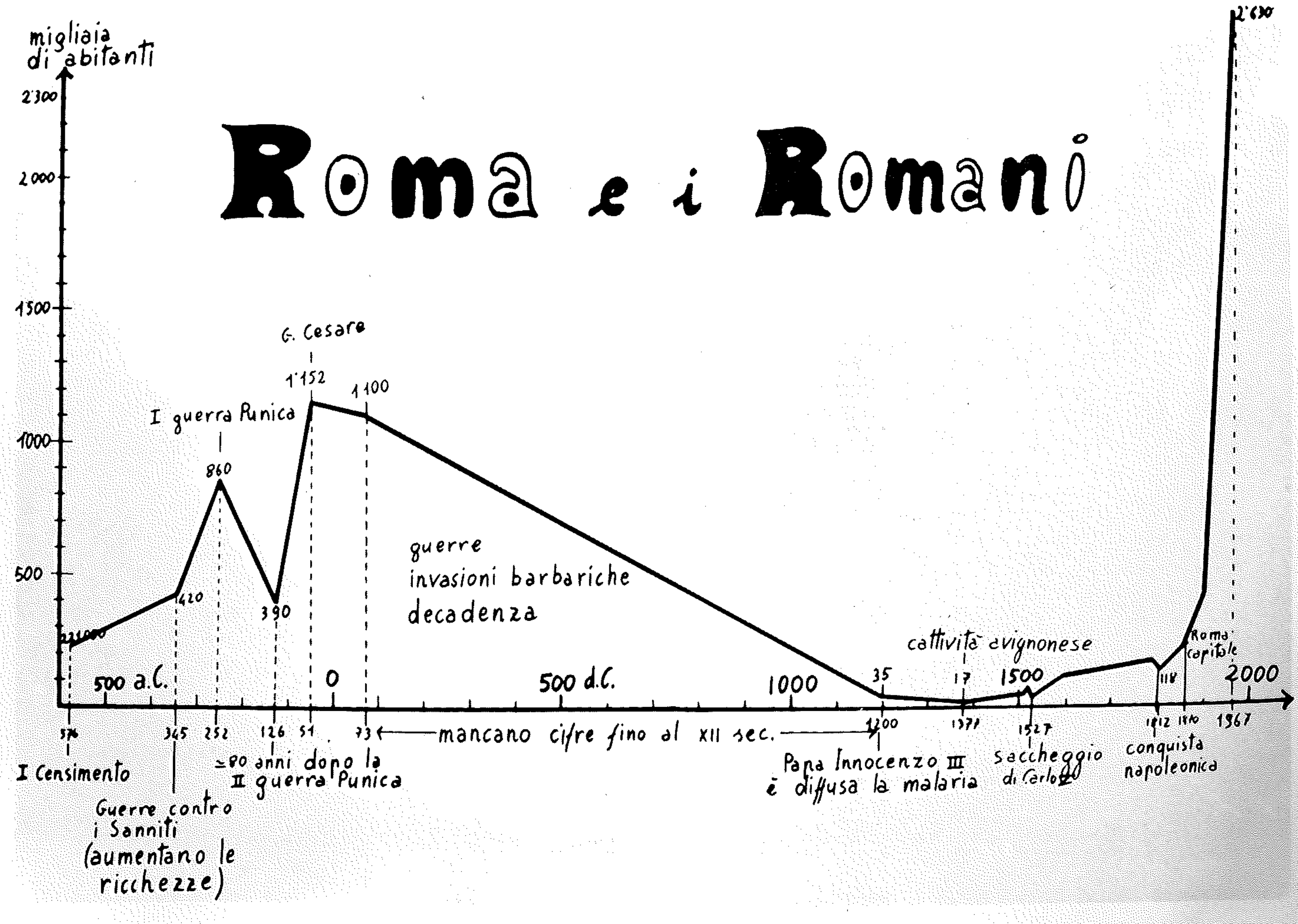
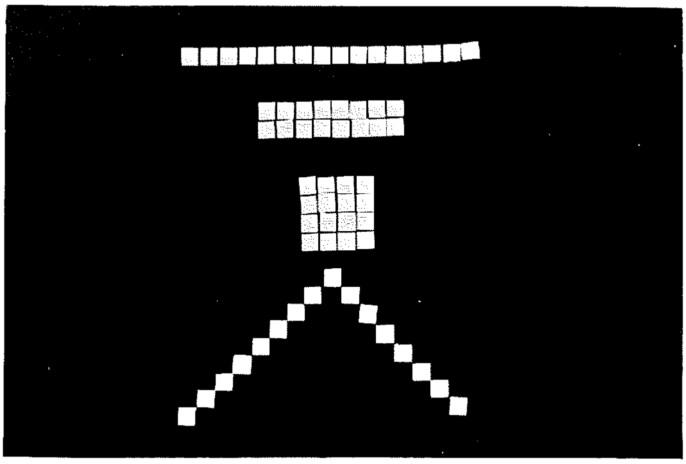
Fare scuola

UNA PROPOSTA DELLE CASE EDITRICI LA NUOVA ITALIA E BORINGHIERI PER I DOCENTI DI MATEMATICA DELLA SCUOLA MEDIA

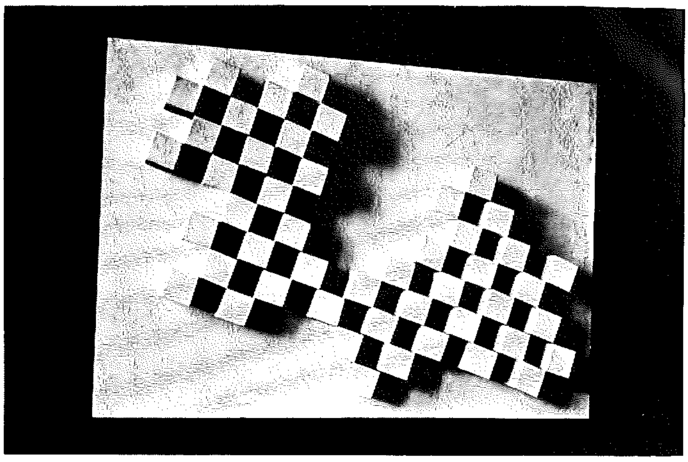
Roma, aprile 1974. Su un cartello affisso al portone della scuola media Tasso si legge: « I 138 allievi dei corsi A e B presentano la loro *Esposizione di Matematica* e danno il benvenuto a tutti i visitatori ».
In 17 aule, ciascuna dedicata ad un argomento, sono esposti grandi tabelloni illustrativi (300 in tutto); sui banchi, oggetti matematici di ogni genere, apparecchi, marchingegni costruiti dai ragazzi in un anno di lavoro, mattina e pomeriggio.
Tra i 5000 visitatori, 15 stranieri venuti appositamente dal Belgio, dalla Francia e da altri paesi. Proprio da questi contatti nasce l'invito ai ragazzi più grandi ad esporre le loro « opere » a Bruxelles e a Losanna dal 14 al 22 settembre 1974. In quell'occasione, molti giornali stranieri parlarono di questi ragazzi di 13-14 anni in giro per il mondo per illustrare, come protagonisti, una metodologia nuova già ben nota all'estero attraverso i libri di Emma Castelnuovo editi da La Nuova Italia e tradotti in più lingue.
Recentemente, la Presidenza dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) ha invitato Emma Castelnuovo a presentare i tabelloni dell'Esposizione 1974 al suo 3° Congresso Internazionale che si è svolto a Karlsruhe nei giorni 16-21 agosto 1976. Erano presenti 2500 professori di matematica di tutto il mondo che hanno chiesto informazioni e dettagli ed hanno dimostrato grande interesse. Durante il Congresso si è dibattuto soprattutto intorno al problema « matematica nella realtà », come base dell'insegnamento a livello di scuola dell'obbligo.

