le moment, le cas dans lequel les deux cercles se rencontrent en deux points. Mais, on a déjà dit que les cercles peuvent ne pas se rencontrer: cela correspond au fait physique d'une vitesse v très petite, correspondante à un allumage des moteurs pendant un temps très court. Dans ce cas on ne peut pas rejoindre le point B. Enfin on pourra avoir le cas dans lequel les deux cercles sont tangents. Ce cas correspond à une vitesse déterminée: c'est la vitesse minimum qui permet d'aller de A à B. Il est facile de calculer cette valeur minimale.

On voit facilement de la Figure 38 que

$$AB = 2a - r + 2a - r' = 4a - (r + r')$$

et donc

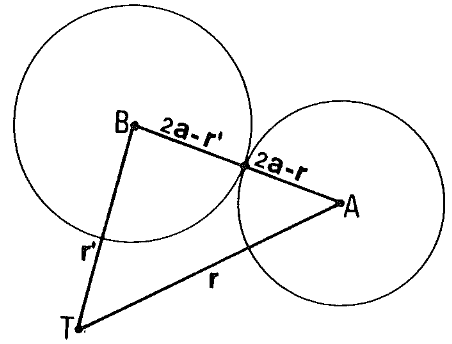

Fig. 38.

$$2a = \tfrac{1}{2}(AB + r + r').$$

Substituant cette valeur de $2a$ dans notre équation, on a

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{2MG}v^2 = \frac{2}{AB + r + r'}$$

et donc voici la valeur minimale

$$v^2 = 2MG\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{AB + r + r'}\right).$$

Cette formule met bien en relief que la valeur minimale diminue si r augmente; ce fait était prévisible, car si r augmente, l'attraction terrestre diminue et, donc, l'astronef est 'plus libre de bouger'.

Jusqu'à maintenant on a supposé $2a > 0$, c'est-à-dire l'orbite elliptique: la vitesse initiale est plus petite que celle de fuite.

Dans les deux autres cas (vitesse initiale égale ou plus grande que celle de fuite) on ira de A à B suivant un arc de parabole ou un arc d'hyperbole. Aussi dans ces deux cas on trouve des constructions pour déterminer la direction de la vitesse initiale et pour dessiner la trajectoire.

14. LES SATELLITES TÉLÉVISÉS

On entend souvent parler de communications télévisées via satellite. Cherchons à comprendre de quoi il s'agit.

Les transmissions télévisées se diffusent par ondes radio qui se répandent en ligne droite. Ces ondes, qui ont une fréquence très élevée, émanent de l'antenne transmettrice tout à fait comme la lumière d'un phare. Et comme il est impossible de voir une lumière à une grande distance parce que la terre est courbe,

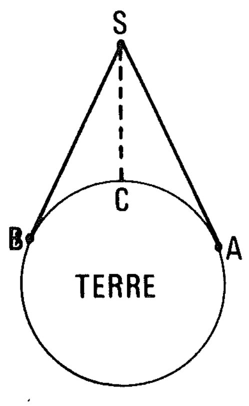

Fig. 39.

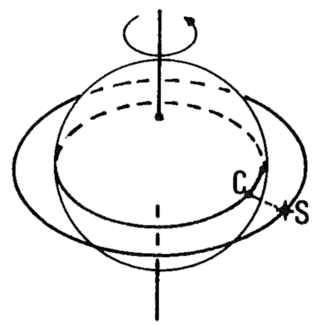

Fig. 40.

ainsi il n'est pas possible de recevoir en B (Figure 39) les ondes radio émanées par une antenne transmittrice A.

Pour rendre possible la reception on a besoin d'un relais hertzien disposé à une grande altitude qui puisse réfléchir les ondes en les dirigeant vers l'antenne receptrice B. On procède comme ceci: on lance un satellite S de façon qu'il décrive une orbite circulaire autour de la terre en 24 heures, c'est-à-dire dans le même temps que la terre emploie pour faire un tour sur elle-même; par conséquence, le satellite, vu de la terre, paraîtra dans une position invariable.

Il est évident que l'orbite de S doit être un cercle concentrique et complanaire à l'équateur (Figure 40).

Mais, comment faire pour savoir quel rayon doit avoir le cercle qui permet au satellite de faire un tour complet en 24 heures et quelle vitesse initiale doit-on imprimer au satellite afin qu'il continue à tourner sur cette orbite circulaire?

La réponse à la première question est donnée par la loi de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{MG}$$

d'où

$$a^3 = \frac{MT^2G}{4\pi^2}.$$

Dans notre cas:

$$T = 24 \text{ heures} = 86\,400 \text{ secondes},$$
$$M = 6 \times 10^{24}\,\text{kg},$$
$$G = 6 \times 10^{-11},$$
$$a = \text{rayon de l'orbite inconnue},$$
$$\pi^2 = 10.$$

On a donc:

$$r^3 = a^3 = \frac{6 \times 10^{24} \times 86\,400^2 \times 6 \times 10^{-11}}{4 \times 10} = 67{,}5 \times 10^{21}$$

et

$$r = 41\,000\,\text{km}.$$

On découvre ainsi que le satellite doit tourner sur une orbite circulaire à la distance de 41 000 km du centre de la Terre, et donc à la distance de 35 000 km de la surface terrestre.