Tutto il materiale presentato all'esposizione è stato pubblicato recentemente — a cura di Emma Castelnuovo e Mario Barra — dall'Editore Boringhieri nel volume « Matematica nella realtà », che ha fatto seguito all'altro volume « Documenti di un'esposizione di matematica » relativo alla prima mostra effettuata presso la scuola media Tasso nel 1971, pure pubblicato dall'Editore Boringhieri.



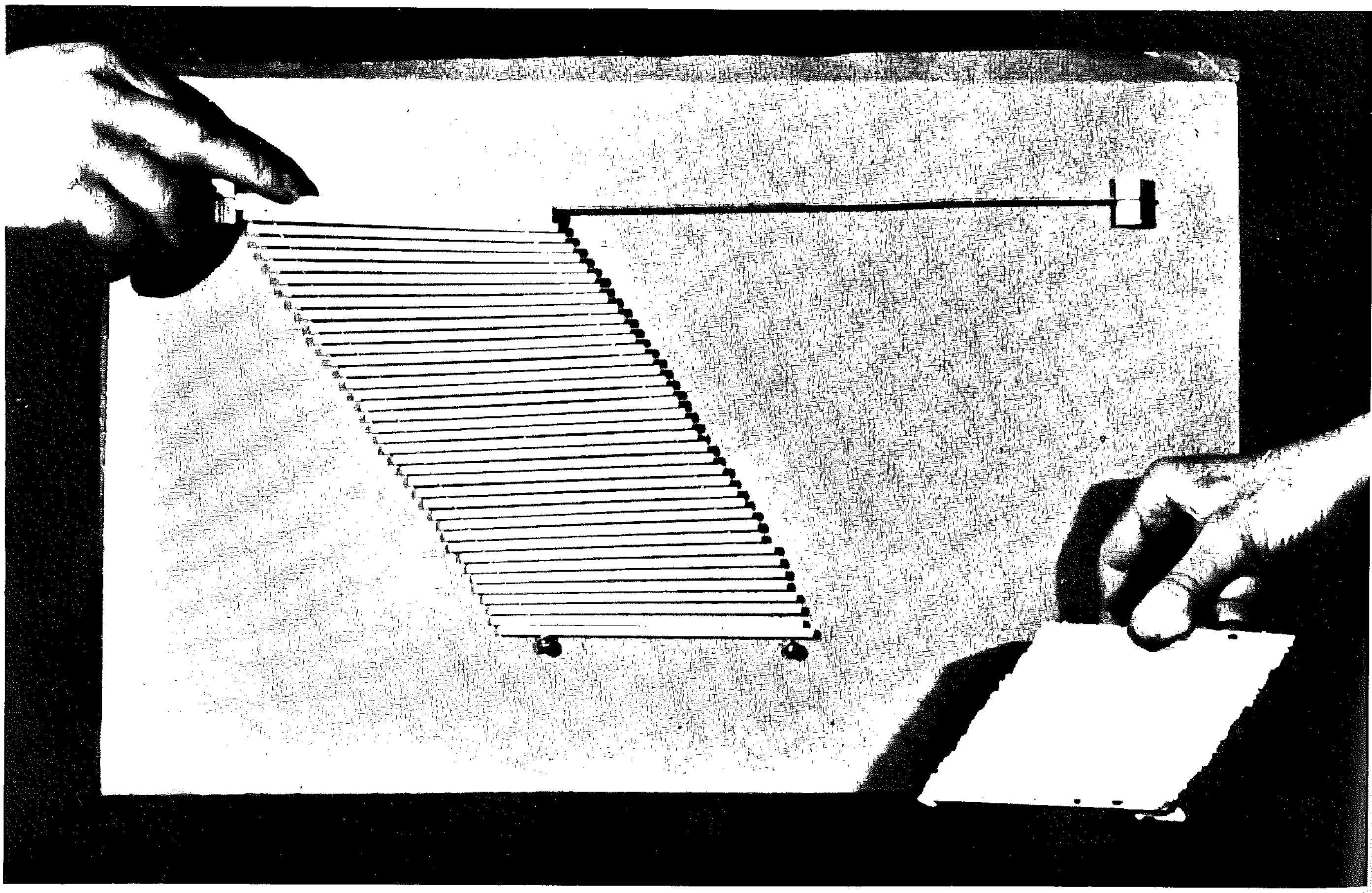


Area uguale; perimetro diverso.



Composizione del pittore argentino Luis Tomasello.

Durante il Congresso di Karlsruhe, i più grandi matematici e i più impegnati cultori di didattica della matematica di tutto il mondo hanno dichiarato che l'obiettivo fondamentale dell'insegnamento matematico nella scuola secondaria deve essere quello di legarla il più strettamente possibile alle applicazioni.
Michael Atyah, matematico di Oxford, ha detto: « È venuto il tempo in cui, nella ricerca matematica, l'obiettivo più importante è quello di studiare le interazioni fra i vari campi della matematica e fra la matematica e le altre discipline, fra la matematica e le applicazioni ». Ne deriva che è un errore dare eccessivo rilievo alle strutture formali della matematica (come introdurre i ragazzi all'insiemistica) e che l'astrazione ha senso solo se ha una solida base nell'esperienza. Occorre, dopo aver introdotto idee astratte, dimostrare la loro utilità applicandole ad esempi concreti.
« Non c'è una matematica classica e una matematica moderna da mettere in contrapposizione — ha dichiarato Peter Hilton, americano, pedagogista della matematica —; anzi, dobbiamo mettere in evidenza la continuità del pensiero matematico attraverso i secoli. Non c'è una matematica applicata da considerare in sottordine alla matematica pura; molto spesso è proprio attraverso le applicazioni che si può evidenziare la forza creatrice della matematica. Se continueremo a seguire coloro che ci indicano come panacea universale un insegnamento basato sull'insiemistica, rischieremo di non essere più compresi dai ragazzi, di staccarci del tutto dal loro mondo e dalle loro esigenze ».



Per scorrimento si può passare da un parallelogramma all'altro. Area uguale; perimetro diverso.

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA COME FATTO EDUCATIVO

Secondo recenti studi solo una piccola parte di quanto proposto nell'insegnamento, valutabile in media intorno al 20%, può considerarsi presente nella mente dei ragazzi che terminano un ciclo di studi, e mediamente solo il 5% viene effettivamente compreso ed acquisito.
Ne sono state identificate alcune cause:

1. scarsi collegamenti all'interno dei contenuti dell'insegnamento e fra questi ed i problemi della vita reale. Arretratezza dei contenuti;

2. scarsa chiarezza sui compiti dell'insegnamento: mancanza di obiettivi precisi di formazione e sviluppo;

3. preparazione didattica insufficiente: nessuna certezza scientifica sui processi dell'apprendimento, mancanza di motivazioni che stimolino l'impegno dello studente, scarsa attitudine a rendere più semplice e comprensibile un argomento, mobilitazione della sola attività razionale;

4. richiesta, da parte degli studenti, di risultati più convincenti e verificabili.