Pour répondre à la seconde question, c'est-à-dire pour savoir quelle vitesse on doit imprimer au satellite, il suffit de réfléchir que en 1 jour le satellite doit parcourir un cercle dont la longueur sera:

$$s = 2\pi r = 2\pi \times 4{,}1 \times 10^7\,\text{m},$$

Maintenant, la connaissance de la longueur s de l'orbite nous permet de calculer la vitesse, car $s = vt$.

On a

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi \times 4{,}1 \times 10^7}{86\,400} = 3 \times 10^3\,\text{m}\,\text{s}^{-1} = 3\,\text{km}\,\text{s}^{-1}.$$

Et voici le résultat: on doit imprimer au satellite une vitesse de 3 km par seconde.

15. CONCLUSION

Il est bon d'ajouter, du point de vue didactique, que le développement de ce sujet a demandé aux élèves une attention et un effort auxquelles les jeunes gens ne sont plus habitués. Mais toutes les difficultés ont été surmontées par le grand intérêt; un intérêt dû, à notre avis, soit à l'actualité des voyages spatiaux et des livres et films de science-fiction, soit au fait que ce sujet a été toujours lié, à partir de Galilée, à la réalité politique, économique et sociale contemporaine.

Il y a encore à souligner que le sujet met bien en lumière l'interaction entre mathématique et physique, deux disciplines du Lycée: quelques fois c'est l'intuition mathématique qui permet d'étudier plus à fond le phénomène physique, d'autres fois c'est le raisonnement physique qui contribue à la solution de problèmes mathématiques.

NOTES

[1] La loi de Newton à laquelle on est arrivé par un raisonnement intuitif, peut être introduite aussi expérimentalement ou bien suivant la ligne historique, mais, dans ce dernier cas, on a besoin de connaître les lois de Kepler et du mouvement circulaire.

[2] Le professeur qui a déjà traité en classe le principe de la conservation du moment angulaire peut se passer de ce numero. Inversement, on peut se baser sur ces quelques pages pour introduire le principe en question.

[3] On va suivre le même raisonnement qu'on a suivi dans notre article 'Le lancement des projectiles' (voir: cette Revue . . .).

[4] Il nous semble que cette démonstration ne soit possible qu'en ayant recours au calcul différentiel. A notre avis la voie suivie, même si elle ne donne pas une démonstration, est quand-même très formative et stimulante et fournit l'occasion d'introduire les élèves aux méthodes de l'analyse numérique; ce qui sera encore plus convaincant si on dispose d'un ordinateur dessinant.

[5] Voir dans cette Revue, Vol. 1 (1969), pp. 274–288, l'article de E. Castelnuovo 'Les transformations affines dans le 1^er cycle de l'école secondaire'.

[6] Pour calculer effectivement les aires on peut avoir recours, une autre fois, à l'affinité qui transforme l'ellipse en cercle.

BIBLIOGRAPHIE

Appel P.: 1906, *Traité de mécanique rationnelle*, Gauthier-Villars, Paris.
Landau L. et Lifchitz E.: 1969, *Physique théorique* (*Mecanique*), MIR, Moscou.
Levi Civita T. et Amaldi U.: 1923, *Lezioni di meccanica razionale*, Zanichelli, Bologna.
Resnick R. et Halliday D.: 1966, *Physics*, Wiley, London.
Whittacker E. T.: 1961, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, Cambridge.
Goldstein H.: 1950, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, London.
Feymann R.: 1971, *The Character of Physical Laws*, Italian translation, Boringhieri, Torino.
Landau L. et Kitaigorodskij E.: 1969, *La fisica per tutti*, Editori riuniti, Roma.
Marion J. B.: 1971, *Physics and the Physical Universe*, Wiley, London.
PSSC: 1960, *Physics*, Heath and Co., Boston.
Castelnuovo G.: 1975, Lezioni di geometria analitica, Dante Alighieri, Roma.

Enriques F.: 1920, *Geometria proiettiva*, Zanichelli, Bologna.
Castelnuovo E. et Barra M.: 1976, *Matematica nella realtà*, Boringhieri, Torino; traduction française CEDIC.
Castelnuovo E.: 1969, 'Les transformations affines dans le premier cycle de l'école secondaire', *Educational Studies in Mathematics* **1**, 274–88.
Castelnuovo E., Gori-Giorgi C. et D.: 1979, Le lancement des projectiles', *Educational Studies in Mathematics* **10**, 147–159.