Altre cause riguardanti la matematica in particolare:

1. difficoltà di comprenderne la necessità dello studio; mancanza di collegamento con la realtà; riferimento ad un mondo ideale, deterministico, astratto;

2. maggiore richiesta di preconoscenze per la comprensione di un argomento e di tempi lunghi per ottenere dei risultati. Uso di vocaboli inconsueti;

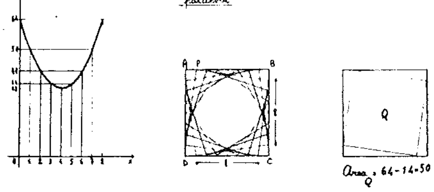
3. poco spazio riservato all'iniziativa, all'intuizione, alla fantasia, alla scoperta e alla creatività.

La matematica viene in tal modo considerata spesso inutile, prefabbricata ed imposta. In generale si corre seriamente il rischio che lo studente, impreparato ad assumere un ruolo attivo nella società, tenda a privilegiare gli sbocchi impiegatizi e ad abbandonare il lavoro produttivo. In particolare, le conseguenze negative sono da ricercarsi non tanto nella ignoranza di alcune nozioni, quanto nel limitato sviluppo di alcune capacità intellettive che, peraltro, se acquisite, consentirebbero un recupero molto rapido di quelle stesse nozioni, qualora ne risultasse più motivato l'apprendimento.
Ciò risulta tanto più grave se si tiene presente che, dato l'impressionante sviluppo della tecnologia, buona parte delle nozioni utili nella vita extrascolastica ed in particolare nella professione, si possono apprendere sempre più nella vita stessa e nel lavoro e sempre meno nella scuola. Viceversa i profondi mutamenti della struttura sociale e produttiva richiedono competenze sempre nuove che implicano un ricorso più accentuato alle capacità di

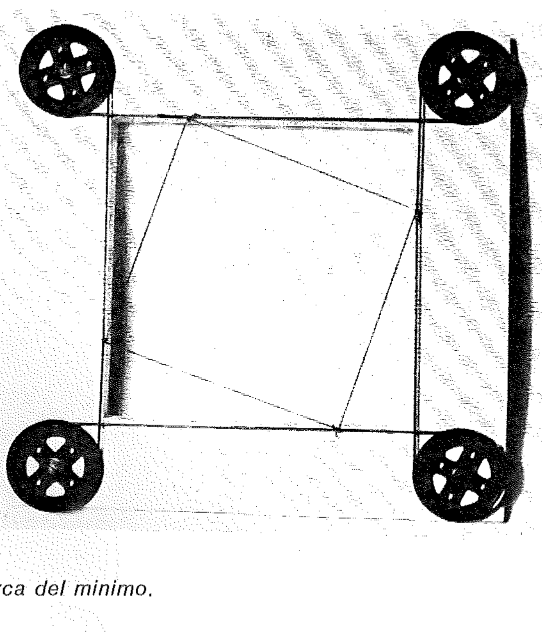
Osservate il nostro apparecchio: è un quadrato che "si muove" dentro una finestra quadrata.

Cambia l'area?

Riportando i valori in grafico ottengo una "parabola"



AP = X	area = Y
0	64
1	50
2	40
3	34
4	32
5	34
6	40
7	50
8	64



Ricerca del minimo.

COSTRUIAMO LA GEOMETRIA

Scatola di materiale utilizzabile per la costruzione di poligoni articolabili

Il materiale offre la possibilità di realizzare figure articolabili al fine di portare l'attenzione del ragazzo non soltanto sull'« oggetto » che ha costruito ma anche sulle trasformazioni che esso può subire. Il « modello dinamico » esprime infatti situazioni geometriche mutevoli: vengono messe in evidenza proprietà che variano in queste trasformazioni e proprietà invarianti, e le figure appaiono come membri di una famiglia, di una classe di figure.
Di qui sorge spontanea l'idea di costruire una classificazione e nasce quindi, in modo del tutto naturale, la definizione di questo o quell'ente geometrico. La mobilità dei modelli porta poi ad osservare dei casi particolari: non sfuggiranno certo all'attenzione del ragazzo i cosiddetti casi « limite », e spesso queste considerazioni lo condurranno a cogliere, sia pure in modo intuitivo, il significato di una legge generale.

La scatola, L. 4200

comunicazione e a quelle critiche e di organizzazione logica che favoriscano, fra l'altro, una visione ampia dei problemi. Ne segue la necessità, in particolare per quanto riguarda le materie scientifiche, di un aggiornamento dei programmi, ma non solo in funzione di nuove conoscenze che, talvolta rigide, sarebbe difficile trasferire ad altre situazioni e la cui validità potrebbe presto divenire obsoleta. Molto più importante è invece tendere allo sviluppo di certi comportamenti e di certe tecniche di lavoro che rendano lo studente capace di analizzare i dati della realtà con sistematicità, di esprimerli in modo sintetico, di organizzarli in un modello adeguato alla situazione e di tradurne i risultati in altre situazioni. Ove si procede in tal senso, nonostante il minor tempo dedicato agli argomenti tradizionali, i risultati in questo campo non sono affatto peggiori di quelli delle altre classi.

È necessario, nella scuola, dare vita ad attività personali e collettive interdisciplinari, formative, che, vissute in prima persona dagli studenti, possano trasformarli da spettatori in attori ed offrano la possibilità di associare alla cultura la soddisfazione del lavoro organizzato e della ricerca.

In particolare l'apprendimento della matematica dovrebbe essere basato sulla costruzione di concetti e sullo sviluppo di capacità, partendo dall'attività concreta degli studenti, in stretto collegamento con la realtà e tenendo presente le possibili applicazioni. Quanto proposto trova giustificazione, anche nei seguenti motivi:

1. la società accetta la matematica non perché è bella ma perché è utile;

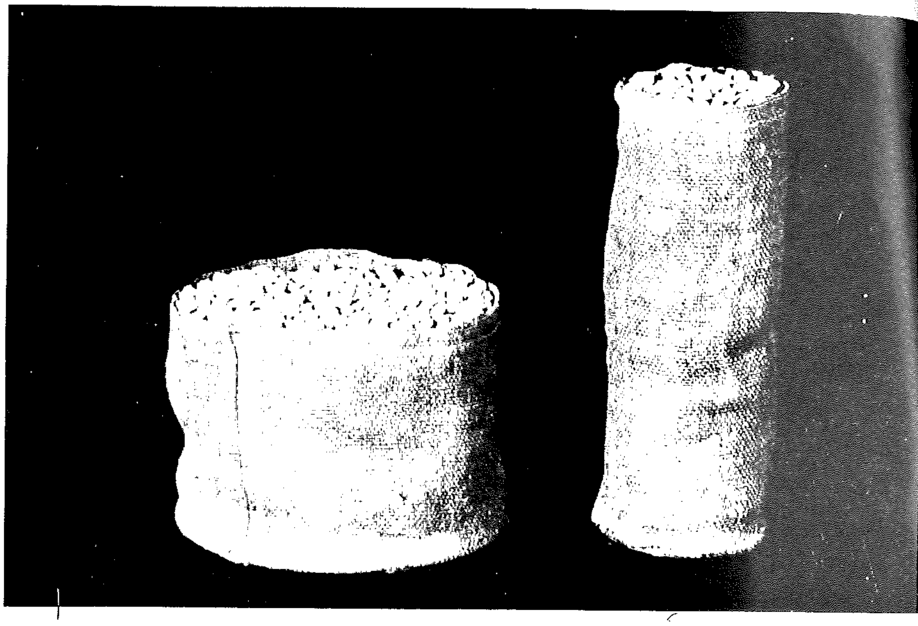
2. insegnare una matematica in modo tale che gli studenti non partecipino essi stessi alla formazione dell'astrazione, serve solo a creare adulti senza facoltà di critica e facilmente manipolabili dalle parole e dai mezzi di comunicazione di massa;

3. il collegamento con la realtà fornisce allo studente la motivazione e il sostegno per l'intuizione e l'apprendimento delle idee astratte;

4. la realtà fornisce un criterio per la scelta degli argomenti di insegnamento.

Dovrebbe perciò essere superata ogni astratta frammentazione; la matematica va considerata come un tutto integrato che assume un ruolo importante per la formazione della persona ed ha ampie possibilità d'incontro con le problematiche di tutte le altre discipline, dal disegno alla lingua, alle scienze, all'arte, all'economia, alla geografia, alla storia. Occorre che ogni argomento sia motivante, prospetti problemi pratici di varia natura e, mirando alla componente qualitativa, eserciti l'attitudine a risolverli mediante un esercizio attivo, con momenti individuali e di gruppo e momenti di critica, di sintesi e di verifica con esempi e controesempi ed in continuo collegamento con la storia.

Occorre che tutto ciò sia legato alla costruzione e manipolazione effettiva, di supporti concreti e modelli matematici, in modo che non soltanto l'attività razionale, spesso passiva e individuale, di chi apprende, ne risulti mobilitata, ma ne venga coinvolto l'individuo nella sua globalità, fisica, razionale ed emotiva, con i suoi problemi comportamentali e di atteggiamento.

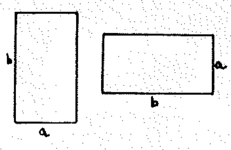


Ricerca del massimo. Curvando in modi diversi due fogli rettangolari uguali non si ottengono due cilindri di uguale volume.

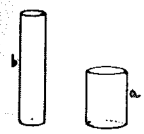
Un problema di Galileo sul cilindro

"Di qui s'intende la ragione d'un accidente che non senza maraviglia vien sentito dal popolo; ed è, come possa essere che il medesimo pezzo di tela più lungo per un verso che per l'altro, se se ne facesse un sacco da tenervi dentro del grano, come si costuma fare con un fondo di tavola, terrà più servendoci per l'altezza del sacco della minor misura della tela e con l'altra circondando la tavola del fondo, che facendo per l'opposito."

Ho due fogli rettangolari uguali



Curvandoli posso ottenere due cilindri



Hanno lo stesso volume?

No certo perché .... il raggio influisce di più e quindi avrà un volume maggiore il cilindro di base maggiore, anche se l'altezza è minore -

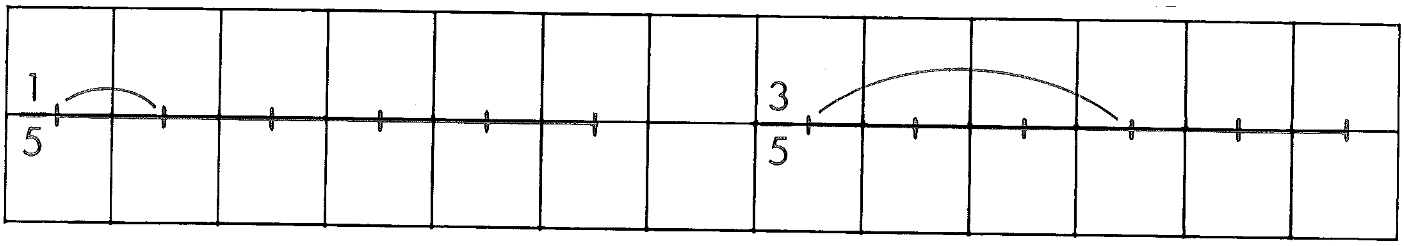
ESPRESSIONI ED INSIEMI

L'insegnamento di qualunque disciplina dovrebbe iniziare con l'esporre agli allievi quale ne è lo scopo, in che cosa consista la ricerca, quali interessi potrà suscitarne lo studio. Si dovrebbe cercare, in ogni modo, di dare ai ragazzi una prima valida motivazione.

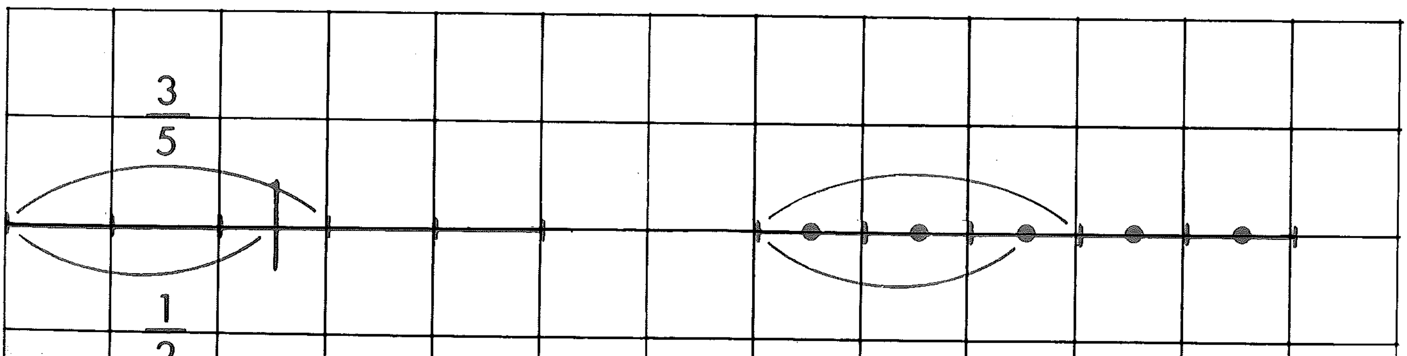
Purtroppo, per la matematica, si segue spesso un itinerario ben diverso. Si dice che il bambino che arriva alla scuola media non è in grado di comprendere il significato di ricerca e che non è possibile dargli un'idea del genere di studi ai quali si dedica il matematico; si dice che non gli si può far gustare la musica prima che conosca il solfeggio (e proprio per la musica, i più recenti tentativi pedagogici si muovono in senso contrario). Subito dopo averlo accolto, la scuola media gli offre il piatto delle quattro operazioni (che non ha ancora imparato), offendendo lui, e con lui il suo maestro elementare perché non conosce nemmeno le tabelline. Il gioco si fa sempre più umiliante, quando le quattro operazioni sono combinate insieme, facendo largo uso dei più vari tipi di parentesi, in modo da formare le più complicate espressioni. Ben presto, si introducono le frazioni, come se il concetto fosse dei più semplici, e ci si affretta a disporle sopra e sotto a monumentali impalcature, magari sormontate dal segno della radice quadrata, fino a che il tutto, a poco a poco, dovrebbe smontarsi, semplificarsi, ottenendo, per esempio, il numero 3/4. Che se, poi, qualcuno, chiedesse all'esausto ragazzino il significato di questo 3/4, il più delle volte non avrebbe risposta.

D'altra parte, si dice, di questi calcoli, poi, nella vita, se ne ha bisogno e dunque il bambino deve apprenderli. E non si pensa che, proprio nella vita di ogni giorno, di quelle impalcature non se ne ha bisogno alcuno e che nemmeno la frazione 3/4 interverrà spesso nei calcoli di una famiglia. Infatti, oggi che tutto si vende in contenitori chiusi e contrassegnati, anche il simbolo 3/4 finisce per diventare, per tutti noi, un'astrazione.

Più di recente, è intervenuta l'ambizione di far gustare agli allievi, fin dall'inizio della scuola media, la bellezza di una sistemazione logica e le teorie che permettono di unificare i più vari argomenti, attraverso la cosiddetta « insiemistica », spesso senza sostenerla con esempi realmente espressivi. Si dice che, con l'insiemistica, si indirizzano gli allievi verso la matematica pura, in modo da far sentire, fin dall'inizio, la potenza del pensiero razionale. Ma questo tipo di matematica « pura » non abitua certo i ragazzi al gusto della ricerca matematica, né li rende sensibili alla comprensione sociale. È proprio in questo modo che, fin dai banchi della scuola, con l'arma matematica si schiacciano i più, si fa del ragazzo di buona famiglia, che trova a casa il sostegno dei genitori o del ripetitore privato, l'allievo « bravo », che è sicuro nel tecnicismo operatorio e che sa ripetere in corretto italiano una definizione, ma che non ne avverte, dietro, il concetto.



Dalle figure risulta che $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ *di mezzo quinto, cioè di* $\frac{1}{10}$.



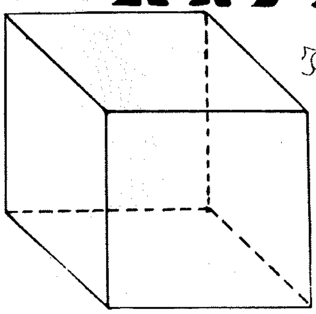
APPLICAZIONI E MATEMATIZZAZIONE DEL REALE

È proprio la matematica, invece, proprio l'insegnamento della matematica che può evitare ogni discriminazione sociale, che può davvero unificare gli allievi: in una classe di matematica non si deve riconoscere chi ha dietro di sé una eredità culturale e chi è il primo della sua famiglia a sedere sui banchi di scuola. Ma, quale matematica? Quella che il ragazzo può capire fino in fondo, che può fare sua, quella che riesce a dare anche a lui, bambino, il gusto della ricerca e la gioia della scoperta. Quella che può permettergli, nella vita di ogni giorno, di non rimanere passivo davanti ad una trasmissione televisiva in cui si parli di programmazione economica o di malattie ereditarie o in cui si vedano realizzazioni architettoniche.

Applicazioni della matematica, dunque; matematizzazione di fenomeni reali. Ma — si dice — per fare tutto questo occorre che il bambino abbia una base culturale, conosca gli strumenti necessari, apprenda questo o quell'argomento: prima, dunque, bisogna sviluppare una trattazione teorica. Si tratta di un discorso pedagogicamente inaccettabile: non si può motivare i ragazzi dicendo loro di studiare teorie astratte con la promessa di vederne, dopo, interessanti applicazioni. Il legame astratto-concreto, per usare un'espressione classica, o, meglio, il rapporto « matematica-realtà » deve essere sempre nei due sensi: l'astratto prenderà significato dalla manipolazione del concreto e la matematica acquisterà valore agli occhi del bambino solo se questi ne vedrà delle applicazioni nel mondo che lo circonda.

Emma Castelnuovo ha pubblicato presso La Nuova Italia Editrice i due volumi « La via della matematica: La geometria, I numeri » per la scuola media, che vengono inviati in saggio — a richiesta — agli insegnanti insieme ad una breve ed acuta guida per il professore.

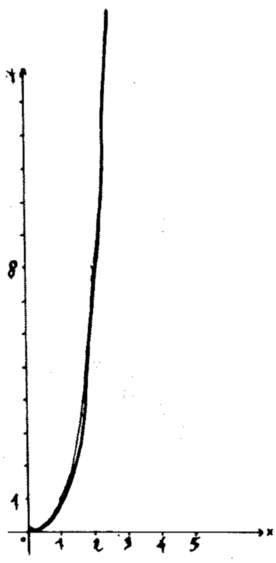
VOLETE CRESCERE ANCORA PIÙ RAPIDAMENTE?



Il volume del cubo cresce in funzione del lato secondo la legge:

$$y=x^3$$

A partire da $x=1$ la crescita è più rapida del caso precedente



Bisogna arrivare a Δ_3 per avere un valore costante.

lati = x	volume: y	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0	0			
		1		
1	$1^3=1$		6	
		7		6
2	$2^3=8$		12	
		19		6
3	$3^3=27$		18	
		37		6
4	$4^3=64$		24	
		61		
5	$5^3=125$			

COME INSEGNARE

E allora, come iniziare in prima media? Perché non è solo una questione di tabelline, ma i bambini che arrivano dalle scuole elementari non riescono a stare attenti, sbadigliano, non si interessano, sembrano stanchi fin dal primo mattino.

Ed è vero. Le nuove generazioni risentono in modo impressionante della vita tumultuosa e disordinata, soprattutto se vivono in città. A casa, assai spesso, il colloquio è difficile: se i genitori lavorano, il ragazzo passa i pomeriggi a gironzolare per le strade o davanti al televisore. Quando i genitori rientrano, spesso si inquietano per un voto, senza domandare come si svolgono le lezioni o se una materia è più motivante di un'altra. I rapporti dei genitori con gli insegnanti sono, ancora oggi, a senso unico: il genitore che chiede, l'insegnante che giudica; e, alle riunioni, molti genitori sono afferrati da un complesso d'inferiorità di fronte ad altri che « sanno parlare ». E il bambino si intristisce, spesso non ha il coraggio di esporre le sue idee; perché anche lui si è accorto, a scuola, che ci sono dei compagni che parlano meglio, dei compagni che, quando si fa lezione di geografia, dicono di aver viaggiato, di conoscere questa o quella città.

Da dove cominciare, quindi? Come risvegliare l'attenzione dei ragazzi? Come interessarli? Il primo obiettivo deve essere quello di farli lavorare in serenità, di dare loro la possibilità di « costruire la matematica », di immergerli nella matematica.

Nella matematica tutto è basato sul ragionamento e il punto di partenza è il « saper vedere ». Prima di vedere con gli occhi della mente, c'è un vedere « fisico »: bisogna saper osservare l'oggetto matematico, le trasformazioni di questo oggetto. E non è cosa facile.

Siamo ai primissimi giorni di scuola: ogni ragazzo ha tra le mani un quadrato articolabile, lo muove, lo osserva; ma... non riesce ad osservarlo. Infatti, alla domanda: che cosa cambia e che cosa rimane invariato quando da un quadrato si passa ad un rombo, tutti tendono a dire che l'area non cambia. E non cambia perché « si vede », l'area che stava da una parte si sposta dall'altra; non si accorgono che l'altezza diminuisce.

Osservare è difficile, molto più di quanto si pensi. Una educazione a guardare, a toccare, a costruire, una educazione che obblighi ad osservare prima che a parlare, questo deve essere il primo obiettivo dell'insegnamento della matematica. Ed ecco che, nello stesso tempo, si gettano le basi per raggiungere un più alto obiettivo: quello di mettere, proprio attraverso l'insegnamento della matematica, tutti i ragazzi sullo stesso piano, tutti a loro agio, proprio perché saper parlare bene non è importante. Quello che è importante è saper vedere.

Dalla figura che si trasforma (pensiamo al rettangolo di spago) si passa a poco a poco ad una rappresentazione grafica che, pur essendo un concreto, è ancora molto astratta per un ragazzo. Ma questi si accorge ora come il numero possa essere di aiuto per descrivere un fenomeno e i numeri vengono ad assumere un aspetto strumentale e quindi più umano. E la trasformazione del rettangolo per continuità fa capire che per descrivere i vari stadi è necessario usare i numeri decimali, introducendo così un altro concetto assai difficile.

Non si deve pensare che questi problemi siano soltanto un gioco, utile al solo scopo di attirare l'attenzione dei ragazzi. Al contrario, la motivazione ad apprendere è fortissima: se si deve insegnare la matematica, occorre, fin dalle prime lezioni, entrare nella vera matematica, introducendo tutta la problematica inerente al concetto di funzione, cioè ad uno dei concetti matematici fondamentali. Sono solo i grossi concetti che portano il ragazzo ad appassionarsi alla ricerca e a credere nell'utilità degli strumenti necessari; così come, imparando a sentire, a gustare, a « fare musica », sarà pian piano condotto ad apprendere il solfeggio.

A poco a poco nascerà l'abitudine a guardarsi intorno: oggi è l'ellisse che, come ombra di un disco stradale, viene scoperta; domani è l'arco parabolico di un ponte...; il mondo circostante diverrà per il ragazzo sempre più ricco di suggestioni.

SI-PUO'-CRESCERE ANCORA-PIU'-RAPIDAMENTE?

Sì,

considero

$$y=x^4$$

ma non ho più un area, non ho più un volume.

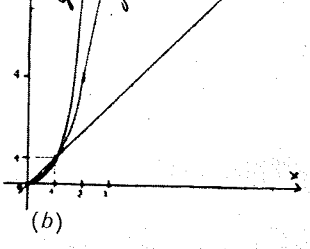
A partire da $x=1$ cresce più in fretta di $y=x^3$, e di $y=x^2$

Ora, per avere un valore costante bisogna arrivare a Δ_4!

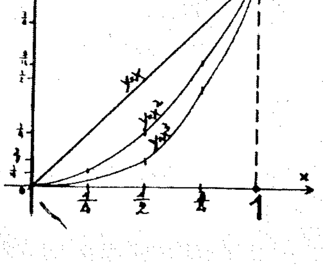
Ormai avete capito:

$$y=x^n$$

A partire da $x=1$ cresce tanto più rapidamente quanto più n é grande, e per avere il valore costante bisognerà arrivare a Δ_n



(b)

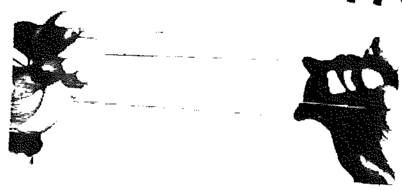


Nella collana La nuova scuola media, diretta da Aldo Visalberghi, La Nuova Italia **ha pubblicato il volume** « Didattica della matematica » di Emma Castelnuovo, **che è stato tradotto in più lingue e che viene utilizzato anche a livello universitario, nei corsi destinati alla formazione ed all'aggiornamento dei docenti di scuola media.**

DALLA MATEMATICA SENZA NUMERI AI CALCOLI, AI GRAFICI

RETTANGOLI di SPAGO

lo spago è lungo cm 40



posso formare tanti rettangoli

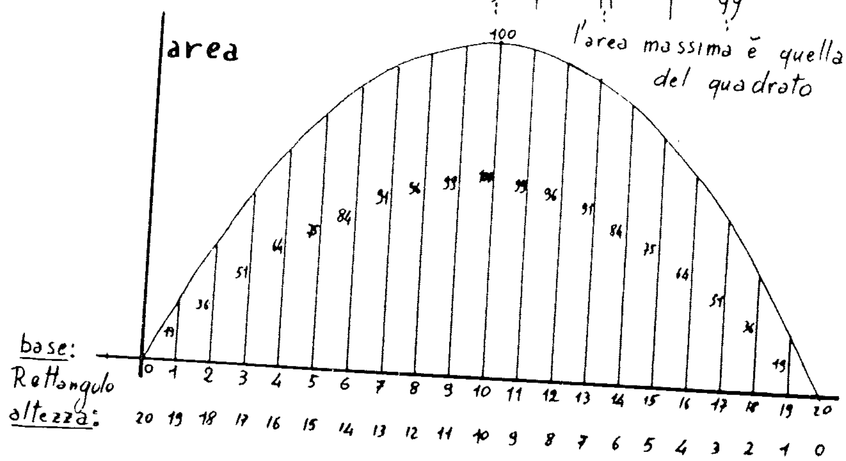
l'area cambia

base	altezza	area
20	0	0
19	1	19
18	2	36
17	3	51
::	:	::
11	9	99
10	10	100
9	11	99

l'area massima è quella del quadrato

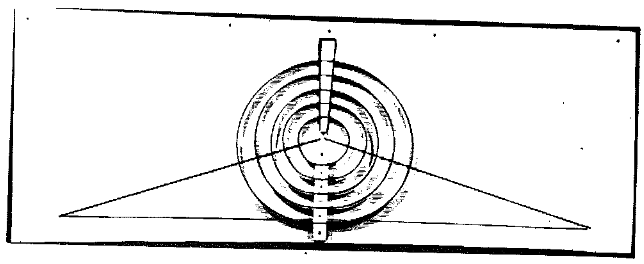
Prendiamo uno spago legato e teniamolo teso fra il pollice e l'indice delle due mani a mo' di rettangolo. Se avviciniamo le dita di ciascuna mano e, quindi, allontaniamo le mani, avremo dei rettangoli di altezza sempre minore e di base sempre maggiore: tutti questi rettangoli hanno evidentemente lo stesso perimetro che è realizzato dallo spago. È intuitivo che l'area diminuisce perché, nel caso limite — quando l'altezza va a zero — l'area tende a zero. Si capisce anche che *l'area massima sarà quella del quadrato*, figura che si ottiene nel momento in cui la base è uguale all'altezza. In questo caso, dunque, i rettangoli hanno tutti lo stesso perimetro, ma area diversa: si dicono *rettangoli isoperimetrici* (il prefisso *isos* in greco significa uguale).

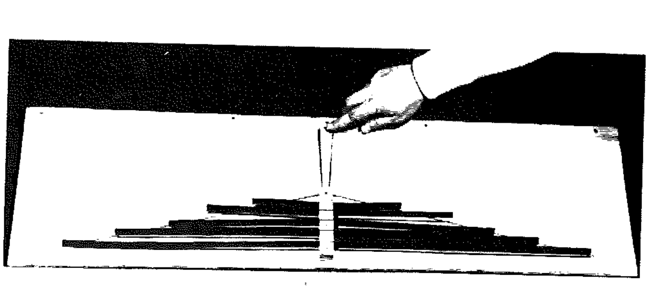
(La via della matematica: La geometria, pag. 61)



Se io immagino di inscrivere nel cerchio tanti poligoni regolari mi accorgo che l'area di questi va sempre più avvicinandosi all'area del cerchio quanto più è grande il numero dei lati del poligono mentre *il perimetro del poligono tende alla circonferenza e l'apotema aumenta avvicinandosi al raggio*; cioè:
l'area di un poligono regolare inscritto nel cerchio tende all'area del cerchio all'aumentare del numero dei lati.

(La via della matematica: La geometria, pag. 137)





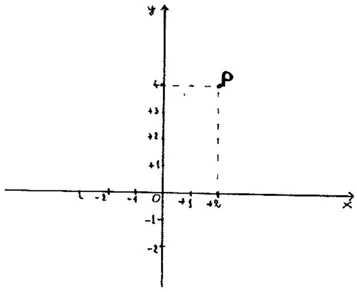
Due modi per calcolare l'area del cerchio: il ragionamento classico e l'osservazione di un marchingegno realizzato sulla base delle idee di Evangelista Torricelli (XVII sec.).

GEOMETRIA E... NUMERI

Molto spesso non si tratta nella scuola media di geometria analitica; in effetti questo settore non appare nei programmi ministeriali se non nel termine «grafici». E per i grafici i ragazzi hanno una vera passione. Perché non approfondirne lo studio? Gli elementi della geometria analitica sono facili, estremamente formativi e obbligano all'ordine materiale e mentale.

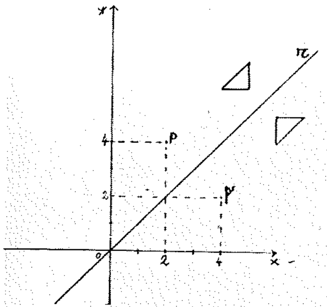
Ecco il problema

Come individuare la posizione di un punto nel piano?



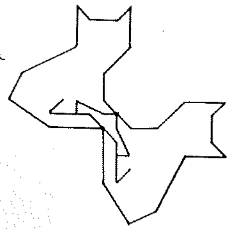
P (+2, +4)

Si possono scambiare le coordinate?



NO!

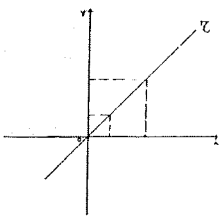
il gatto si guarda allo specchio



Si ottiene una figura simmetrica rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

Non è mai possibile scambiare la x con la y?

Sì, solo se $y = x$. Ho tanti punti e tutti questi punti stanno su r

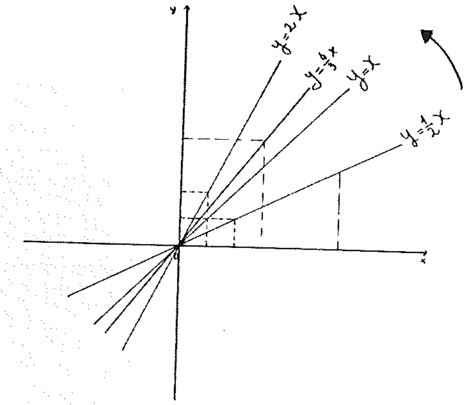


Se mi muovo su quella retta, la r, sempre

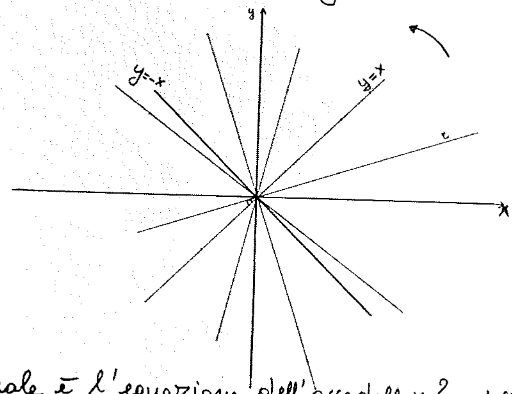
$$y = x$$

Questa è l'equazione della retta r.

Altre rette per O nel 1° e 3° quadrante



E se la retta va a disporsi su y? e se lo "sorpassa"?



Quale è l'equazione dell'asse delle y? e dell'asse delle x?

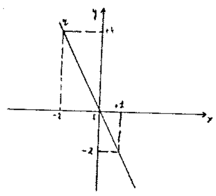
Riflettiamo: se percorro l'asse delle y, non mi sposto né a destra né a sinistra; la mia x è dunque uguale a zero. L'asse delle y avrà dunque l'equazione

$$\boxed{X = 0}$$

Se percorro l'asse delle x, non mi alzo e non mi abbasso; la mia y è dunque uguale a zero. L'asse delle x ha perciò l'equazione

$$\boxed{y = 0}$$

Se percorro una retta che si trova nel 2° e nel 4° quadrante, le mie coordinate avranno segno opposto; la x negativa e la y positiva, o viceversa.



La retta r ha l'equazione

$y = -\frac{4}{2}x$

cioè $y = -2x$

In generale, l'equazione di una retta per O è:

$$y = m\,x$$

m è il coefficiente angolare.

FRAZIONI E NUMERI DECIMALI

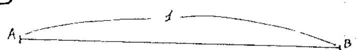
Abbiamo visto che esistono dei numeri con infinite cifre dopo la virgola.
È certo che qualcuno di voi penserà: « ma allora, non esiste, non è preciso quel numero ». Altri diranno: « se ha infinite cifre, vuol dire che è grandissimo quel numero ». Altri ancora si chiederanno: « se quel numero rappresentasse la lunghezza di un segmento, cosa vorrebbe dire? Si capisce quando si dice che un bastone è lungo 1/3 di metro, ma non si vede cosa potrebbe voler dire che un bastone è lungo m 0,333...; sembra che non esista una misura così... ».
A tutte le vostre osservazioni io rispondo con un esempio: immaginiamo di vivere nel mondo dei numeri naturali, immaginiamo dunque di conoscere *solo* i numeri naturali. Se ci si presenta il problema di dividere un pane fra 2 persone noi potremo dire che ad ogni persona spetta mezzo pane; ma non possiamo, valendoci solo della scrittura dei numeri naturali, scrivere il risultato della divisione 1 : 2. Eppure, evidentemente, il risultato esiste. Ma i numeri naturali sono troppo poco « potenti » per esprimere il risultato della divisione 1 : 2.
Così accade nella misura di quel bastone lungo 1/3 di metro; questa lunghezza la possiamo esprimere, utilizzando le frazioni, col simbolo 1/3, ma non si riesce a esprimerla utilizzando la notazione decimale. Si può scrivere 0,3, ma è un valore approssimato; si può scrivere 0,33 ed è un valore un po' più approssimato, oppure 0,333 ed è ancor più approssimato, ... ma, con la scrittura decimale, non si potrà mai indicare il valore esatto.
È la scrittura decimale, insomma, che non è abbastanza « potente » per esprimere questi numeri.

(La via della matematica: I numeri, pag. 208)

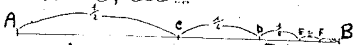
Del resto, i calcoli scritti sotto forma decimale (anche i decimali limitati) offrono sempre delle difficoltà: sono meno « visibili ». Molte volte, perciò, è meglio lavorare con le frazioni. Ecco un problema motivante e « simpatico » che ci permette di fare molta strada sulla via del calcolo frazionario.

La formica

Una formica parte da A per raggiungere B



Essa percorre la metà di AB, ossia AC, poi la metà di CB, poi la metà del rimanente, ecc...

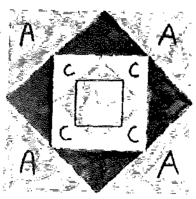


LA FORMICA ARRIVA IN B?

Vi arriva solo dopo aver fatto infiniti passi.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots=1$$

Vediamolo in un altro modo:



il quadrato grande ha area = 1

Si vede che:
l'area dei 4 triangoli A $= \frac{1}{2}$
" " " " B $= \frac{1}{4}$
" " " " C $= \frac{1}{8}$
. . . .

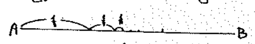
e questi triangoli tendono a ricoprire il quadrato grande, quindi:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1.$$

Ora invece la formica per andare da A a B percorre prima $\frac{1}{3}$, poi $\frac{1}{9}$, poi $\frac{1}{27}$, ecc.
Ci arriverà in B? Quanto fa

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots ?$$

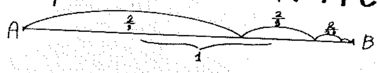
Lo vedo con un disegno



no! non ci arriva in B.

dove arriva?

Altri tipi di FORMICHE



Una formica previdente percorre invece $\frac{2}{3}$ e poi $\frac{2}{9}$ e poi $\frac{2}{27}$ ecc
cioè percorre

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\ldots$$

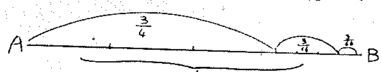
Si vede che ora la formica ci arriva in B! Quindi

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\ldots=1$$

divido per 2 e scopro che

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\frac{1}{2}.$$

Un'altra formica percorre $\frac{3}{4}$ e poi $\frac{3}{16}$ e poi $\frac{3}{64}$ ecc.



Si vede che

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}+\ldots=1$$

divido per 3 e scopro che

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{1}{3}.$$

Capisco che in generale si avrà:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots=\frac{1}{n-1}$$

Questa è la formula che dà la somma di queste serie convergenti.

CEDOLA N. 1

Per richiedere copia di saggio dei due volumi di matematica per la scuola media di Emma Castelnuovo.

cedola di commissione libraria

Vi prego inviarmi in saggio i seguenti volumi:

CASTELNUOVO: La via della matematica. I numeri	L. 4600	☐
CASTELNUOVO: La via della matematica. La geometria	L. 4600	☐

Cognome .... Nome ....

Qualifica (di ruolo, incaricato, supplente) ....

Via ....

Cap .... Città ....

Istituto ....

Firma .... Data ....

CEDOLE N. 2 e 3

Per acquistare i titoli di didattica della matematica.

cedola di commissione libraria

Vi prego inviarmi i seguenti volumi:

PIAGET: Avviamento al calcolo	L. 1600	☐
PIAGET ed altri: L'insegnamento della matematica	L. 2400	☐
GATTEGNO ed altri: Il materiale per l'insegnamento della matematica	L. 3000	☐
DANTZIG: Il numero, linguaggio della scienza	L. 3500	☐
SPOTORNO - VILLANI: Mondo reale e modelli matematici	L. 3000	☐
CASTELNUOVO: Didattica della matematica	L. 2200	☐
FASANO PETRONI: Il calcolatore e lo sviluppo mentale. Iniziazione al pensiero algoritmico	L. 2800	☐

Cognome .... Nome ....

Via ....

Cap .... Città ....

☐ Pagamento contrassegno + L. 250 per spese di spedizione

☐ Pagamento anticipato mediante accluso assegno bancario o versamento sul c.c.p. 5/6261 intestato a La Nuova Italia Editrice, casella postale 183, 50100 Firenze.

(contrassegnare i quadratini che interessano)

Firma .... Data ....

cedola di commissione libraria

Vi prego inviarmi i seguenti volumi:

ADLER: Matematica e sviluppo mentale	L. 3500	☐
CASTELNUOVO: Documenti di un'esposizione di matematica	L. 9500	☐
CASTELNUOVO - BARRA: Matematica nella realtà	L. 10000	☐
HUG: Il fanciullo e la matematica	L. 5000	☐
ROBERT: Introduzione alla logica nelle scuole elementari	L. 3000	☐
SAWYER: Guida all'insegnamento della matematica: vol. I, Albegra intuitiva	L. 9000	☐
VERGA: Fondamenti di logica per insegnanti	L. 6000	☐

Cognome .... Nome ....

Via ....

Cap .... Città ....

☐ Pagamento contrassegno + L. 250 per spese di spedizione

☐ Pagamento anticipato mediante accluso assegno bancario.

(contrassegnare i quadratini che interessano)

Firma .... Data ....

Non affrancare

Affrancatura a carico del destinatario da addebitarsi sul conto di credito n. 46 presso l'ufficio postale di Firenze C. P.
Autorizzazione della Direzione provinciale P. T. di Firenze n. 31196/1377 del 13-2-1941.

La Nuova Italia Editrice
casella postale 183
50100 FIRENZE

Non affrancare

Affrancatura a carico del destinatario da addebitarsi sul conto di credito n. 46 presso l'ufficio postale di Firenze C. P.
Autorizzazione della Direzione provinciale P. T. di Firenze n. 31196/1377 del 13-2-1941.

La Nuova Italia Editrice
casella postale 183
50100 FIRENZE

Non affrancare

Affrancatura a carico del destinatario da addebitarsi sul conto di credito n. 46 presso l'ufficio postale di Firenze C. P.
Autorizzazione della Direzione provinciale P. T. di Firenze n. 31196/1377 del 13-2-1941.

La Nuova Italia Editrice
casella postale 183
50100 FIRENZE

Vendita per corrispondenza. La merce viene inviata a mezzo posta. La Nuova Italia Editrice, Firenze, c.c.p. 5/6261.
Catalogo semestrale n. 722. Febbraio 1977. Spedizione in abbonamento postale gruppo V.

Cooperativa Lav. Officine Grafiche Firenze